Matematica e Musica: duemila anni di numeri armonici

fabio.bellissima@unisi.it

Proclo, *Commento al Primo libro degli Elementi di Euclide*:

“Ora, i Pitagorici erano d'opinione di dividere l'intera scienza matematica in quattro parti: [...] l'*aritmetica* considera il numero per se stesso, la *musica* lo considera rispetto ad un altro numero; la *geometria* considera l'estensione come immobile, l’*astronomia* la considera mobile su se stessa.”

Musica = Teoria dei rapporti tra numeri naturali.

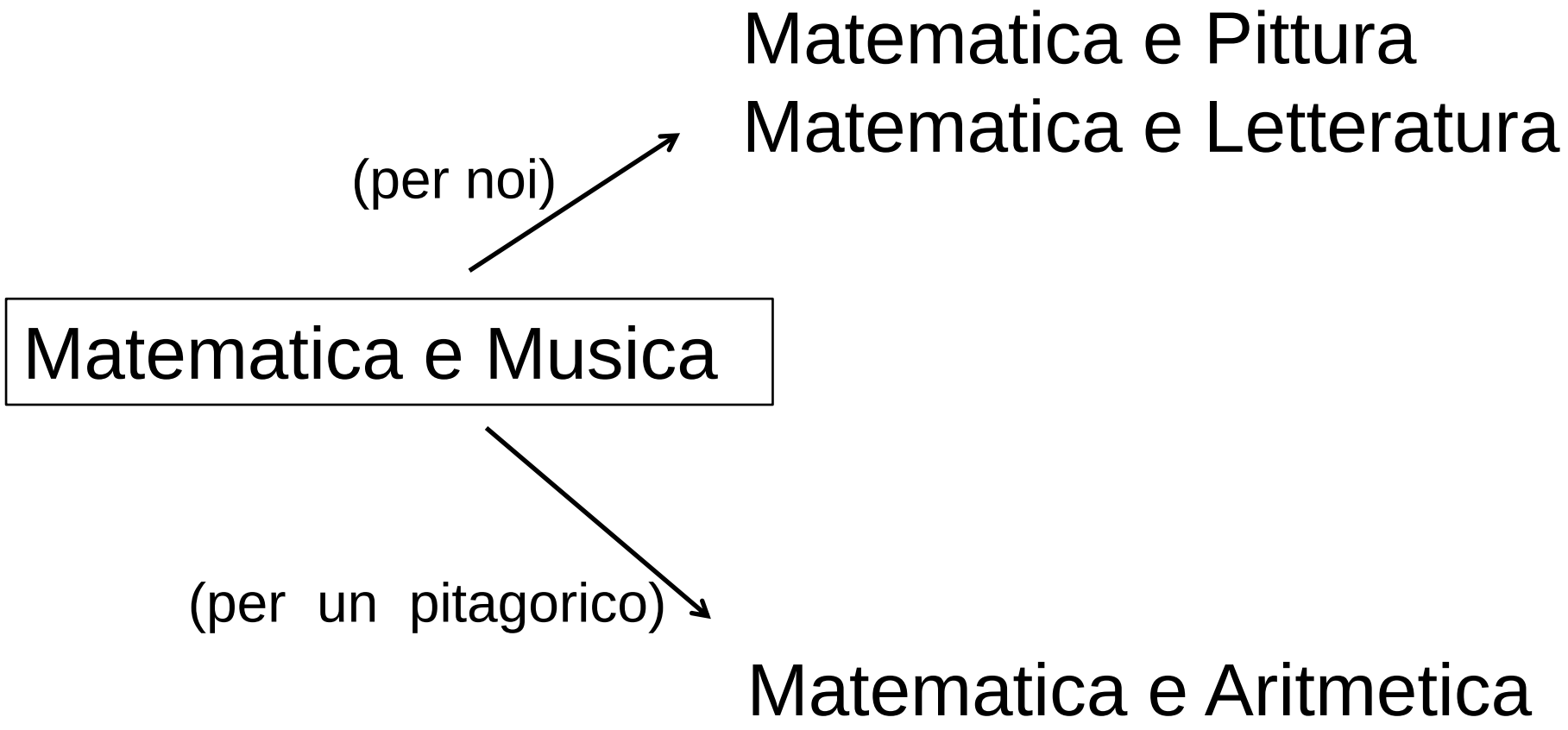
Da Archita (IV Sec. a.C,)

a

Boezio (475-524) (Quadrivio)

fino a

Gaffurio (*De Musica,* 1492)


Matematica e Pittura
Matematica e Letteratura
(per noi)
Matematica e Musica
(per un pitagorico)
Matematica e Aritmetica

a) Su quali argomenti si fonda questa appartenenza.

.

b) Come mai dura così a lungo.

Pitagora (VI sec. a.C.)

Euclide (*La sezione del canone*, IV-III sec. a.C.)

Tolomeo (*Tre libri armonici,* II sec. d.C,)

Cardano (*De Proportionibus numerorum, motuum, ponderum, sonorum*, 1570)

Keplero (*Harmonices Mundi Libri V*, 1609)

Cartesio (*Compendium musicae*, 1618)

Galileo

Fermat

Leibniz

Mersenne (*Harmonie universelle*, 1636)

Huygens (*Novus Cyclus Harmonicus*, 1724)

D’Alambert

I Bernoulli

Eulero (*Tentamen Novae Theoriae Musicae*, 1739)

Incontro tra

Numeri e consonanze

«Consonanza e dissonanza sono termini usati per indicare rispettivamente l'effetto gradevole o sgradevole di determinati intervalli.»

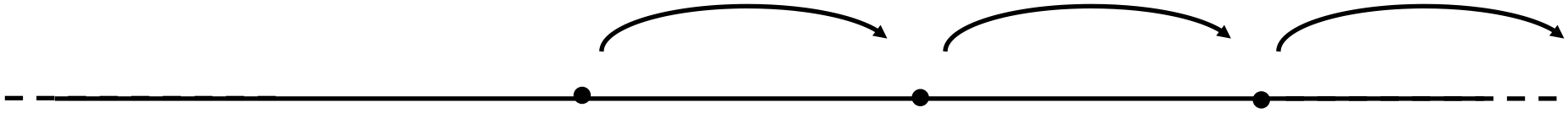
Dizionario Ricordi, 1976.

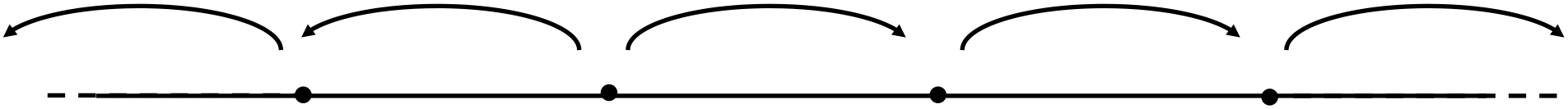
«Consonanza/dissonanza: termini musicali designanti la qualità gradevole o sgradevole di un intervallo o di un accordo.»

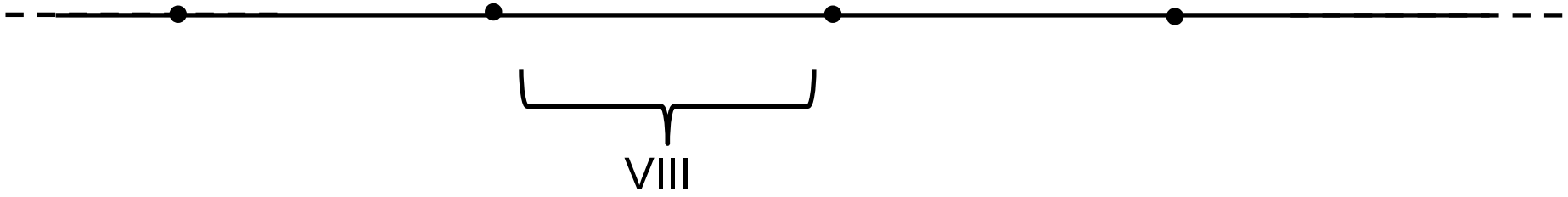
Enciclopedia della musica, Garzanti, 1983.

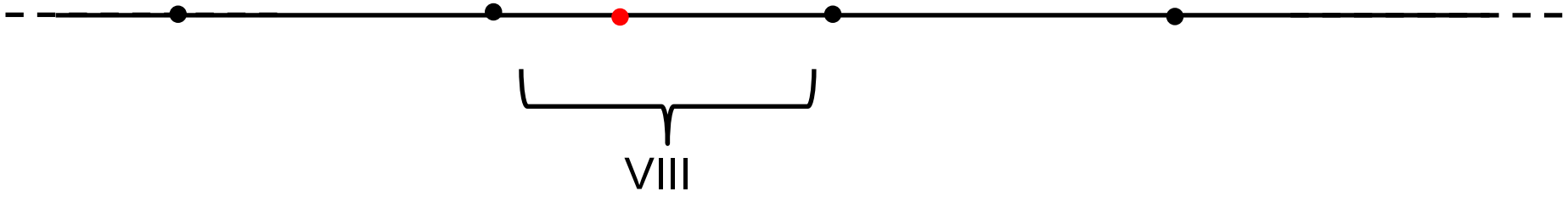
«Due suoni che differiscono tra loro esattamente di un’ottava armonizzano fra loro così bene e si assomigliano talmente, che i musicisti li indicano con le stesse lettere. Così nelle Chiese possiamo vedere che le donne, pur cantando un’ottava più alta degli uomini, credono di intonare le stesse note.»

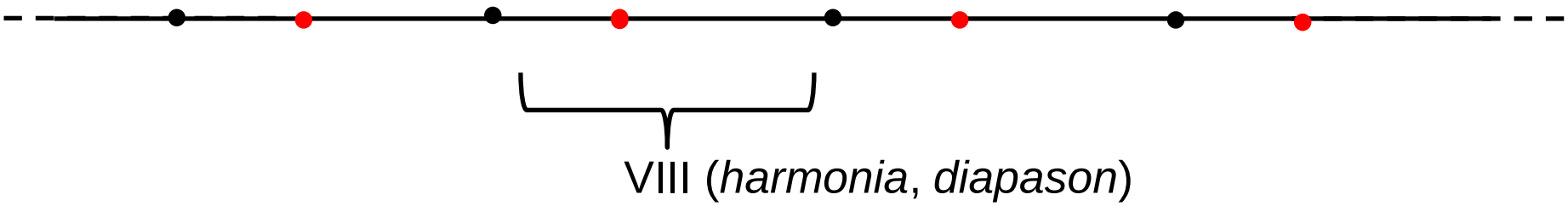
Eulero, *Lettere a una principessa tedesca*. Lettera 4.

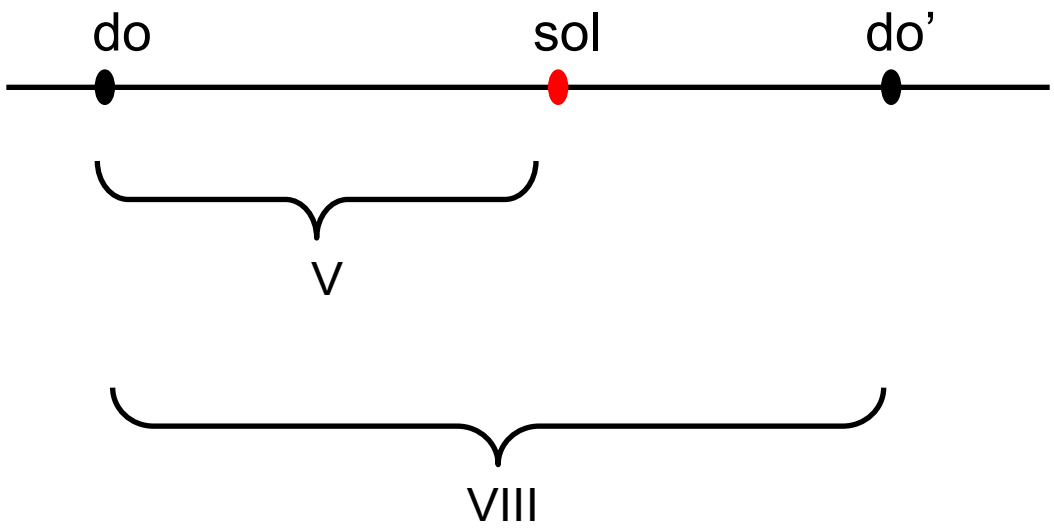


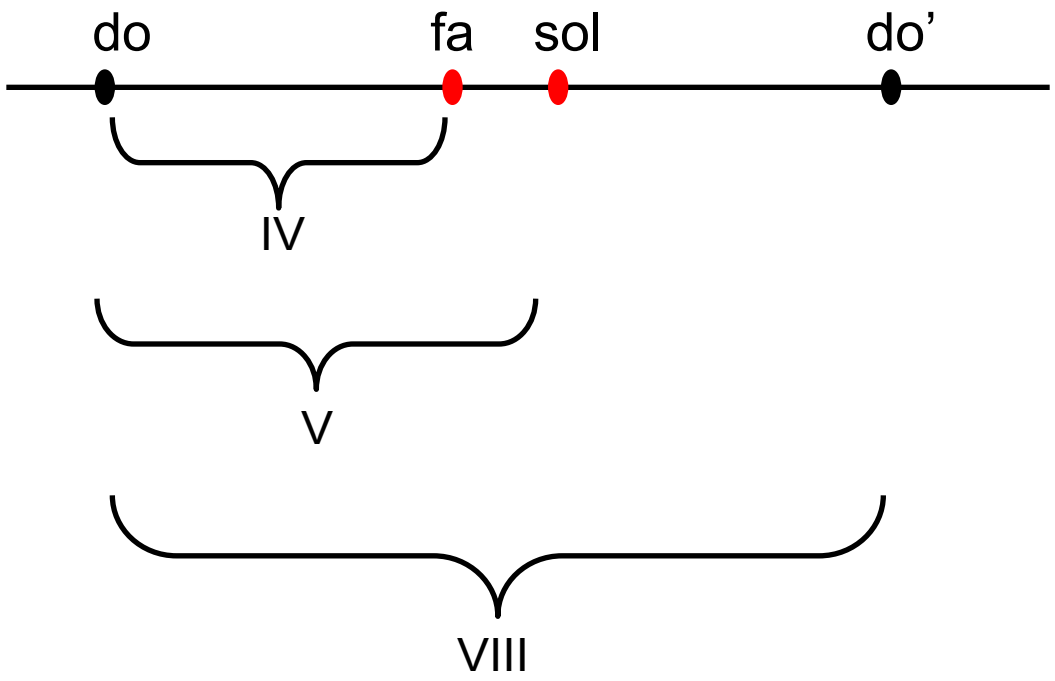



VIII

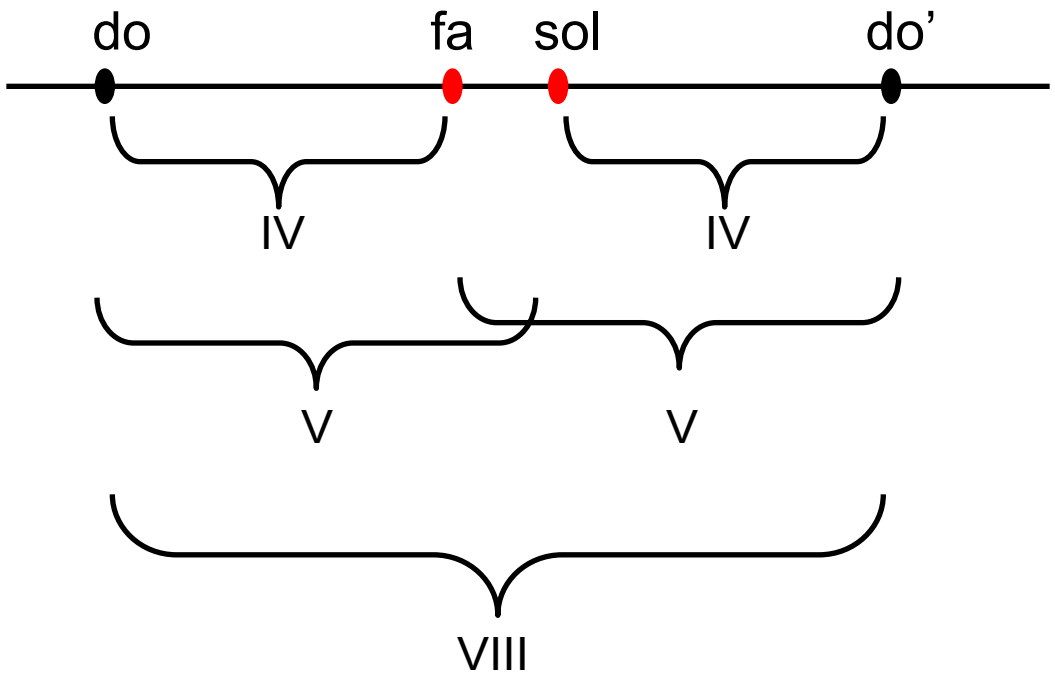

VIII


VIII (*harmonia*, *diapason*)

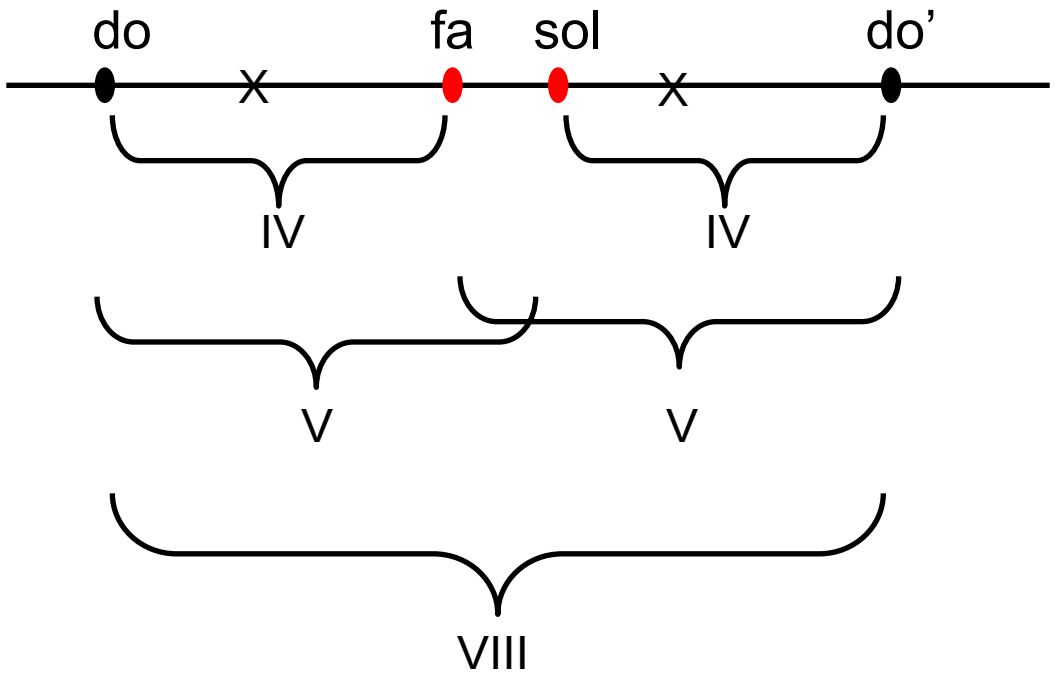

do
sol
do’
V
VIII


do
fa
sol
do’
IV
V
VIII

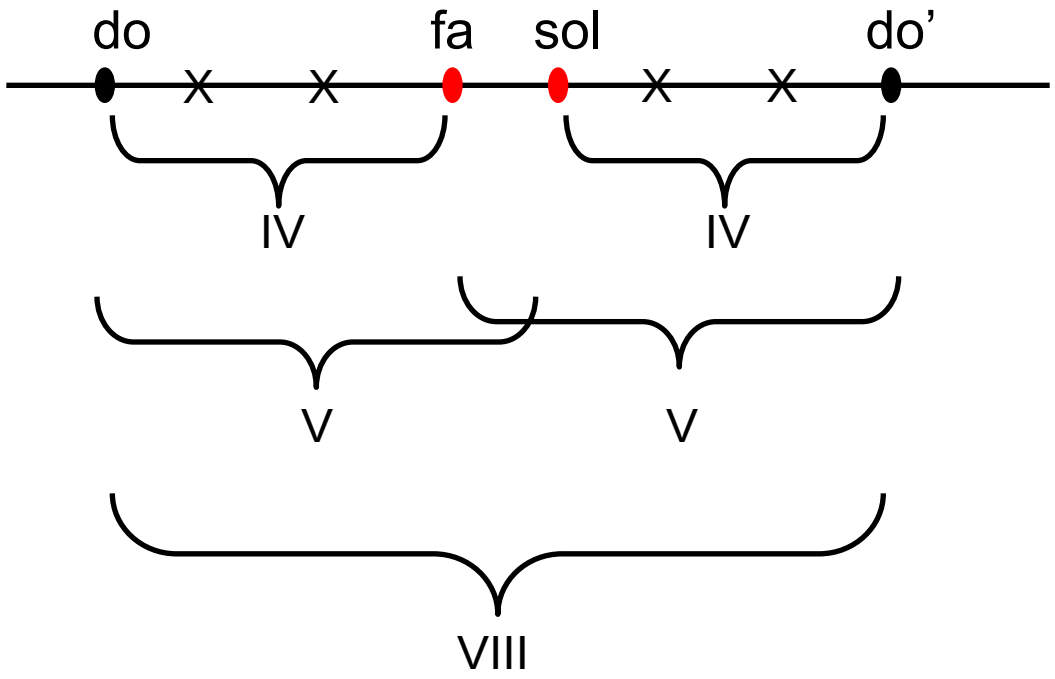
“note fisse”



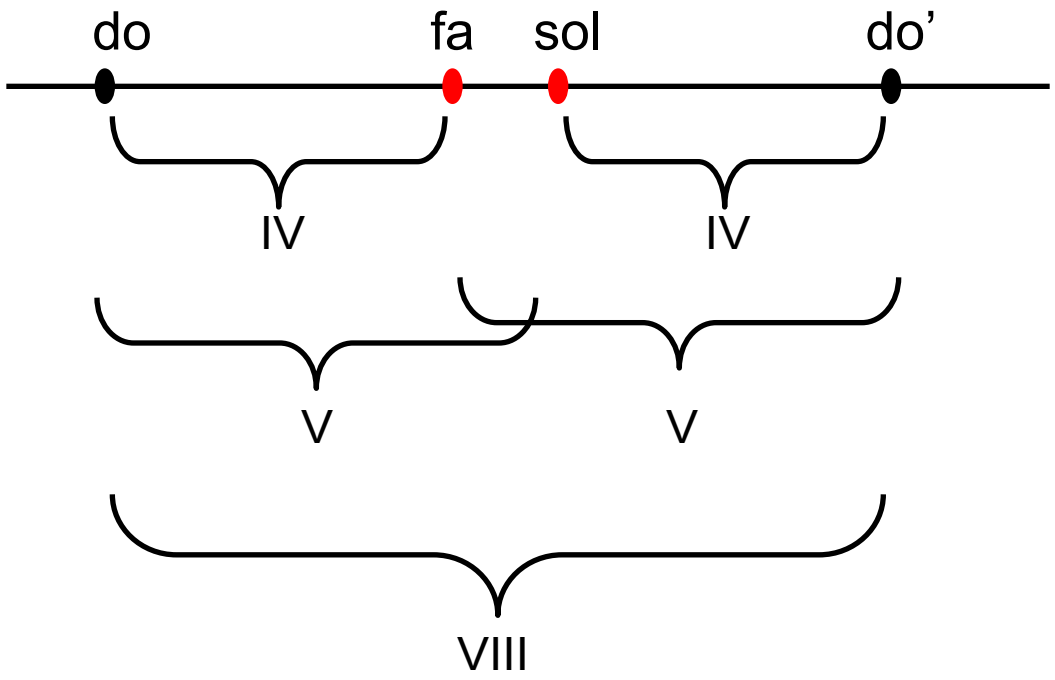
scale pentatoniche



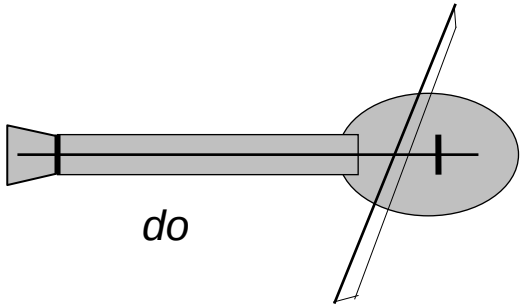
scale eptatoniche



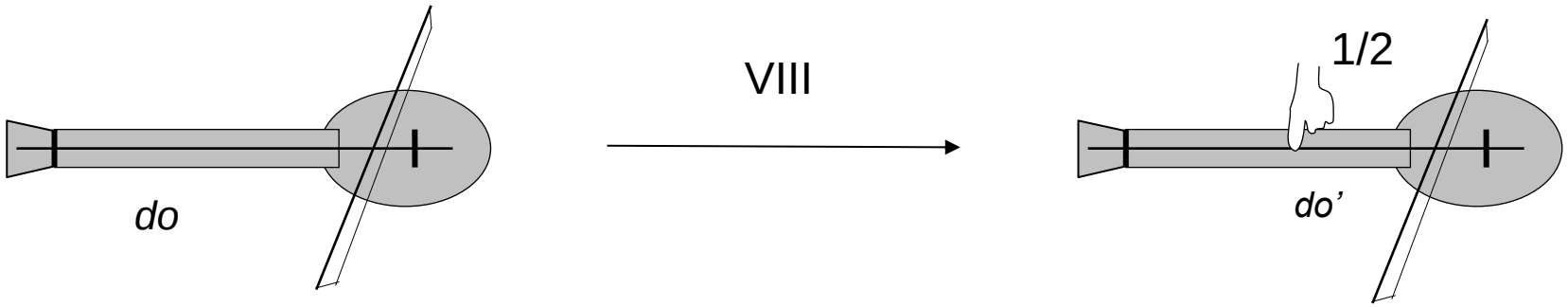
“note fisse”



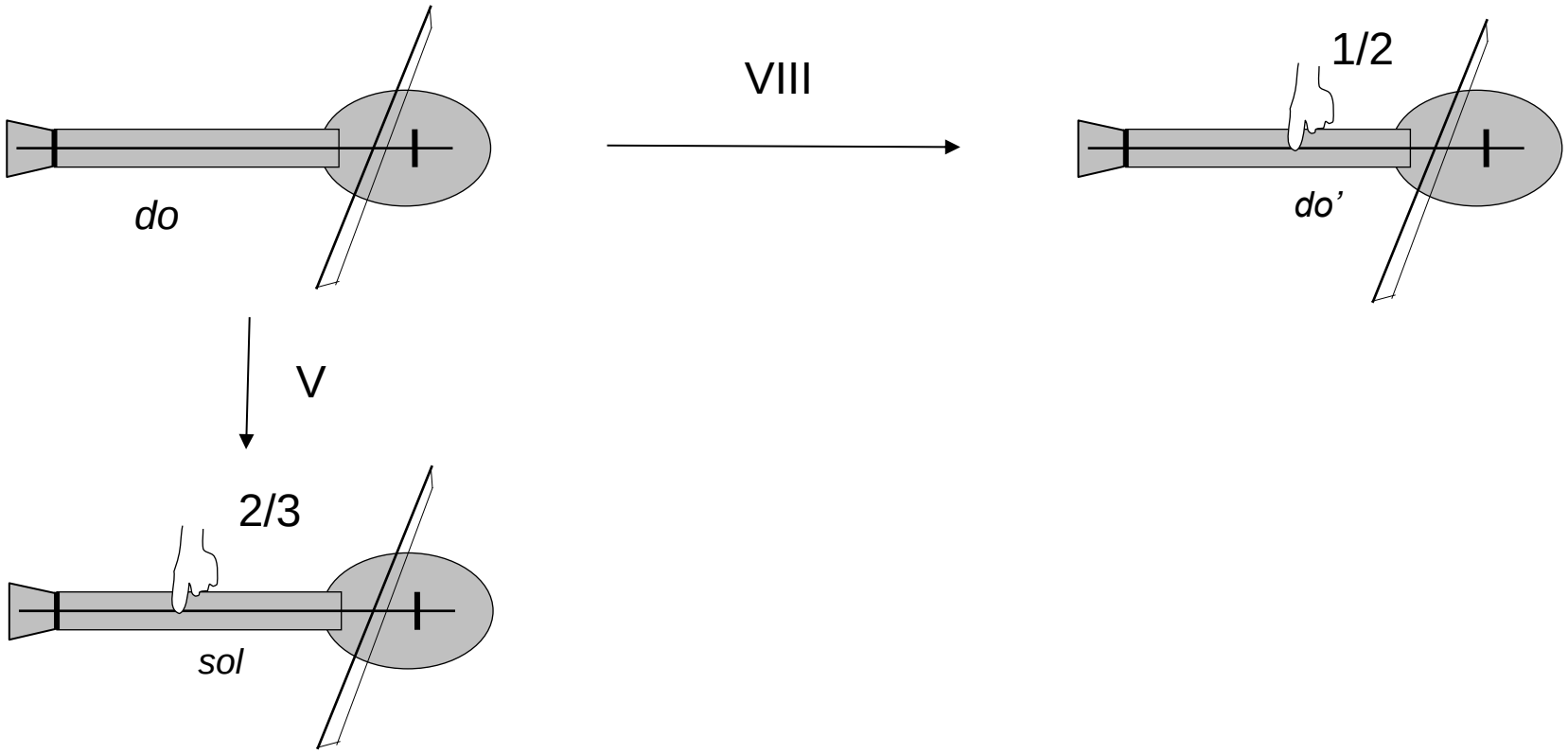
La “scoperta pitagorica”



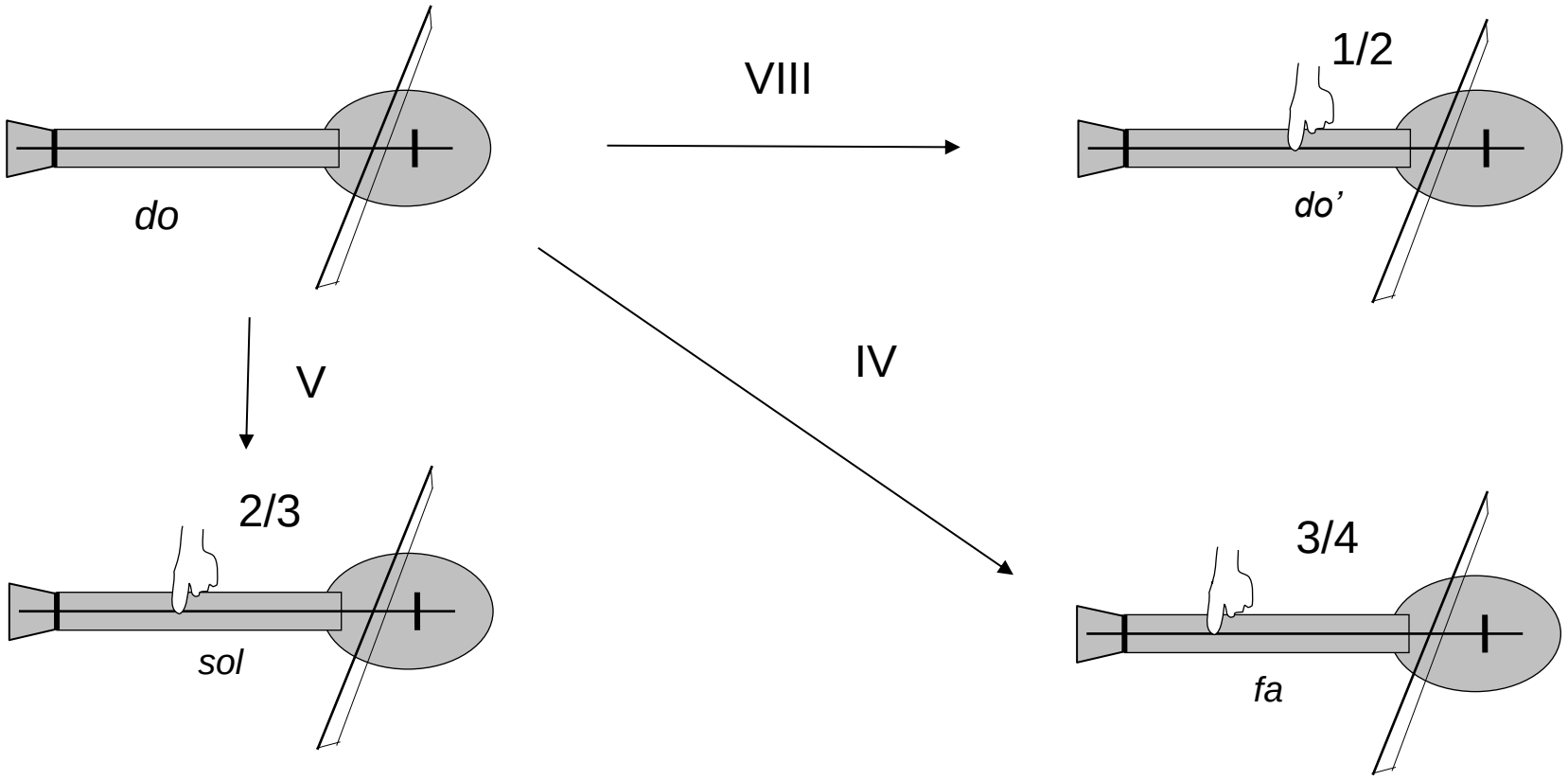
La “scoperta pitagorica”



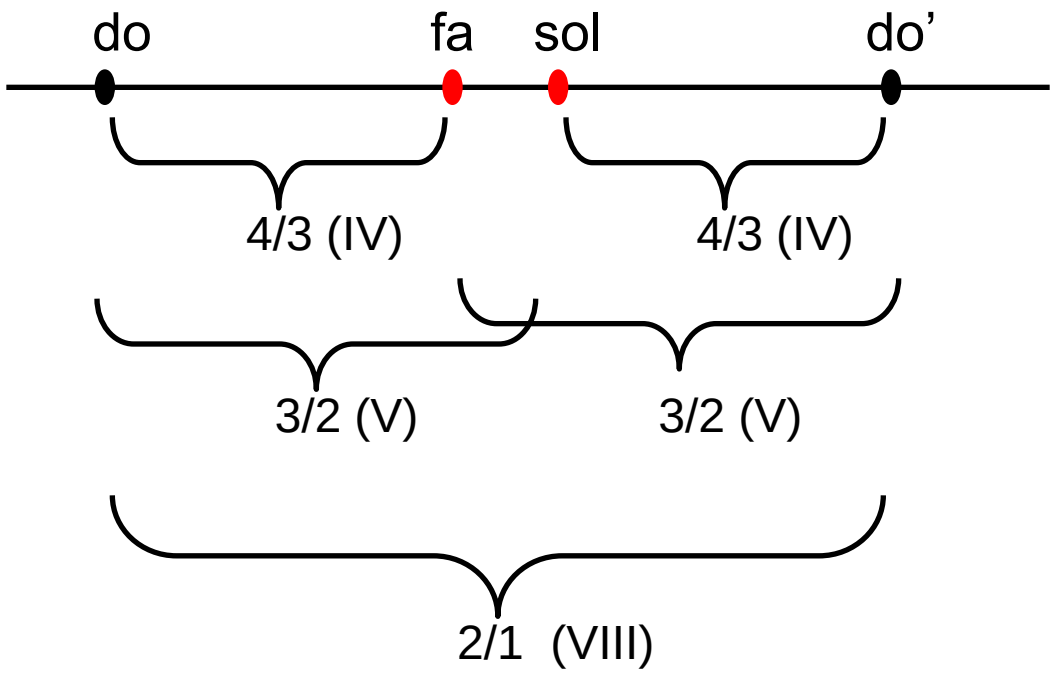
La “scoperta pitagorica”



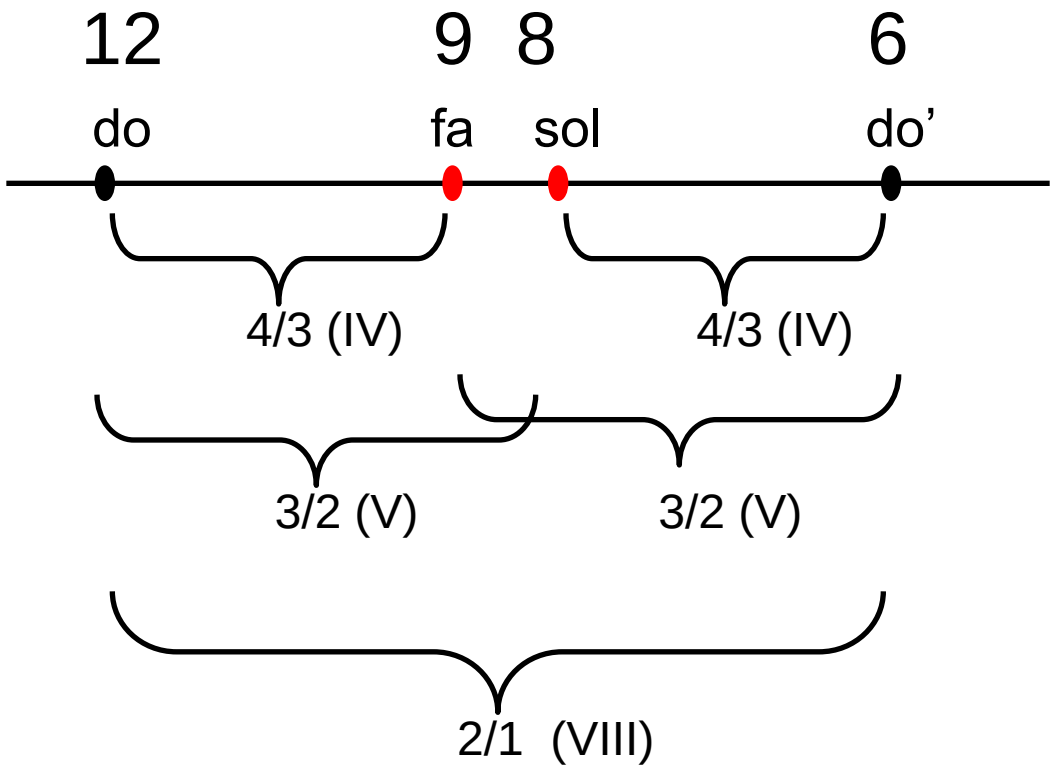
La “scoperta pitagorica”



- ottava 2:1
- quinta 3:2
- quarta 4:3



- ottava 2:1
- quinta 3:2
- quarta 4:3

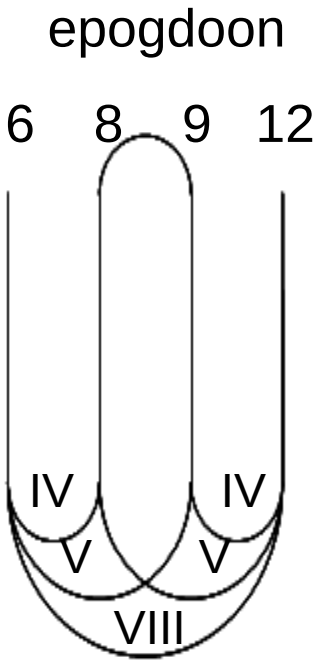


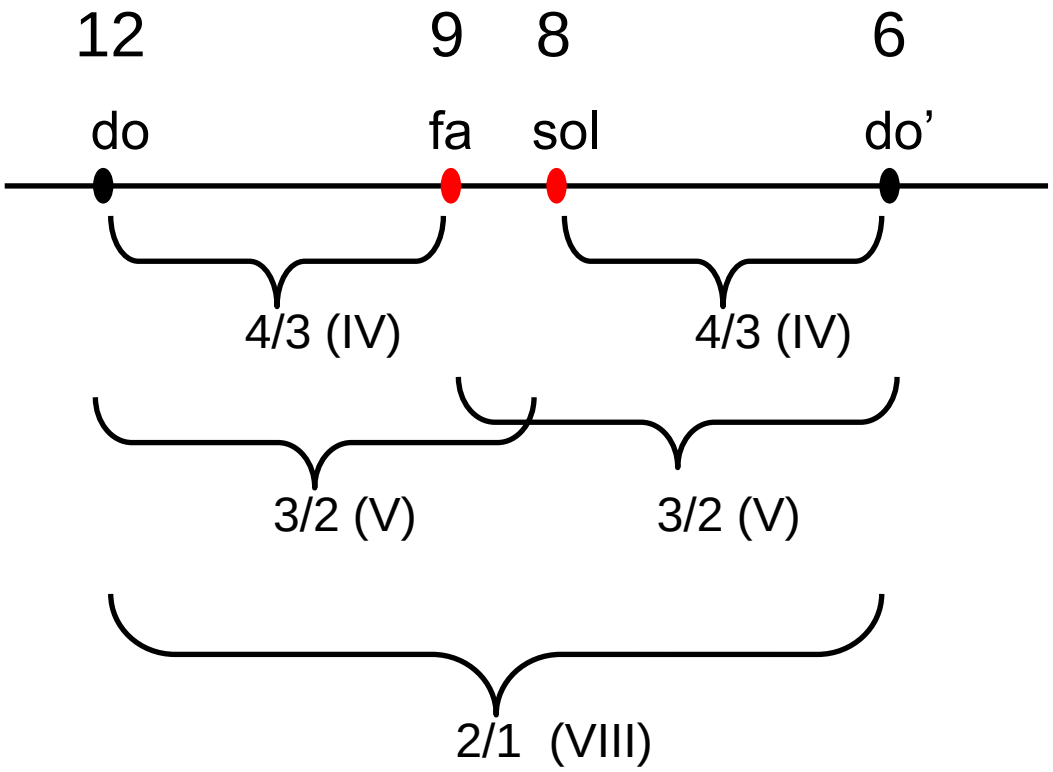
IV BAL
PYTACORA
PITAGORAS
PYTACORA
PHYLOLAVS

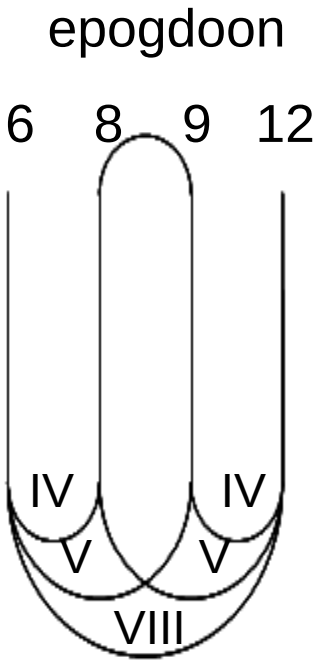
“I Pitagorici, per il fatto che vedevano molte proprietà dei numeri presenti nei corpi sensibili, supposero che le cose reali fossero numeri. E perché? Perché le proprietà dei numeri si trovano nella musica, nel cielo e in molte altre cose.”

Aristotele, *Metafisica*, Z2, 1028 b 16

ΕΠΟΓΔΟΩΝ


epogdoon
6
8
9
12
IV
IV
V
V
VIII


12
9
8
6
do
fa
sol
do’
4/3 (IV)
4/3 (IV)
3/2 (V)
3/2 (V)
2/1 (VIII)


epogdoon
6
8
9
12
IV
IV
V
V
VIII

1) Peso delle due discipline.

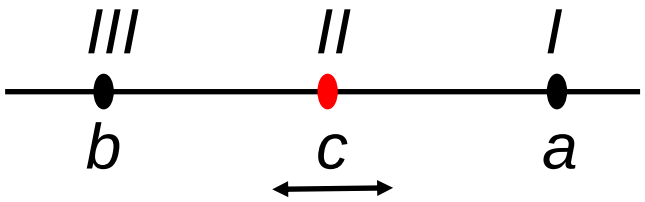
ATENIESE - Cari amici, al tempo di quella antica legislazione il popolo non era detentore della sovranità, ma si sottometteva volentieri alle leggi. MEGILLO - A quali leggi? ATENIESE - In primo luogo, alle leggi che riguardano la musica. Allora, nella nostra Città la musica era divisa in certi generi suoi propri e in certe figure. [...] Col trascorrere degli anni ebbero il sopravvento degli artisti per natura dotati di estro poetico, ma del tutto all'oscuro di ciò che è giusto e corretto in campo musicale. […] In seguito a questa libertà è sorto il rifiuto a sottostare all'autorità costituita. (Platone, *Leggi*, III 700A-701B)

1) Peso delle due discipline.

2) Proprietà numeriche «evocative», soprattutto legate alle medie.

«Ci sono tre medie nella musica: [...] si ha l'aritmetica quando [...] di quanto il primo supera il secondo, di tanto il secondo supera il terzo.[...] La media geometrica si ha quando i tre termini sono tali che il primo sta al secondo come il secondo sta al terzo. La media subcontraria, che chiamano armonica, si ha quando i termini stanno tra loro così: di quanta parte di sé il primo supera il secondo, di altrettanta parte del terzo il secondo supera il terzo.»

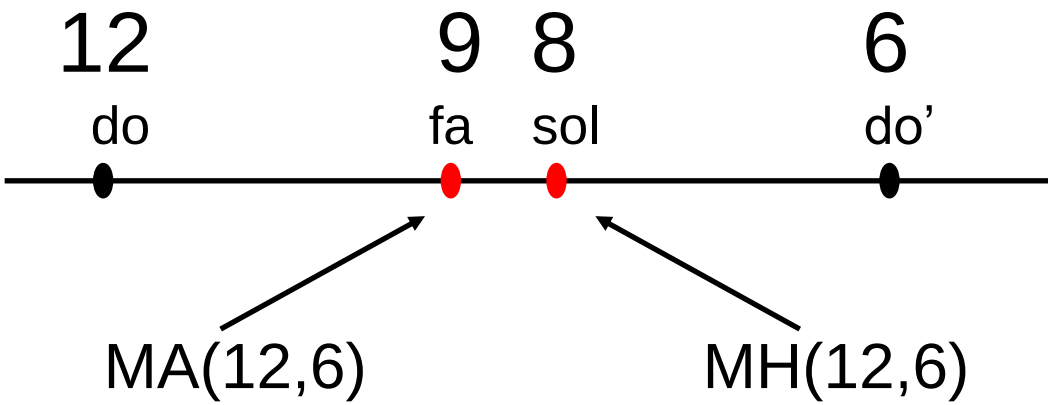
Archita (IV sec. a.C.)

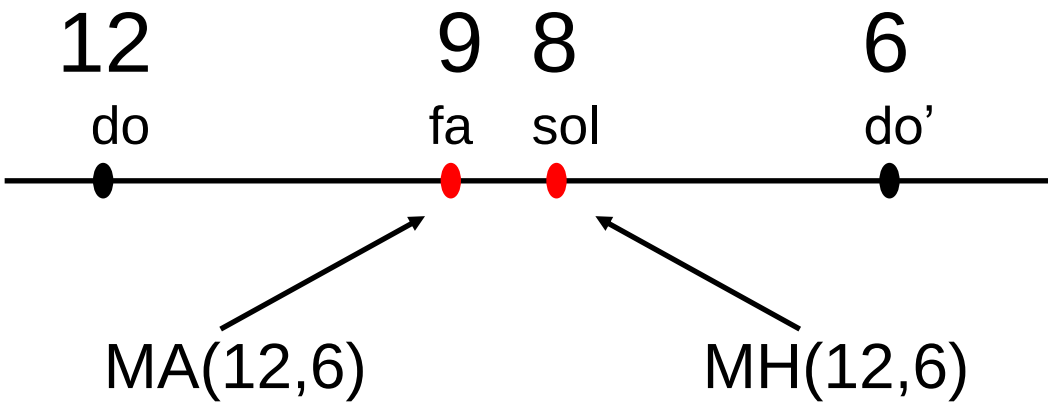


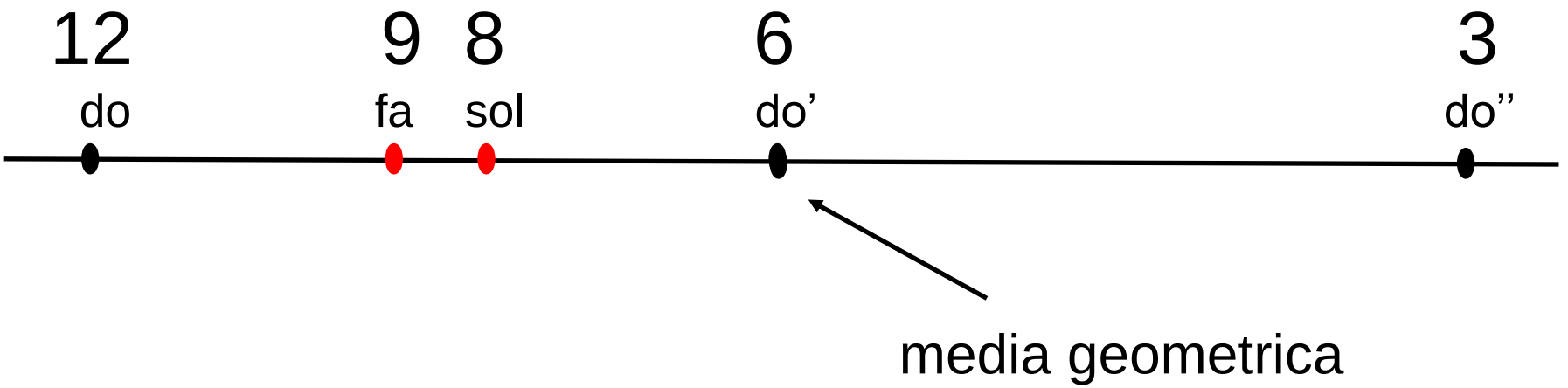
Aritmetica: $a - c = c - b$

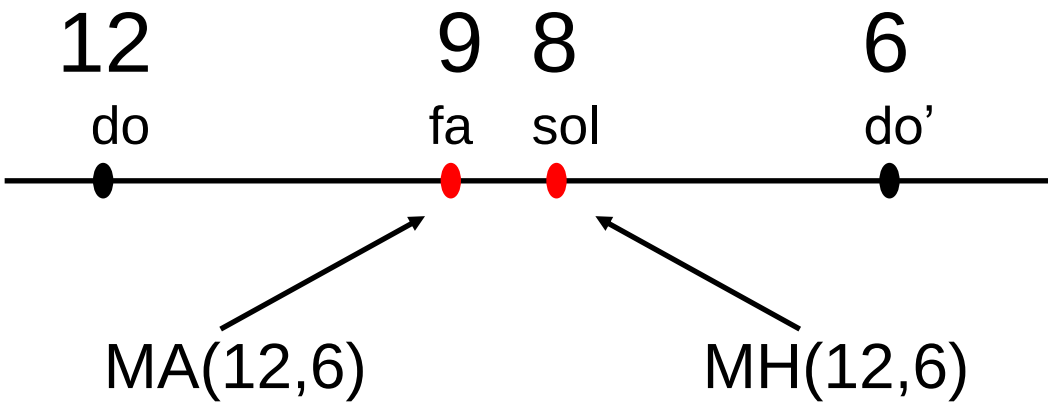
Geometrica: $a : c = c : b$

Armonica : esiste n tale che $c = a - a/n = b + b/n$


12
9
8
6
do
fa
sol
do’
MA(12,6)
MH(12,6)

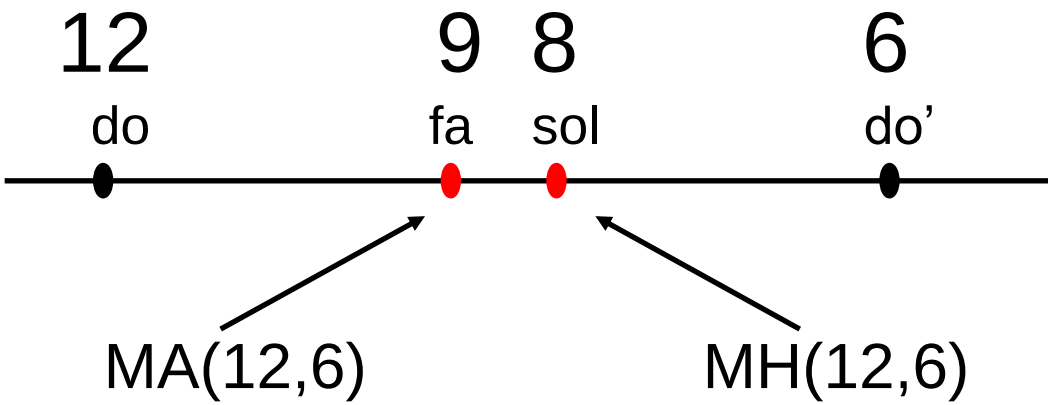

12
9
8
6
do
fa
sol
do’
MA(12,6)
MH(12,6)


12
9
8
6
3
do
fa
sol
do’
do”
media geometrica



do-fa = sol-do’

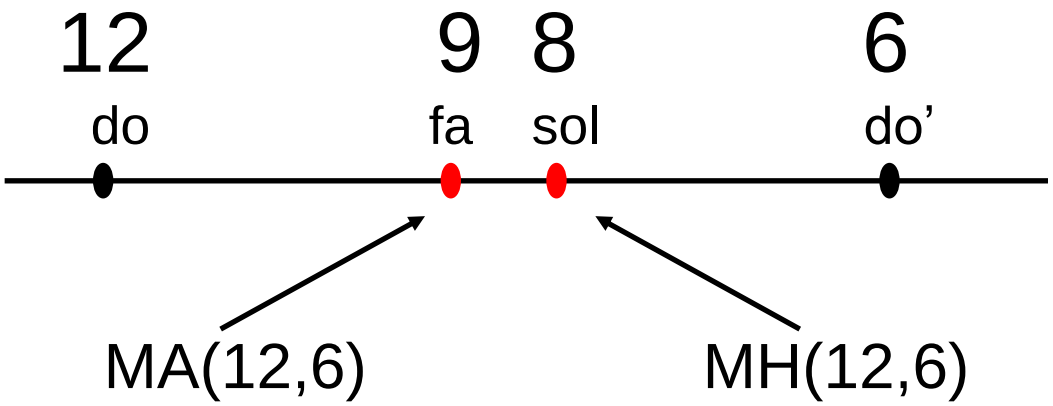
12 : MA(12,6) = MH(12,6) : 6



do-fa = sol-do’

12 : MA(12,6) = MH(12,6) : 6

a : MA(*a*,*b*) = MH(*a*,*b*) : *b*



do-fa = sol-do’

12 : MA(12,6) = MH(12,6) : 6

a : MA(*a*,*b*) = MH(*a*,*b*) : *b*

MA(*a*,*b*) : MG(*a*,*b*) = MG(*a*,*b*) : MH(*a*,*b*)

« E’ la più perfetta delle proporzioni, la più utile per il progresso della musica e della teoria della natura dell’universo. »

Nicomaco, *Introduzione all’Aritmetica.* (II sec. d.C.)”

« È nella musica che la natura sembra assegnarci il principio fisico di quelle nozioni puramente matematiche su cui si basano tutte le scienze, e cioè le proporzioni armoniche, aritmetiche e geometriche.»

J. P. Rameau. *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels,* 1722

1) Peso delle due discipline.

2) Proprietà numeriche «evocative», soprattutto legate alle medie.

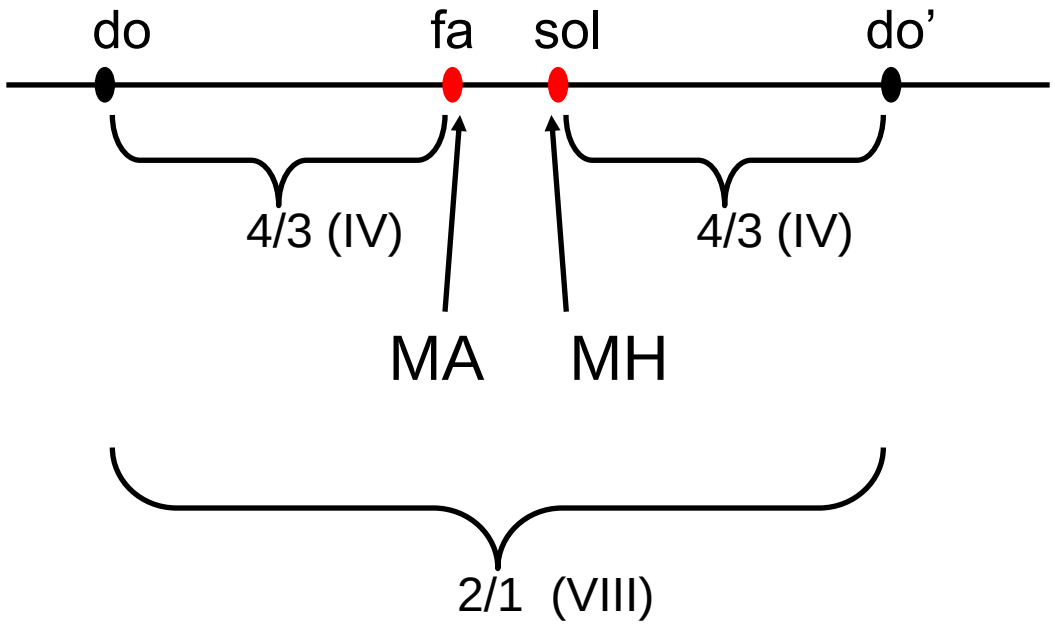
3) Platone e la *Scala del Timeo*

Platone, *Timeo* 36 A-B

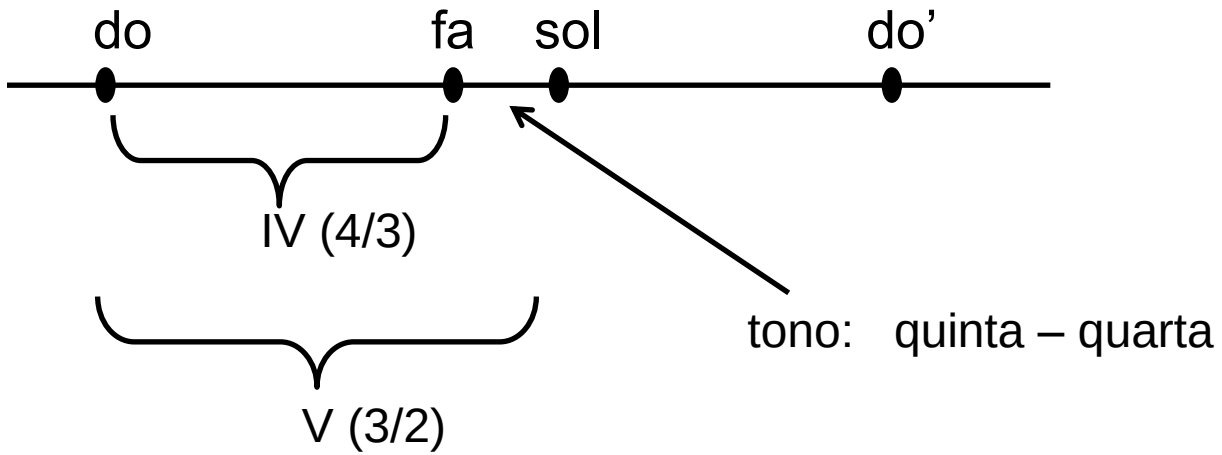
«Riempì completamente gli intervalli doppi [2:1], recidendo ancora dal tutto le parti e ponendole intermedie fra questi, in modo che in ciascun intervallo ci fossero due medi, e l'uno superasse un estremo e fosse superato dall'altro della medesima frazione, e l'altro superasse e fosse superato della stessa quantità numerica. Riempì…

Platone, *Timeo* 36 A-B

«Riempì completamente gli intervalli doppi [2:1], recidendo ancora dal tutto le parti e ponendole intermedie fra questi, in modo che in ciascun intervallo ci fossero due medi, e l'uno superasse un estremo e fosse superato dall'altro della medesima frazione, e l'altro superasse e fosse superato della stessa quantità numerica. Riempì…



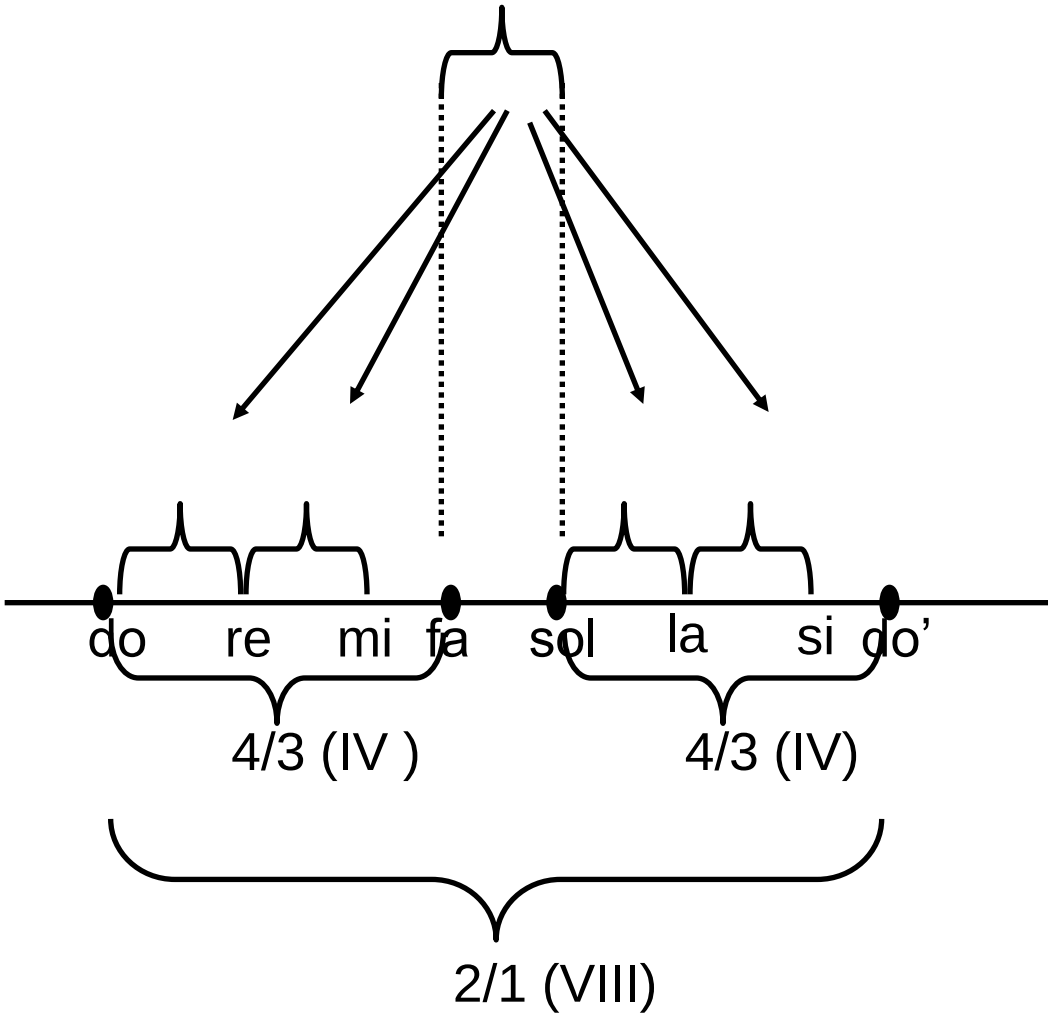
«Riempì con un intervallo di uno e un ottavo gli intervalli di uno e un terzo, lasciandone una parte di ciascuno di essi in modo che l'intervallo di questa parte lasciata, in rapporto di numero a numero, avesse i suoi termini come 256 in rapporto a 243.»



rapporto corrispondente al tono: 3/2 / 4/3 = 9/8

«Riempì con un intervallo di uno e un ottavo gli intervalli di uno e un terzo, lasciandone una parte di ciascuno di essi in modo che l'intervallo di questa parte lasciata, in rapporto di numero a numero, avesse i suoi termini come 256 in rapporto a 243.»

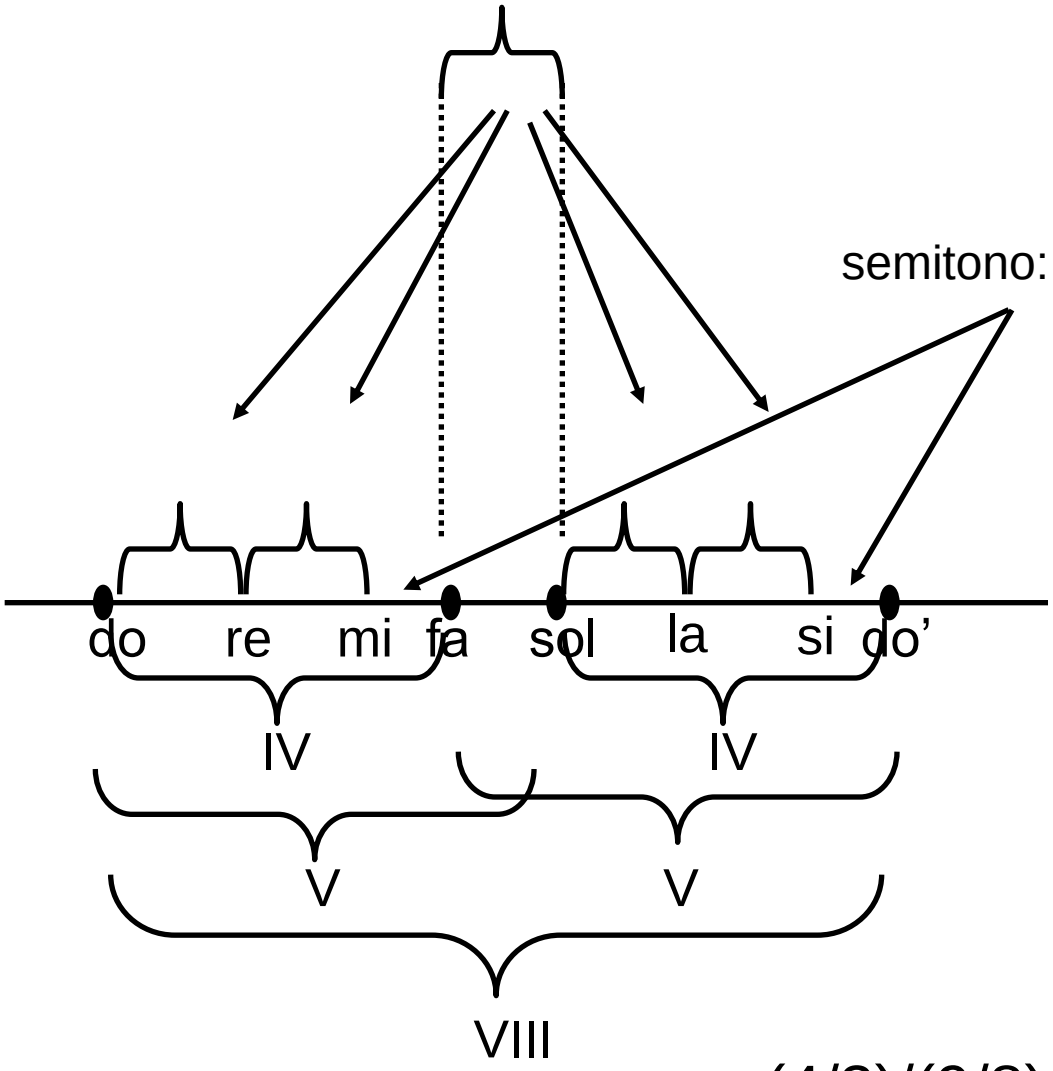
tono: quinta – quarta



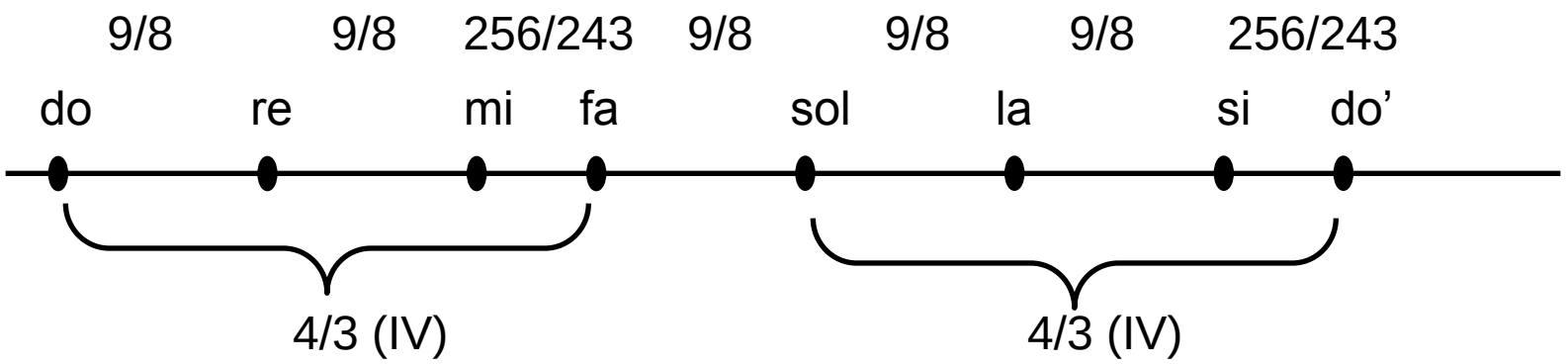
«Riempì con un intervallo di uno e un ottavo gli intervalli di uno e un terzo, lasciandone una parte di ciascuno di essi in modo che l'intervallo di questa parte lasciata, in rapporto di numero a numero, avesse i suoi termini come 256 in rapporto a 243.»

tono: quinta – quarta

semitono: quarta – tono – tono



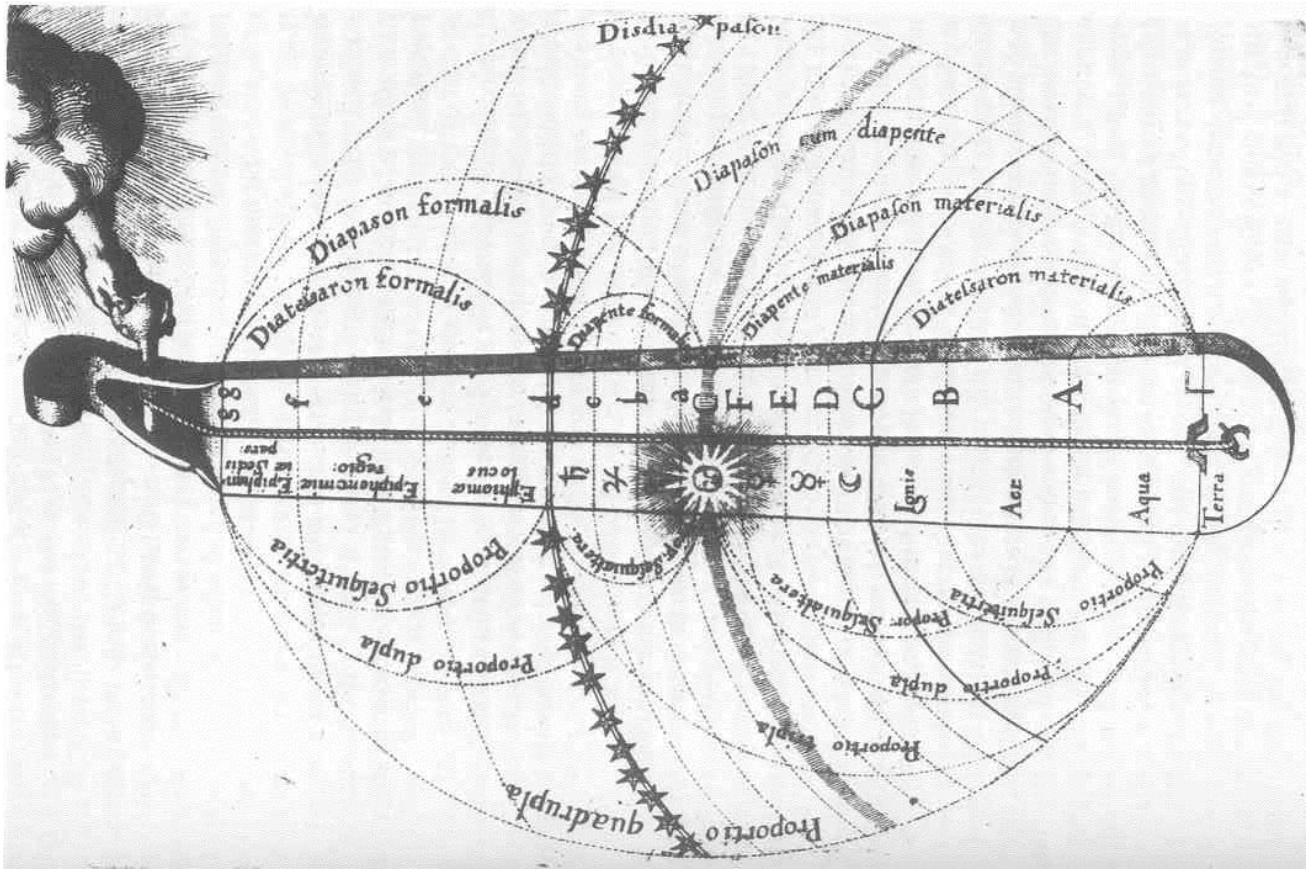
(4/3)/(9/8)/(9/8) = 256/243



Scala diatonica pitagorica

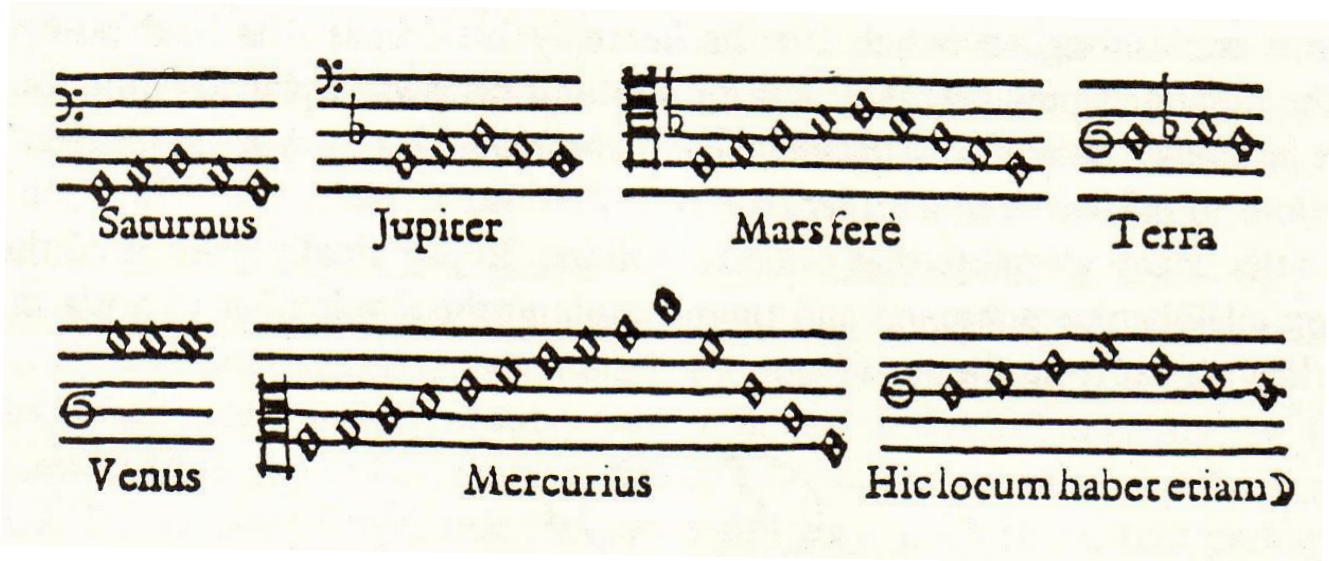
o

Scala del Timeo

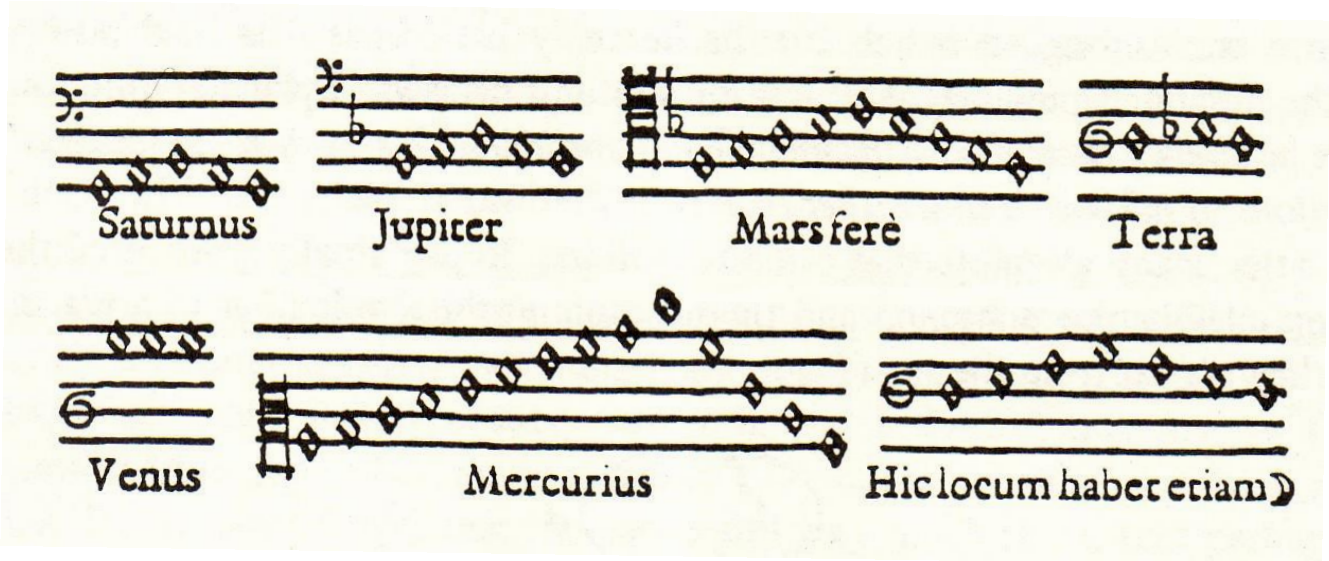

Disdiapason
Diapason cum diapente
Diapason formalis
Diapason materialis
Diatessaron formalis
Diapente formalis
Diapente materialis
Diatessaron materialis
Ignis
Aer
Aqua
Terra
Proportio quadrupla
Proportio dupla
Proportio Sesquitertia
Proportio Sesquialtera

«La stella del Sole dista dalla Terra tre toni e un semitono minore, intervallo detto *diapente*[quinta], mentre dalla Luna due toni e un semitono minore, intervallo detto *diatessaron* [quarta]. Dal Sole alla stella di Marte, chiamata *Pyrios*, c'è altrettanta distanza quanta dalla Terra alla Luna, e corrisponde a un tono.[…]»

Gaffurio, *Theorica Musice* (1492), I.2.



Keplero, *Misterium Cosmographicum*, 1618.



Keplero, *Misterium Cosmographicum*, 1618.

«L'affermazione che dal moto degli astri si generi armonia, in quanto i rumori da essi prodotti sarebbero consonanti, è una trovata graziosa e originale, ma non corrisponde al vero.»

Aristotele, *Il cielo,* II.9.

1) Peso delle due discipline.

2) Proprietà numeriche «evocative», soprattutto legate alle medie.

3) Platone e la *Scala del Timeo*

4) Il problema del semitono.

differenza di intervalli (V - IV = tono)

↓

quoziente dei corrispondenti rapporti (3/2 / 4/3 = 9/8)

———

ennesima parte di un intervallo (mezzo tono)

↓

radice ennesima del corrispondente rapporto ($\sqrt{9/8}$)

$$\sqrt{9/8} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Teorema di Archita: Tra due numeri che sono in rapporto *epimorio* ((*n*+1)/*n)* non è possibile inserire né uno né più medi proporzionali.

(per ogni *n* ed *m,* $\sqrt[m]{\frac{n+1}{n}}$ è irrazionale)

Euclide, *Sectio Canonis*, *Proposizione 16*: Il tono non è divisibile in due parti uguali.

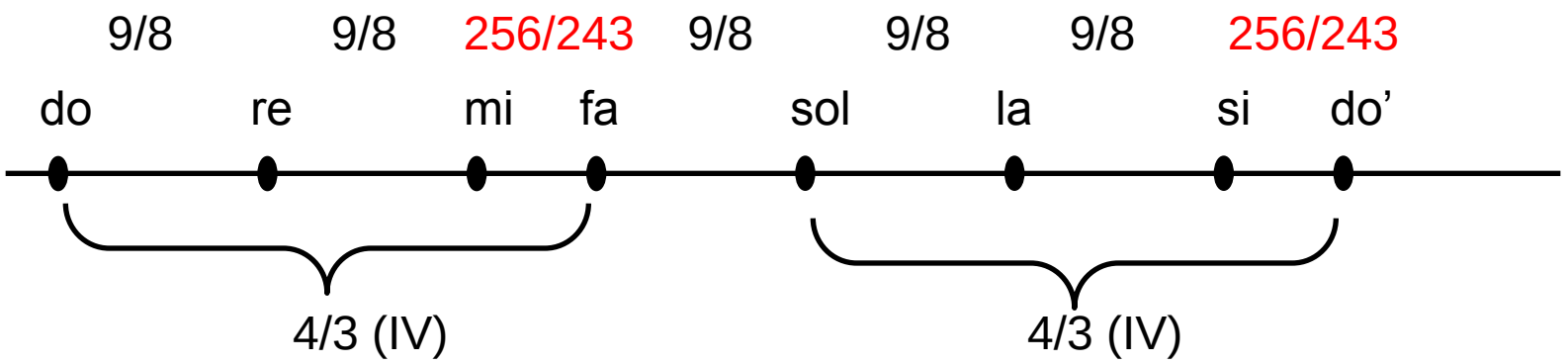
«Uno degli intervalli è quello chiamato tono, la cui misura esprime di quanto la quinta è maggiore della quarta. Gli Armonici ritengono di riuscire a dividerlo a metà e di farne due intervalli, che chiamano ambedue semitoni. Ma i Pitagorici riconobbero impossibile la divisione in due parti uguali.»

Plutarco. *Commento al Timeo*.

Il metodo per lo studio dell'armonia nella *Repubblica* di Platone.

Gli Empirici: «quei valorosi che non lasciano in pace le corde e le mettono continuamente alla tortura, tendendole sui piroli.»

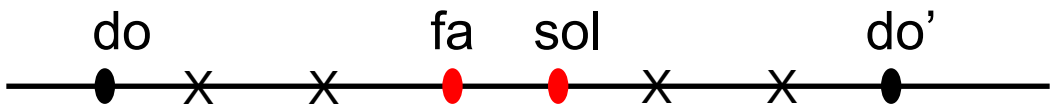
I Pitagorici: «quelli che nelle armonie che si colgono per via dei sensi cercano, certamente, la formula aritmetica però non risalgono ai veri problemi, e cioè non vanno a vedere quali siano i numeri armonici e quali no, e le ragioni per cui gli uni siano tali e gli altri no.»



Scala diatonica pitagorica

o

Scala del Timeo



$$\frac{n+1}{n} * \frac{m+1}{m} * \frac{t+1}{t} = \frac{4}{3}$$

5/4	24/23	46/45	Tolomeo enarmonico
5/4	28/27	36/35	Archita enarmonico
5/4	31/30	32/31	Didimo enarmonico
6/5	15/14	28/27	Tolomeo cromatico molle
6/5	16/15	25/24	Didimo cromatico
6/5	19/18	20/19	Eratostene cromatico
7/6	12/11	22/21	Tolomeo cromatico intenso
8/7	9/8	28/27	Archita diatonico
8/7	10/9	21/20	Tolomeo diatonico molle
9/8	10/9	16/15	Didimo diatonico
10/9	11/10	12/11	Tolomeo diatonico equabile

«Non posso, a questo punto, dissimulare l'errore di Brienno il quale, troppo avventatamente, afferma che solo quindici tra i rapporti epimori sono tali che il prodotto di tre di loro risulti 4/3. Possiamo provare facilmente il contrario. Infatti dal rapporto 256/255 otteniamo i numeri 256, 255, 240, 192, da cui seguono i rapporti epimori 256/255, 17/16 e 5/4 il cui prodotto è 4/3. Ma possiamo trovare anche altri rapporti che non sono tra quelli da lui elencati.»

Fermat, *Notes critiques sur les Harmoniques de Manuel Bryenne.*

1) Peso delle due discipline.

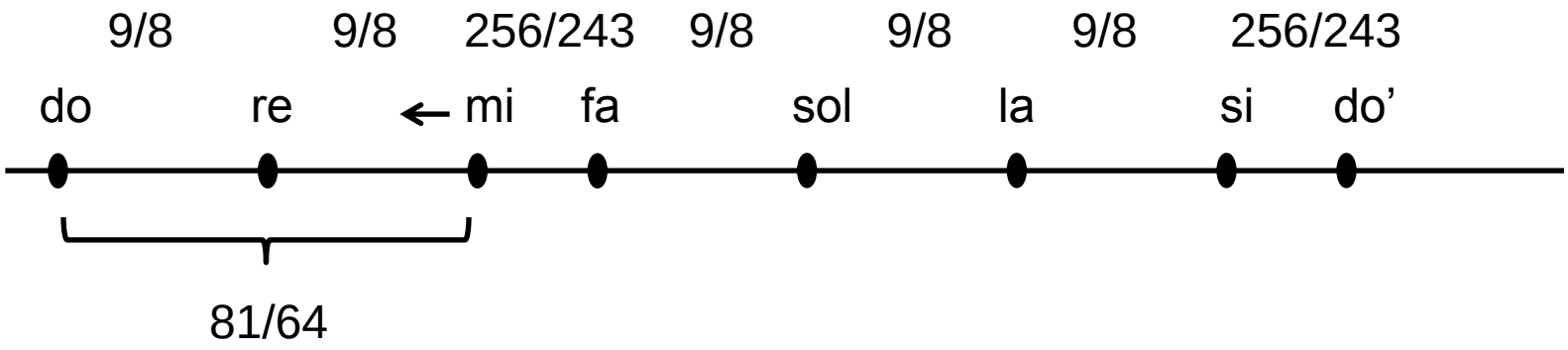
2) Proprietà numeriche «evocative», soprattutto legate alle medie.

3) Platone e la *Scala del Timeo.*

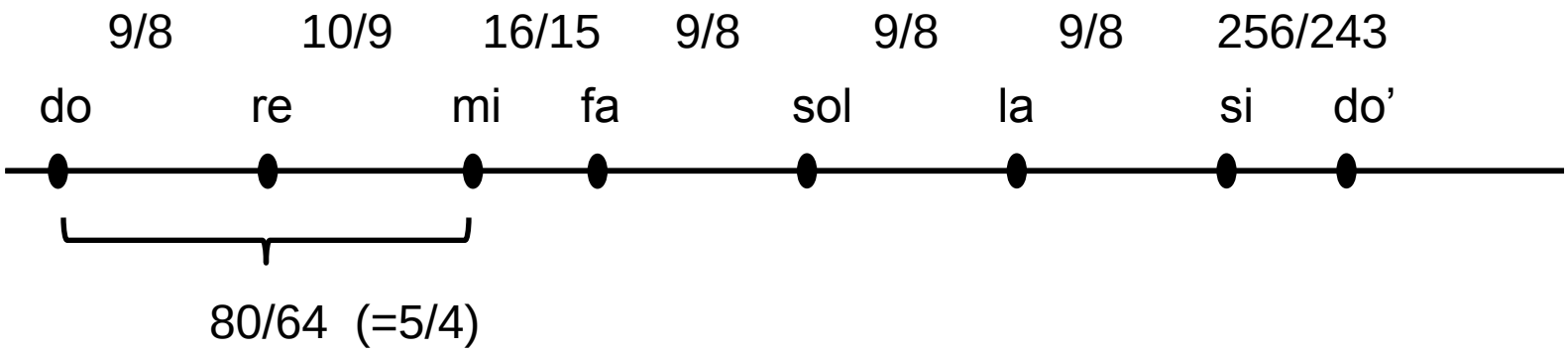
4) Il problema del semitono.

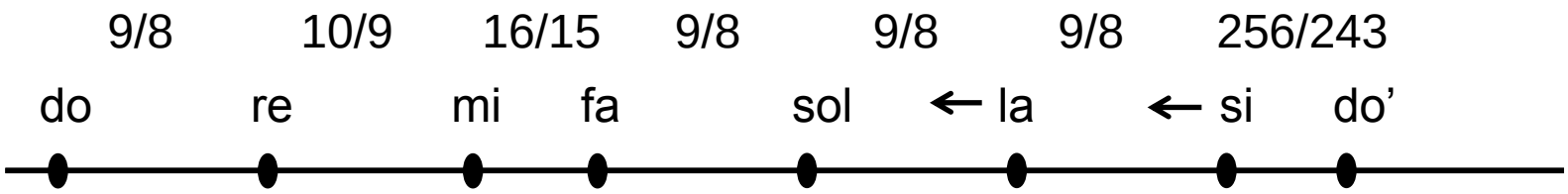
5) Il problema delle terze.

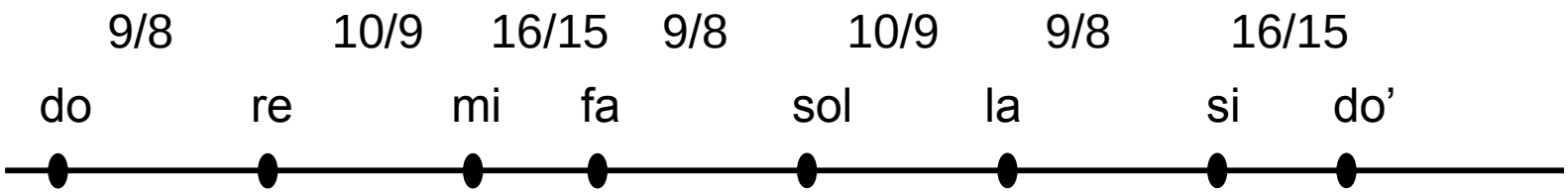
Problema sonoro, emerso intorno al XIII secolo



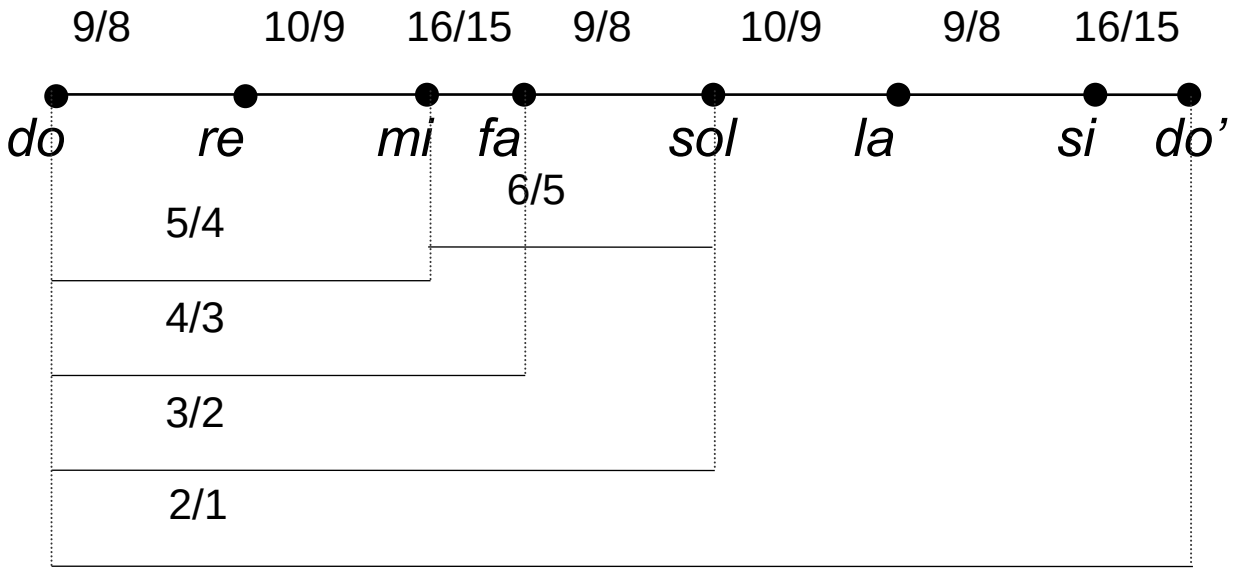
Rapporto «giusto»: 5/4 (= 80/64)


9/8
10/9
16/15
9/8
9/8
9/8
256/243
do
re
mi
fa
sol
la
si
do’
80/64 (=5/4)


9/8
10/9
16/15
9/8
9/8
9/8
256/243
do
re
mi
fa
sol
la
si
do’


9/8
10/9
16/15
9/8
10/9
9/8
16/15
do
re
mi
fa
sol
la
si
do’

Scala naturale (Scala giusta, Scala di Zarlino)



1) Peso delle due discipline.

2) Proprietà numeriche «evocative», soprattutto legate alle medie.

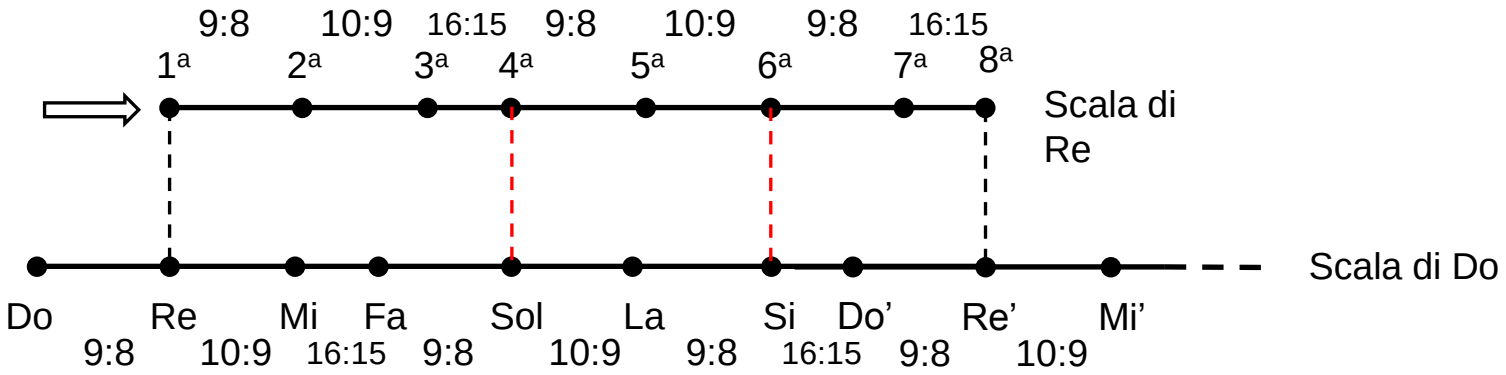
3) Platone e la *Scala del Timeo.*

4) Il problema del semitono.

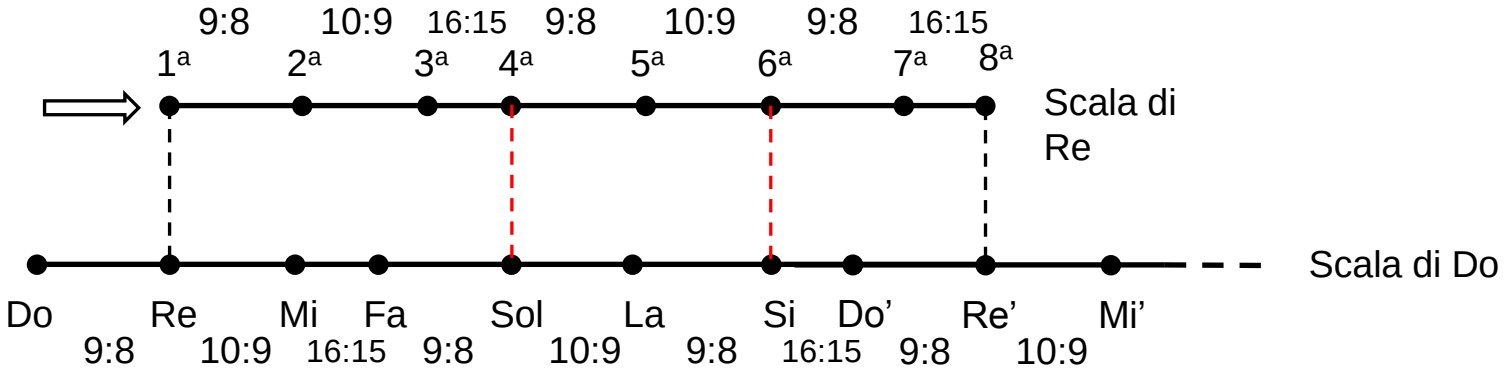
5) Il problema delle terze.

6) Il problema della modulazione.

Modulazioni (traslazioni)



Modulazioni (traslazioni)

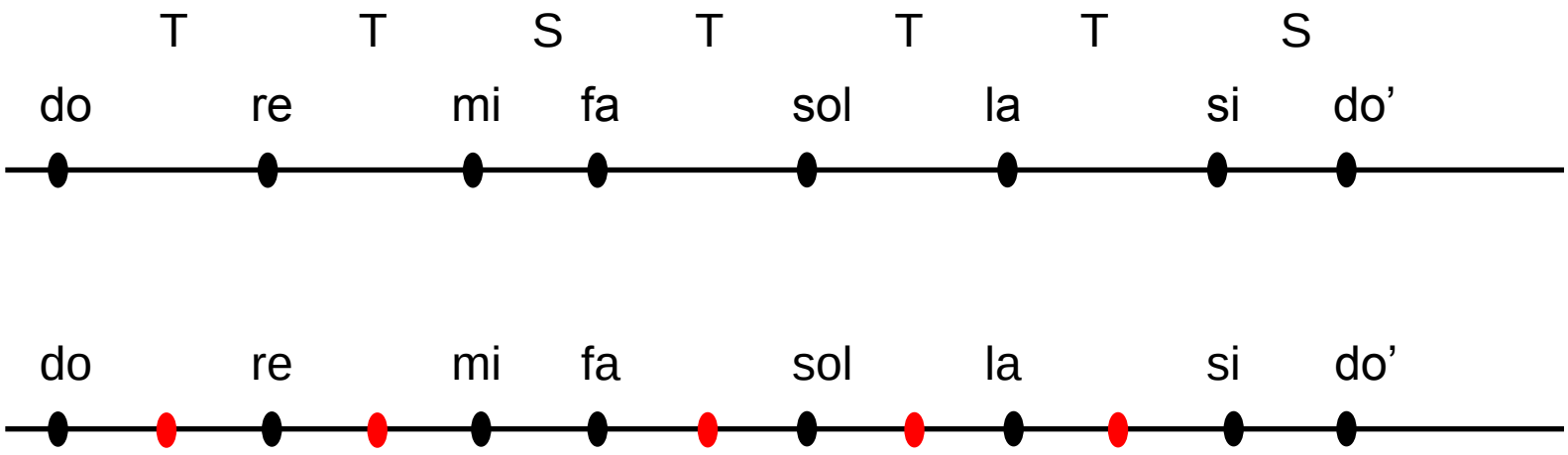


Per ottenere la stessa successione intervallare partendo da ogni nota (anche da quelle aggiunte), il numero di note per ottava deve essere infinito.

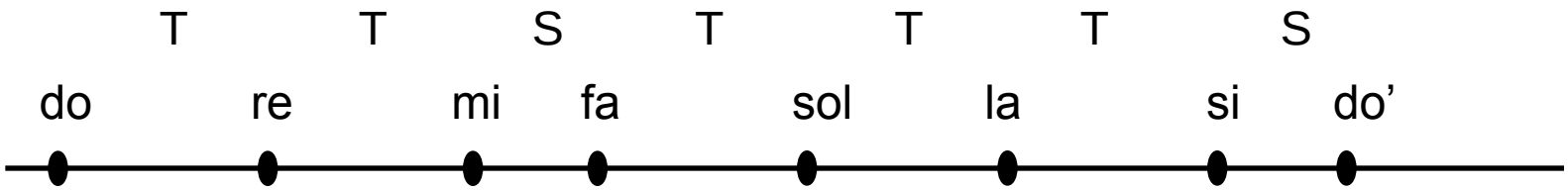
$\left(\frac{3}{2}\right)^n \neq 2^m$ per ogni *n* ed *m*.

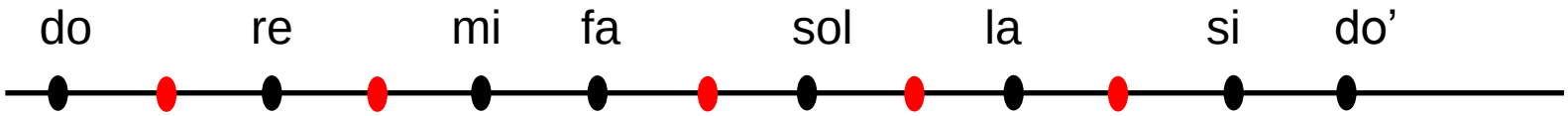
Le due vie possibili.

A: accettare il *temperamento* (piccole stonature per contenere a cinque note il numero delle note aggiunte).



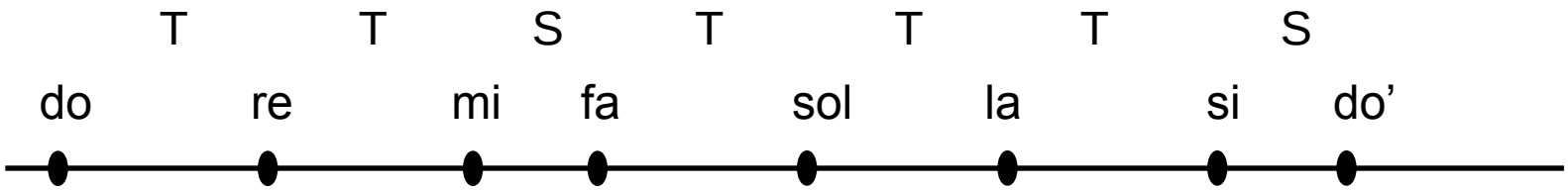
	valori pitagorici		valori giusti		valori temperati
do	1		1		1
re	1,125	(9/8)	1,125	(9/8)	1,122..
mi	1,2656	(81/64)	1,25	(5/4)	1,260..
fa	$1,\overline{3}$	(4/3)	$1,\overline{3}$	(4/3)	1,335..
sol	1,5	(3/2)	1,5	(3/2)	1,498..
la	1,6875	(27/16)	$1,\overline{6}$	(5/3)	1,689..
si	1,898	(243/128)	1,875	(15/8)	1,887..
do’	2	(2/1)	2	(2/1)	2

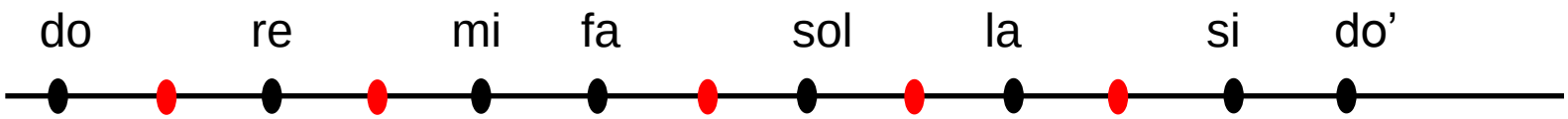


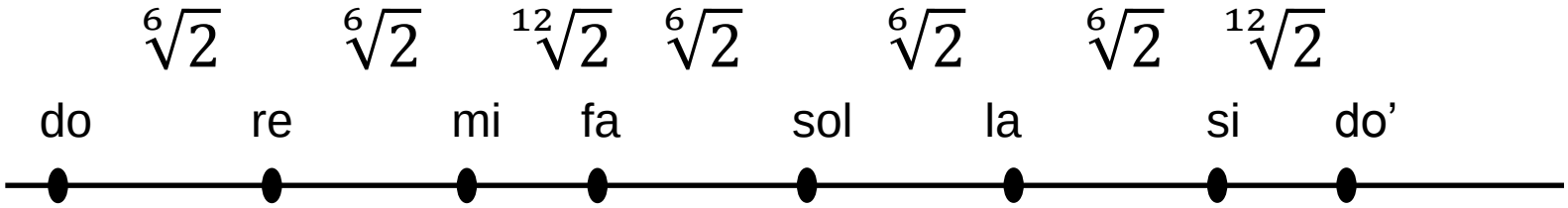


Aristosseno (IV sec. A.C.)

Vincenzo Galilei (1520-1591)





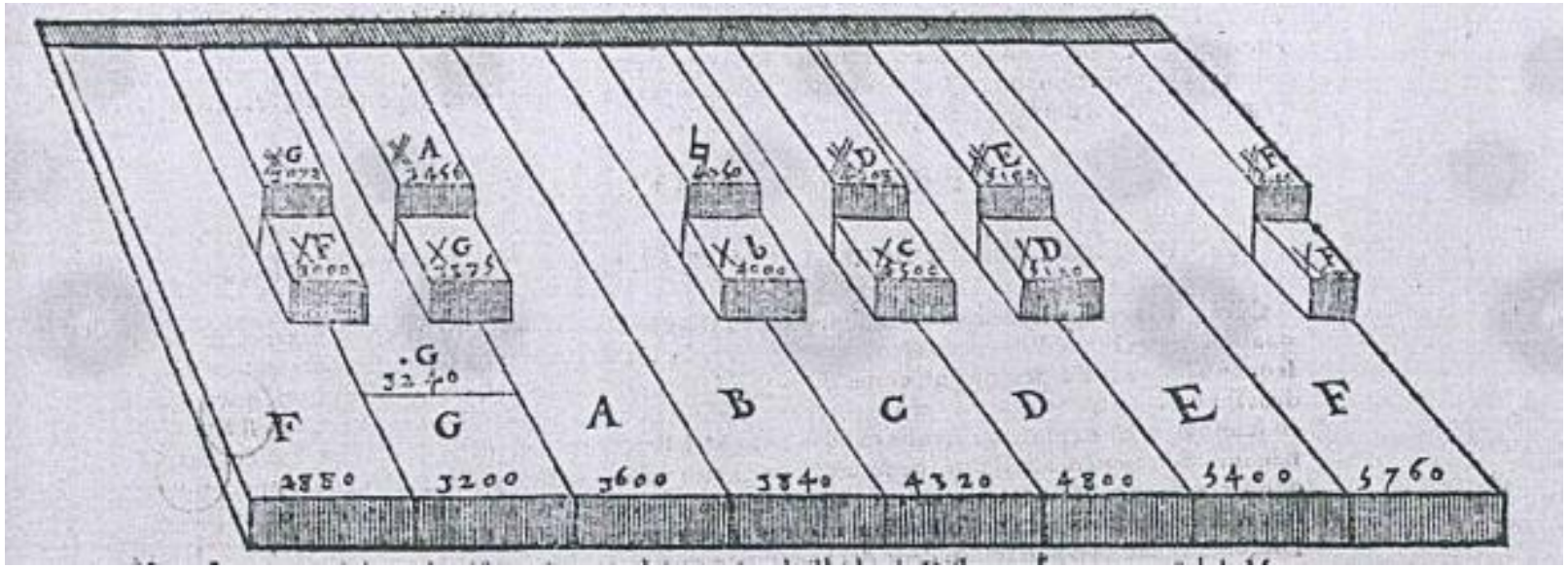


(Teorema di Archita)

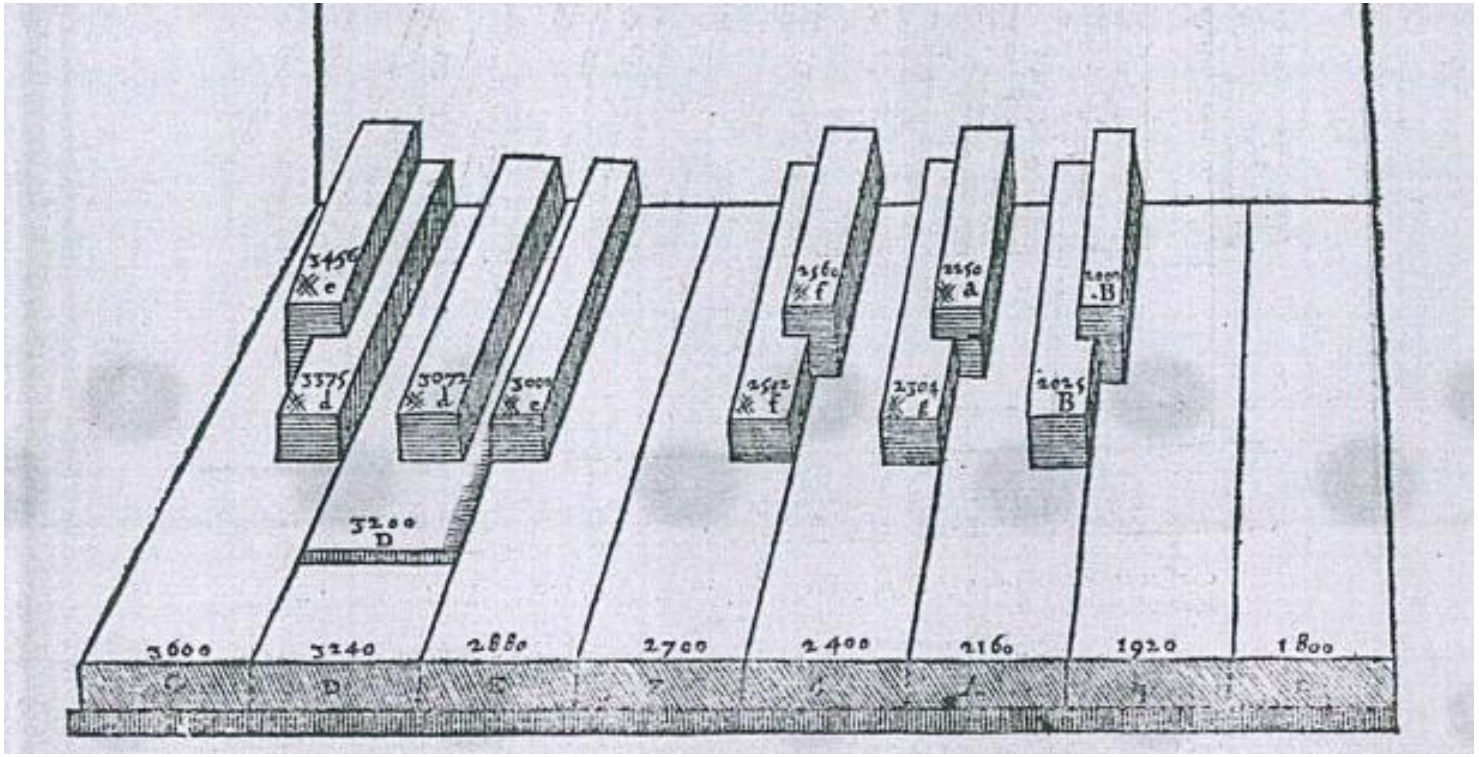
Le due vie possibili.

A: accettare il *temperamento* (piccole stonature per contenere a cinque note il numero delle note aggiunte).

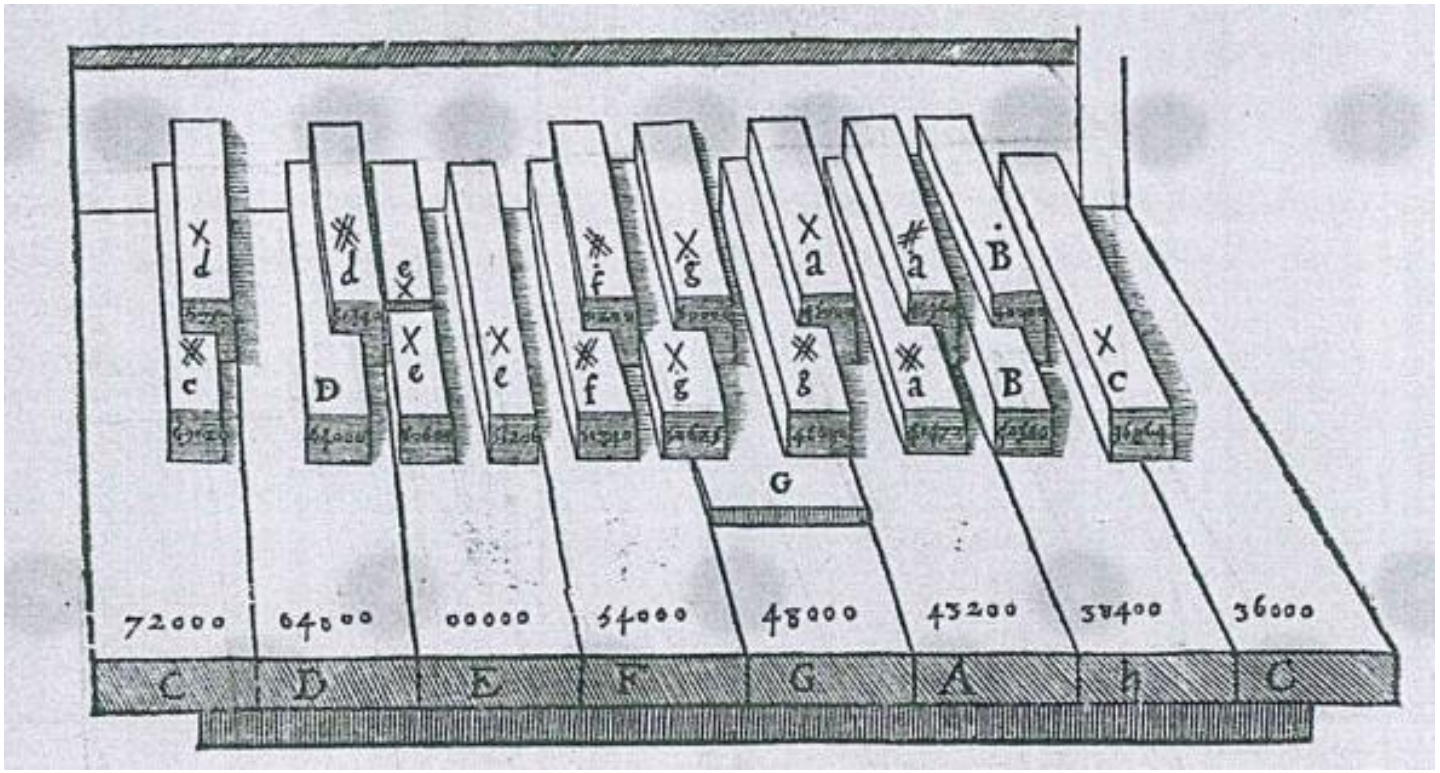
B: aumentare il numero di tasti in modo da avere *alcune* tonalità buone.



18 note (Mersenne, *Harmonie Universelle*, 1636)



18 note (Mersenne, *Harmonie Universelle*, 1636)



26 note (Mersenne, *Harmonie Universelle*, 1636)

Generis exponens $2^m \cdot 3^7 \cdot 5^2$.

Sig	Soni.	Log. Sonor.	Intervalla.	Nomina Intervallorum.
F	2^{23}	15, 00000		
Fs	$2^4 \cdot 3^1 \cdot 5$	15, 07682	0, 07682	Limma minus.
Fs*	$2^4 \cdot 3^7$	15, 09475	0, 01792	Comma.
G*	$2 \cdot 3^6 \cdot 5^2$	15, 15363	0, 05888	Hemitonium minus
G	$2^{13} \cdot 3^2$	15, 16993	0, 01628	Diaſchisma.
Gs	$2^9 \cdot 3 \cdot 5^2$	15, 22882	0, 05888	Hemitonium minus.
Gs*	$2^2 \cdot 3^5 \cdot 5$	15, 24675	0, 01792	Comma.
A	$2^{17} \cdot 5$	15, 32193	0, 07517	Hemit. minus cum diaſchiſ.
A*	$2^9 \cdot 3^4$	15, 33986	0, 01792	Comma.
B	$2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^2$	15, 39874	0, 05888	Hemitonium minus.
B*	$2^1 \cdot 3^4 \cdot 5$	15, 41668	0, 01792	Comma.
H	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5$	15, 49185	0, 07517	Hemit. minus cum diaſchiſ.
H*	$2^6 \cdot 3^6$	15, 50978	0, 01792	Comma
c*	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	15, 56867	0, 05888	Hemitonium minus.
c	$2^{14} \cdot 3$	15, 58496	0, 01628	Diaſchisma.
cs	$2^{11} \cdot 5^2$	15, 64385	0, 05888	Hemitonium minus.
cs*	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	15, 66178	0, 01792	Comma.
d*	$3^7 \cdot 5^2$	15, 73860	0, 07681	Limma minus.
d	$2^{11} \cdot 5^1$	15, 75489	0, 01628	Diaſchisma.
ds	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	15, 81377	0, 05888	Hemitonium minus.
ds*	$2^4 \cdot 3^6 \cdot 5$	15, 83171	0, 01792	Comma
e	$2^{21} \cdot 3 \cdot 5$	15, 90689	0, 07517	Hemit. minus cum diaſchiſ.
e*	$2^9 \cdot 3^5$	15, 92482	0, 01792	Comma.
f*	$2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2$	15, 98371	0, 05888	Hemitonium minus.
f	2^{16}	16, 00000	0, 01628	Diaſchisma.

$2^m \cdot 3^7 \cdot 5^2$

24 note

Eulero, *Tentamen novae theoriae musicae*, 1739.