Sommare veramente tanti addendi.
Ma come ti viene in mente?

Paola Palestini

Liceo scientifico «B. Rosetti»

San Benedetto del Tronto

Titolo: Sommare veramente tanti addendi. Ma come ti viene in mente?

descrizione: laboratorio didattico incentrato sulla dimostrazione non semplicemente 'raccontata' dall'insegnante e 'ripetuta' dagli allievi, bensì scoperta, costruita e spiegata dagli studenti con l'aiuto dell'insegnante.

ambito: aritmetica

destinatari: alunni classe I*

* sono specificate le attività da non svolgere con gli alunni delle classi prime

PERCHÈ L’AMBITO ARITMETICO?

- Per proporre un contesto applicativo diverso da quello solitamente privilegiato, almeno inizialmente, della geometria sintetica.

- Per proporre un approccio più graduale alla dimostrazione di quello che si può avere in geometria sintetica (distrattori: il disegno, la misura, il grande numero di proposizioni assunte a fondamento della teoria...).

- Perché l'aritmetica è la parte della matematica con cui i ragazzi entrano prima in contatto a scuola ed è allo stesso tempo uno dei campi della matematica più suggestivi e più allettanti per attività di tipo esplorativo, non solo a livello didattico.

- Perché la produzione e validazione di congetture in ambiente aritmetico può essere un ottimo strumento per avviare all'uso del linguaggio algebrico e far diventare il calcolo letterale uno strumento di pensiero.

- Perché permette la riflessione sui concetti di congettura, di verità di una proposizione, di dimostrazione, di verifica.

LA NECESSITÀ DEL SAPER METTERE IN FORMULA

«È necessario pertanto sviluppare una sorta di pensiero anticipatorio che consenta allo studente di mettere in formula in modo opportuno e solo quando ciò sia conveniente. Il calcolo letterale non dovrebbe quindi essere sviluppato con attività manipolatorie fini a se stesse, ma dovrebbe essere introdotto gradualmente, solo dopo una pesante attività di verbalizzazione, sentito quasi come un'esigenza da parte degli studenti, uno strumento che consente di condensare il pensiero senza che a seguito di questa condensazione vi sia un'evaporazione del significato».

[Domingo Paola & Ornella Robutti: 2001, 'La dimostrazione alla prova', Matematica e aspetti didattici, Quaderni del MPI, n.45].

Attività preliminare

Attività 1: Somma dei primi n numeri naturali

Attività 2: Somma dei primi n numeri pari e dei primi n numeri dispari

Attività 3: Somma dei primi n numeri triangolari

Attività 4: Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali

Attività 5: Somma dei cubi dei primi n numeri naturali

Attività preliminare

introduzione al laboratorio

Attività 1 per gruppi
e postazioni

Attività 1
discussione di bilancio

Attività 1
validazione risultati

Attività 2

...

Fase di esplorazione e
produzione di congetture

Fase collettiva di presentazione e
condivisione dei risultati trovati

ruolo del docente

- Nella fase di lavoro di gruppo preferibilmente svolge il ruolo di **osservatore non partecipante**.

- Nella fase di lavoro di gruppo svolge talvolta il ruolo dell'**osservatore partecipante**, quando ciò è necessario per far superare situazioni di 'impasse' (suggerisce, indica strategie e stimola riflessioni).

- Nella fase collettiva di discussione di bilancio **orchestra l'interazione dei vari gruppi**.

Attività preliminare

Che cosa puoi dire della somma di due numeri pari?

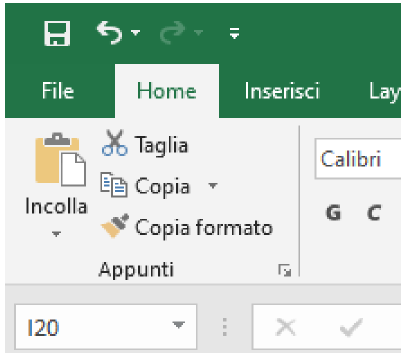
fase di elaborazione di congetture

Che cosa puoi dire della somma di due numeri dispari?

I numeri generati dalla formula $n^2 - n + 41$ sono tutti primi?

La fase di esplorazione della formula e confutazione di congetture svolta dagli studenti con l'ausilio del foglio di calcolo, del sito numberempire e di WxMaxima

$n^3 + 5n$ è divisibile per 6 per ogni n naturale?



	A	B	C
1		n^2-n+41	
2	1	41	
3	2	43	
4	3	47	
5	4	53	
6	5	61	
7	6	71	
8	7	83	
9	8	97	
10	9	113	
11	10	131	
12	11	151	
13	12	173	
14	13	197	
15	14	223	
16	15	251	
17	16	281	
18	17	313	
19	18	347	
20	19	383	
21	20	421	
22	21	461	
23	22	503	
24	23	547	
25	24	593	
26	25	641	
27	26	691	
28	27	743	
29	28	797	
30	29	853	
31	30	911	
32	31	971	
33	32	1033	
34	33	1097	
35	34	1163	
36	35	1231	
37	36	1301	
38	37	1373	
39	38	1447	
40	39	1523	
41	40	1601	
42	41	1681	
43	42	1763	

it.numberempire.com

Proprietà dei numeri

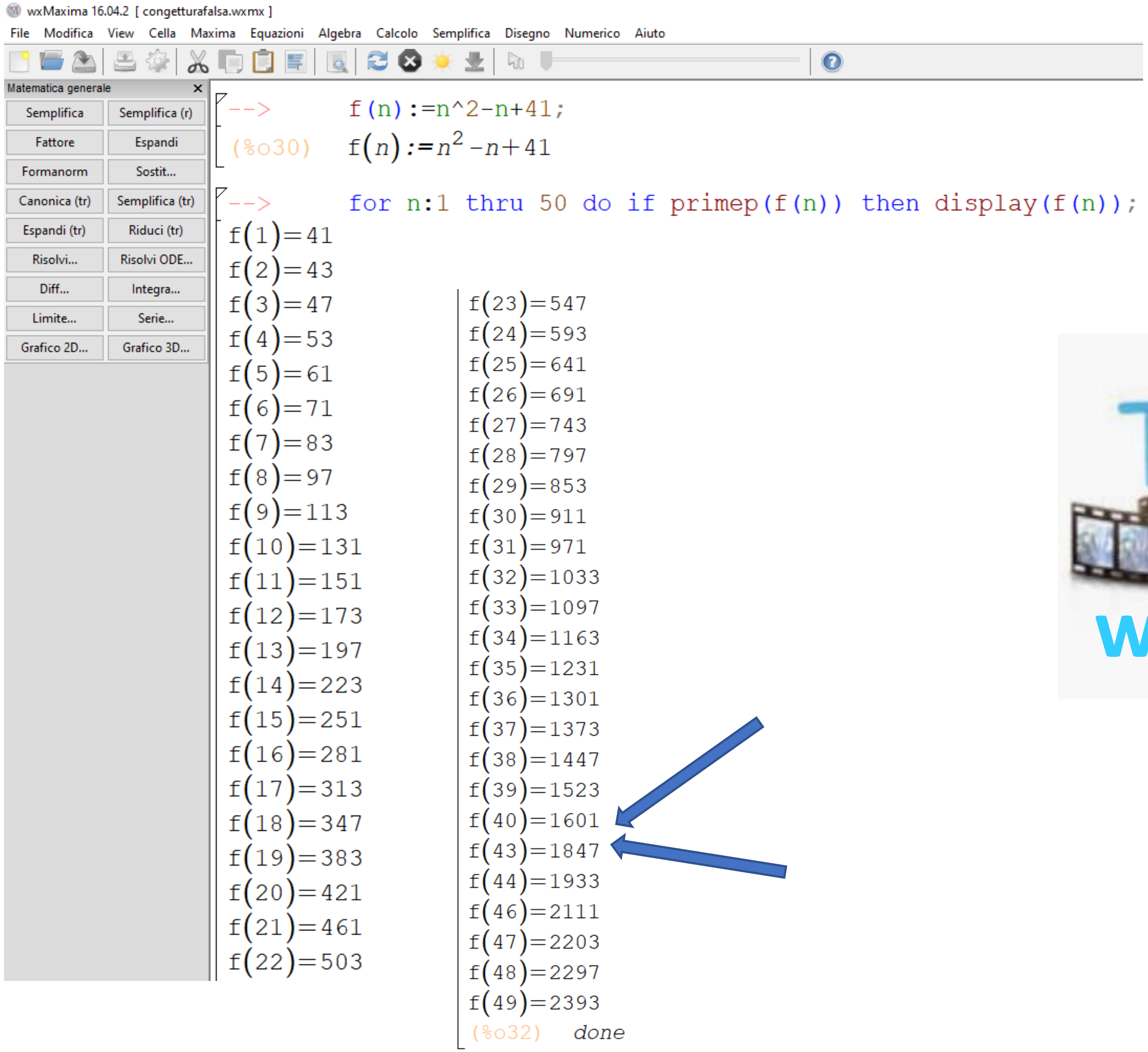
Inserire un numero intero | Cerca

Numero 1681

Proprietà del numero di 1681

Fattorizzazione	41 * 41
Divisori	1, 41, 1681
Numero di divisori	3
Somma dei divisori	1723
Intero precedente	1680
Intero successivo	1682
È primo?	NO
Precedente primo	1669
Successivo primo	1693
1681st primo	14327
È un numero di Fibonacci?	NO
È un numero di Bell?	NO
È un numero di Catalan?	NO
È un fattoriale?	NO
È un numero regolare?	NO
È un numero perfetto?	NO
Numero poligonale (s < 11)?	quadrato(41)
Binario	11010010001
Ottale	3221
Duodecimale	b81
Esadecimale	691
Quadrato	2825761
Radice quadrata	41

OpenOfficeCalc


wxMaxima 16.04.2 [congetturafalsa.wxmx]
File Modifica View Cella Maxima Equazioni Algebra Calcolo Semplifica Disegno Numerico Aiuto
Matematica generale
Semplifica
Semplifica (r)
Fattore
Espandi
Formanorm
Sostit...
Canonica (tr)
Semplifica (tr)
Espandi (tr)
Riduci (tr)
Risolvi...
Risolvi ODE...
Diff...
Integra...
Limite...
Serie...
Grafico 2D...
Grafico 3D...
--> f(n):=n^2-n+41;
(%o30) f(n):=n^2 -n+41
--> for n:1 thru 50 do if primep(f(n)) then display(f(n));
f(1)=41
f(2)=43
f(3)=47
f(4)=53
f(5)=61
f(6)=71
f(7)=83
f(8)=97
f(9)=113
f(10)=131
f(11)=151
f(12)=173
f(13)=197
f(14)=223
f(15)=251
f(16)=281
f(17)=313
f(18)=347
f(19)=383
f(20)=421
f(21)=461
f(22)=503
f(23)=547
f(24)=593
f(25)=641
f(26)=691
f(27)=743
f(28)=797
f(29)=853
f(30)=911
f(31)=971
f(32)=1033
f(33)=1097
f(34)=1163
f(35)=1231
f(36)=1301
f(37)=1373
f(38)=1447
f(39)=1523
f(40)=1601
f(43)=1847
f(44)=1933
f(46)=2111
f(47)=2203
f(48)=2297
f(49)=2393
(%o32) done


TUTORiAL
wxMaxima

wxMaxima

Attività preliminare

Che cosa puoi dire della somma di due numeri pari?

fase di elaborazione di congetture

Che cosa puoi dire della somma di due numeri dispari?

I numeri generati dalla formula $n^2 - n + 41$ sono <u>tutti</u> primi?

$n^3 + 5n$ è divisibile per 6 <u>per ogni</u> n naturale?

La fase di esplorazione della formula e confutazione di congetture svolta dagli studenti con l'ausilio del foglio di calcolo, del sito numberempire e di WxMaxima

INDUZIONE EMPIRICA

nelle scienze naturali

Passaggio da una particolare serie di osservazioni di un certo fenomeno alla formulazione di una legge generale che governa il verificarsi di questo fenomeno.
Il grado di certezza con cui la legge è in tal modo stabilita dipende dal numero delle singole osservazioni e delle conferme.

INDUZIONE

in matematica

- uno degli schemi fondamentali del ragionamento matematico
- permette di dimostrare che una certa proprietà vale per tutti i numeri naturali

la dimostrazione per induzione non indica affatto come si sia prima arrivati a trovare la proprietà da provare!

“È come la volpe, che cancella le sue tracce nella sabbia con la coda.”

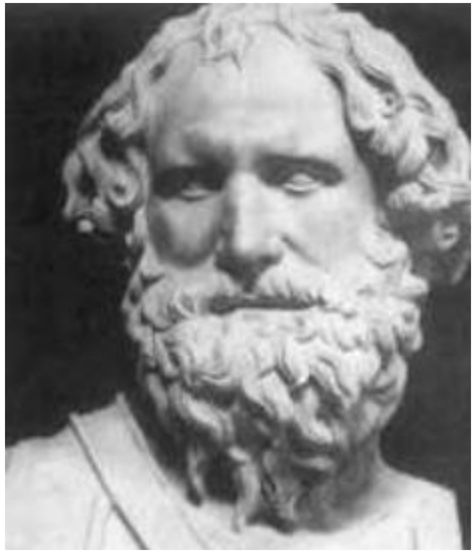
Carl Gustav Jacobi, riferendosi a Gauss

“Quando si costruisce un edificio elegante, le impalcature alla fine non devono essere più visibili”

Gauss

ARCHIMEDE ed ERATOSTENE

" [...] Infatti anche a me alcune cose si manifestarono prima per via meccanica [metodo euristico], e poi le dimostrai geometricamente; perché la ricerca fatta, con questo metodo non comporta una vera dimostrazione. Però è certamente più facile, dopo aver con tate metodo acquistato una certa cognizione delle questioni, trovarne la dimostrazione, anziché cercarla senza avere alcuna nozione preliminare.»



Introduzione della lettera in cui ARCHIMEDE espone i suoi metodi euristici

LE DIMOSTRAZIONI CHE CONVINCONO E QUELLE CHE ILLUMINANO

"Non vi è altro modo di acquisire naturalmente una conoscenza che traendola dall'idea o dalla definizione della cosa che si esamina. Quelle dimostrazioni da sole illuminano lo spirito, poiché quella che si utilizza per mostrare che non si può contestare ciò che si propone, o che non ne consegue una grande assurdità, quelle dimostrazioni, dico, convincono lo spirito, ma non lo illuminano"

(Barbin, 1988)

Questo laboratorio si propone

- di dare una indicazione esplicita delle fasi che caratterizzano l’attività dimostrativa:
  la intuizione-scoperta di proprietà,
  l’argomentazione
  la dimostrazione
  e di creare un ambiente di apprendimento che supporti gli studenti nel delicato passaggio tra esse;

- di guidare lo studente alla scoperta, alla produzione e alla successiva validazione di enunciati mediante un’attività che evidenzia l’aspetto creativo del matematico e lo allontana fin da subito dall’identificare l’attività dimostrativa alla ripetizione delle dimostrazioni fatte dall'insegnante o di dimostrazioni del tutto simili a quelle fatte dall’insegnante in classe.

fase dell'esplorazione

- usare approccio euristico

spiegazioni, giustificazioni, che guidano alla scoperta di certi risultati matematici e consentono di convincersi della loro validità.

- formulare congetture
- testare congetture

ciò che è stato fatto nel caso del polinomio $n^2 - n + 41$

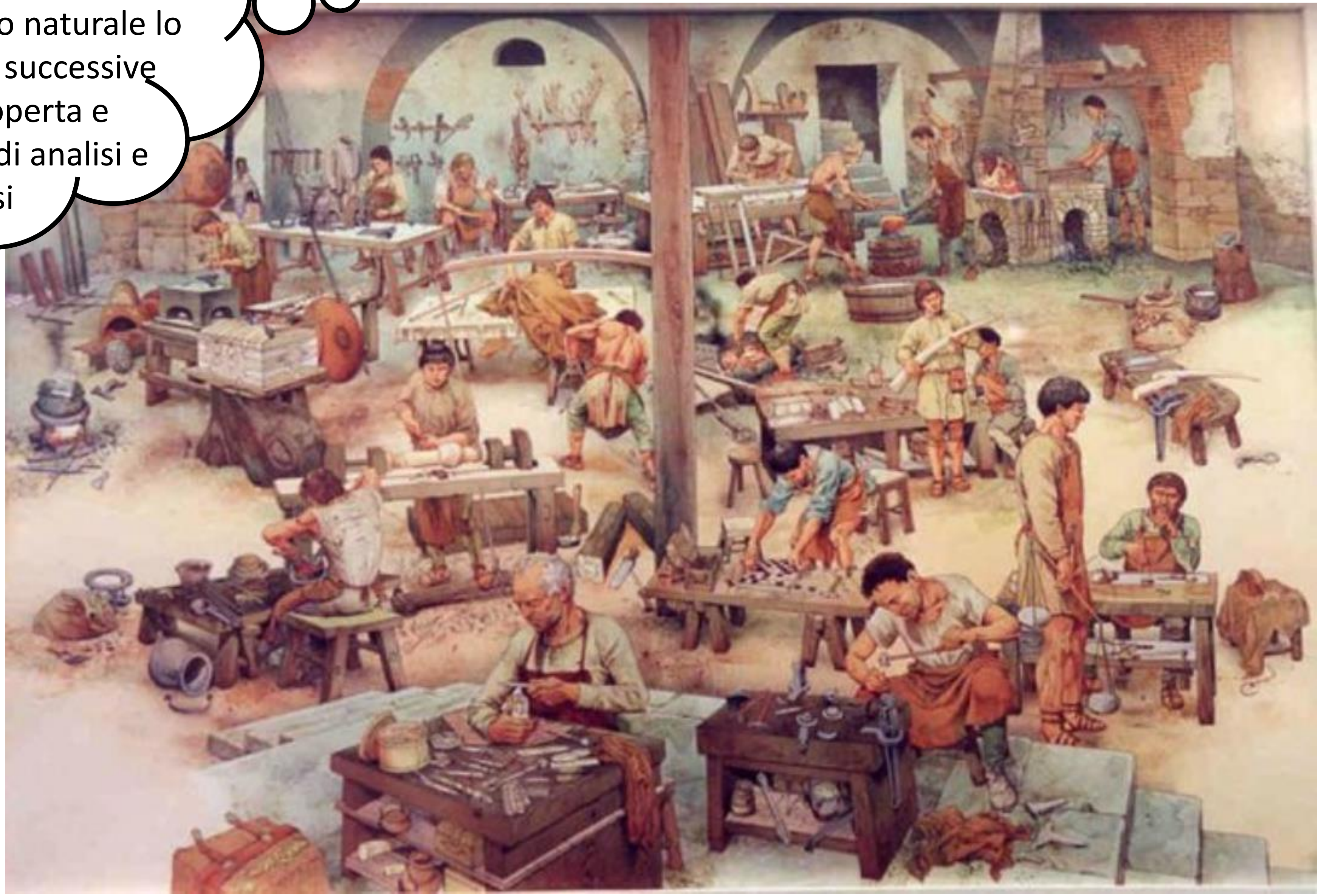
- refutare congetture (non valide) tramite controesempi
- dimostrare proprietà che sono state congetturate

fase di validazione e sistemazione rigorosa dei risultati

INDUZIONE

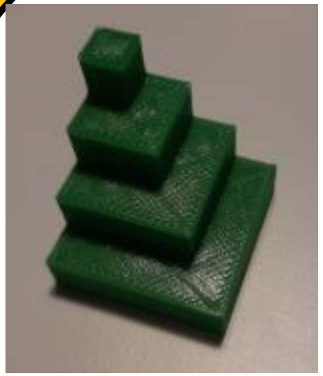
LA BOTTEGA DEL MATEMATICO

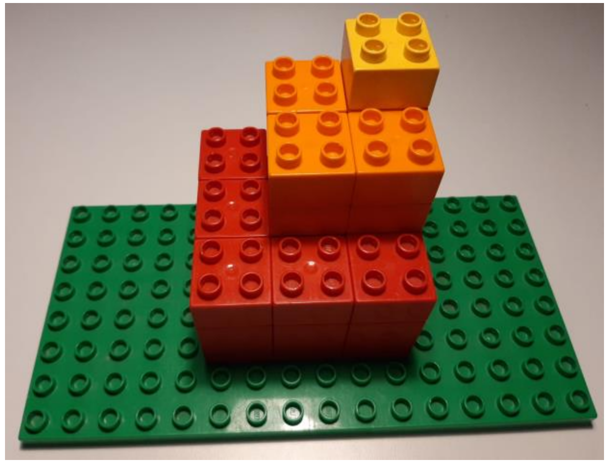
ambiente che orienta e supporta in modo naturale lo studente verso successive azioni di scoperta e sistemazione, di analisi e sintesi

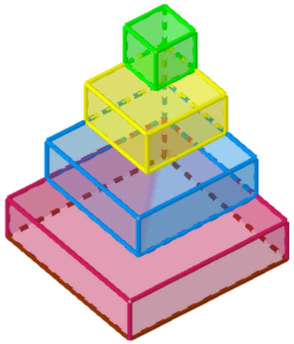


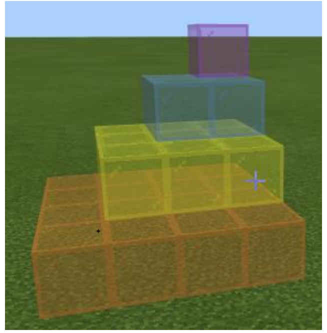
La bottega rinascimentale, spazio produttivo dove operano il maestro artigiano e gli apprendisti

LA BOTTEGA DEL MATEMATICO



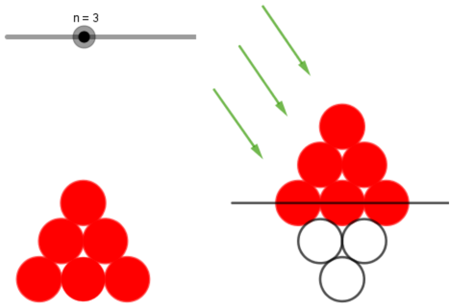






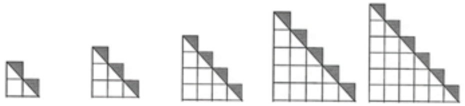
strumenti per esplorare, manipolare e congetturare

it.numberempire.com



wxMaxima

OpenOfficeCalc



						caso generale
lato	2					n
mezzo quadrato	$\frac{2^2}{2}$					
scala quadrata	$\frac{2^2}{2}+\frac{2}{2}$					

PERCHÈ PROPORRE PIÙ DI UN METODO PER ARRIVARE AD ELABORARE UNA CONGETTURA?

- Un metodo particolarmente illuminante per uno studente non è detto che lo sia per un altro.
- Ogni percorso non è una strada chiusa ma apre la mente alla ricerca di nuovi risultati. Si tratta di un investimento!
- Metodi diversi possono insegnare cose diverse.

IL RISCHIO DI DEMOTIVARE A DIMOSTRARE

La scoperta per strade diverse della validità di una proprietà o anche solo l'uso di Geogebra, OpenOfficeCalc o wxMaxima, che consentono di fare un numero di verifiche tale da dare l'illusione di poter considerare tutti i casi possibili, possono **demotivare gli studenti a dimostrare** quanto scoperto e osservato?

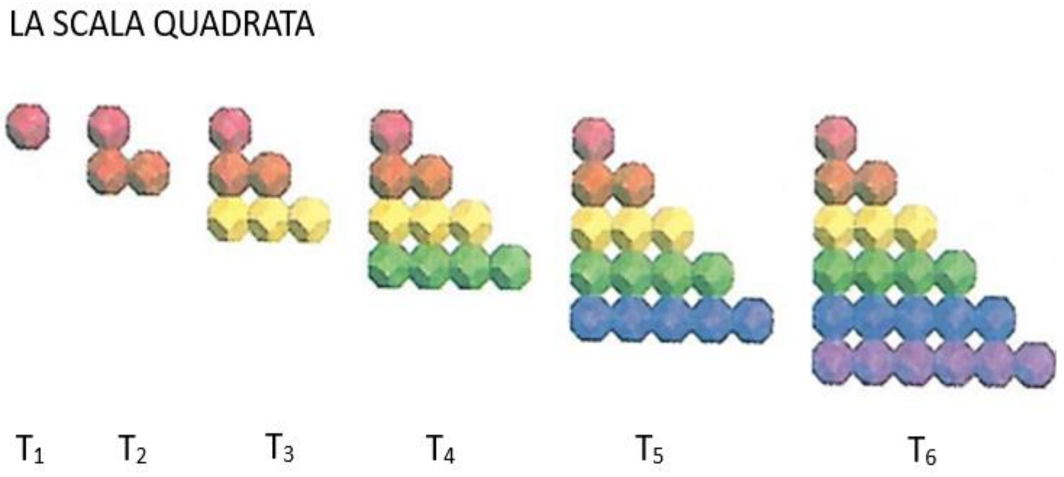
L'obiettivo è prima convincere per essere poi pronti e motivati a dimostrare.

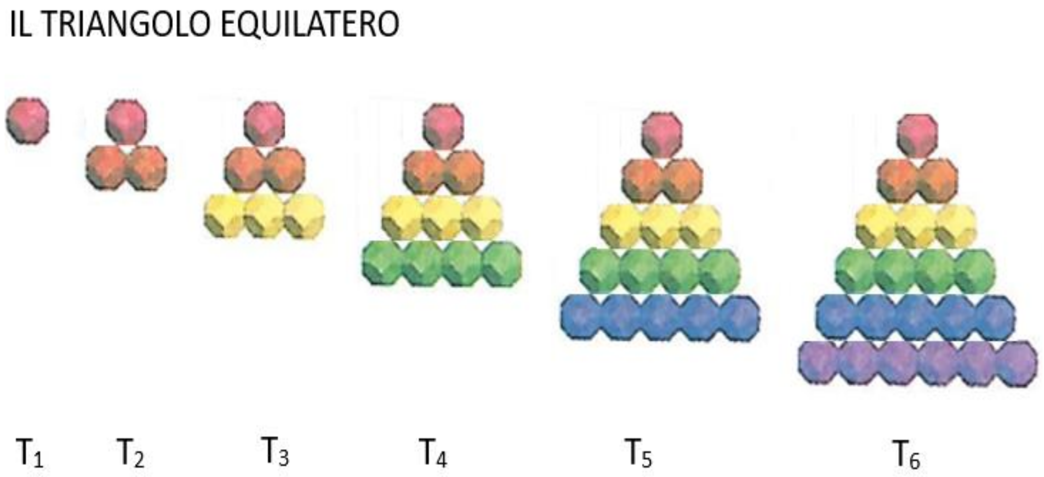
(Polya -1954)

obiettivo attività 1:

Somma dei primi n numeri naturali

Due possibili rappresentazioni dei numeri triangolari





$\mathbf{T_1}$ = 1 $\mathbf{T_2}$ = 1+2= 3 $\mathbf{T_3}$ = 3+3=6 $\mathbf{T_4}$ =6+4=10 $\mathbf{T_5}$ = 10+5=15 $\mathbf{T_6}$ = 15+6=21

e quindi si può congetturare che il generico numero triangolare T_n sia la rappresentazione della somma dei primi n numeri naturali.

Attività 1

Somma dei primi n numeri naturali

POSTAZIONE 1 – Da due «scale quadrate» uguali fra loro al «rettangolo»

POSTAZIONE 2 – Dal mezzo quadrato alla scala quadrata

POSTAZIONE 3 – Il «triangolo equilatero» specchiato

POSTAZIONE 4 – La somma con l’ordine degli addendi invertito

POSTAZIONE 5 – Il telescopio

POSTAZIONE 6 – La mazza da hockey

GRUPPI $\leq$ # POSTAZIONI

Attività 1 – postazione 1

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

DA DUE «SCALE QUADRATE» UGUALI FRA LORO AL «RETTANGOLO»

Nell'immagine a lato sono state disposte due scale quadrate, entrambe di lato 3, così da formare un rettangolo. Quanti sono i punti che costituiscono il rettangolo?

In modo analogo, utilizzando i modelli di scale quadrate che hai a disposizione, disponi due scale quadrate dello stesso lato così da formare un rettangolo (ad esempio di lato 2, 3 o 5). Quanti sono i punti che costituiscono il rettangolo?

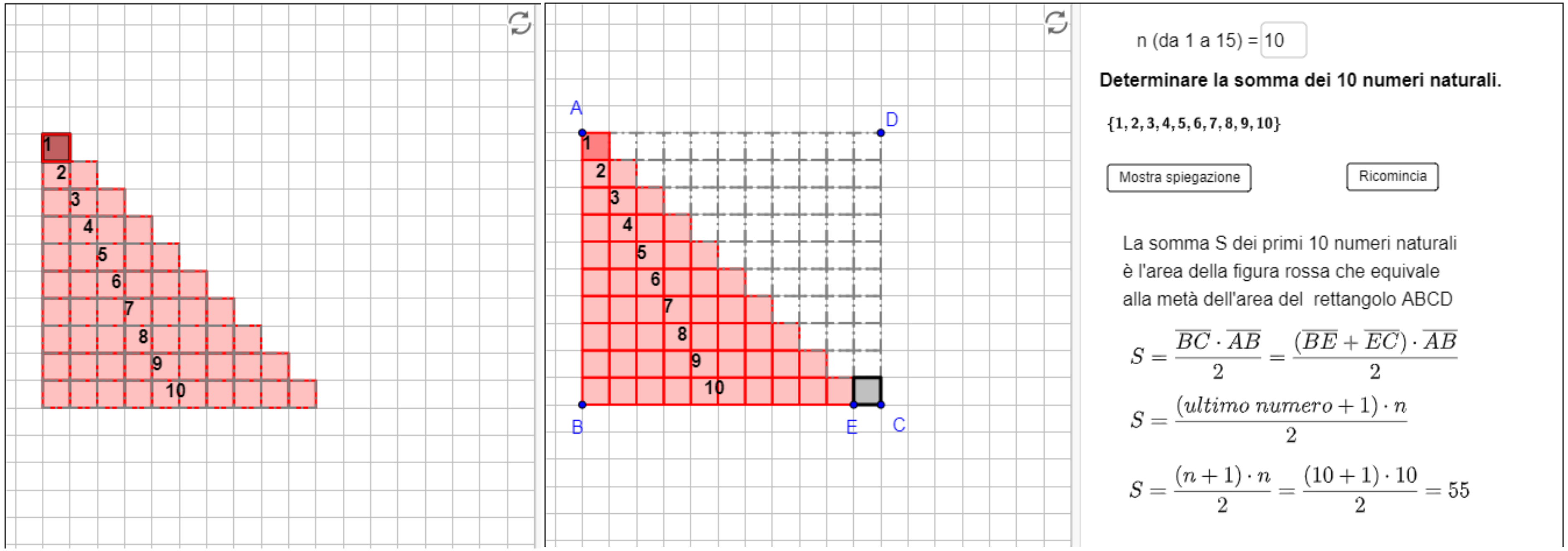
Supponi ora di disporre in modo analogo due scale quadrate entrambe di lato n.
Da quanti punti sono formati i lati del rettangolo ottenuto?
Quanti sono i punti che costituiscono il rettangolo?

Considerando infine che il rettangolo è costituito da due scale triangolari uguali, riesci a trovare la formula che permette di determinare l'espressione di T_n in funzione di n?

Attività 1 – postazione 1

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

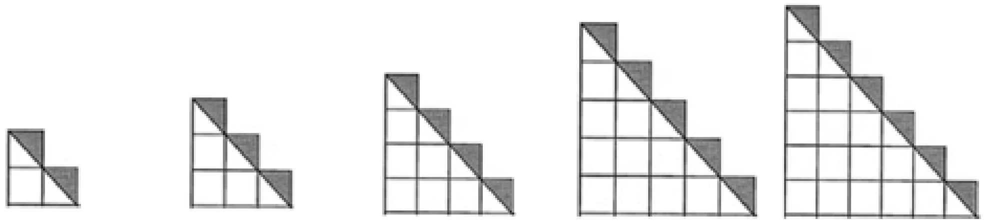
DA DUE «SCALE QUADRATE» UGUALI FRA LORO AL «RETTANGOLO»



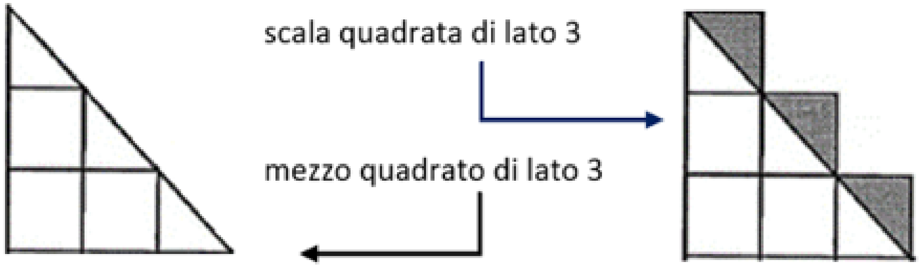
Attività 1 – postazione 2

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

DAL «MEZZO QUADRATO» ALLA «SCALA QUADRATA»



						caso generale
lato	2					n
mezzo quadrato	$\frac{2^2}{2}$					
scala quadrata	$\frac{2^2}{2}+\frac{2}{2}$					



Dal momento che una "scala quadrata" di lato n rappresenta il numero triangolare T_n e cioè la somma dei primi n numeri naturali

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n =$ ....

Attività 1 – postazione 3

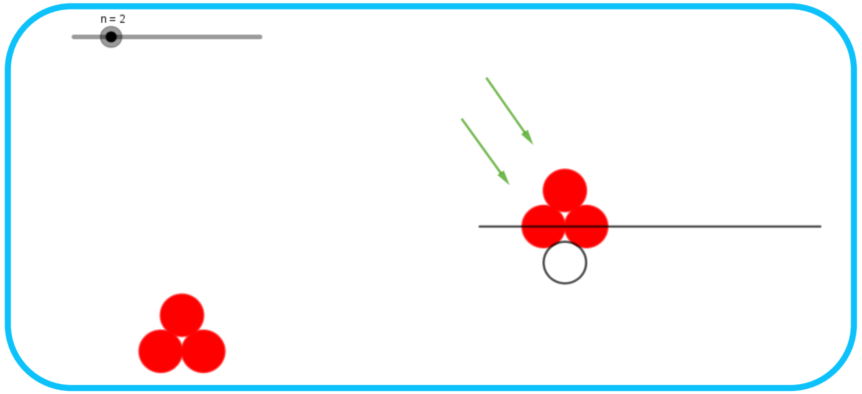
SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

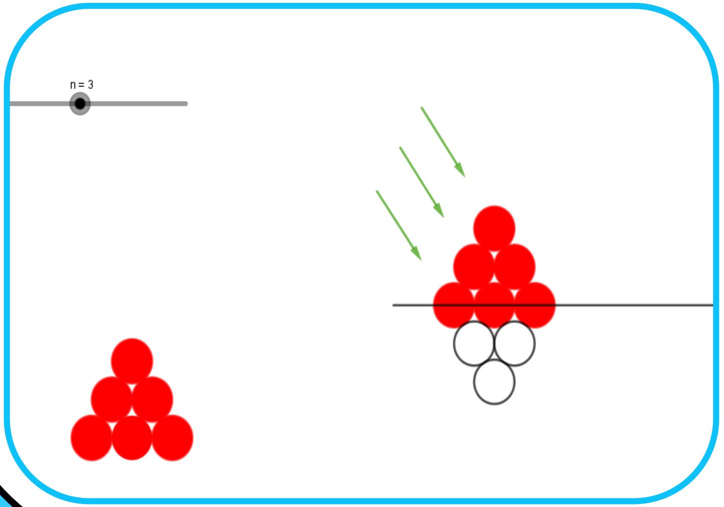
IL “TRIANGOLO EQUILATERO” SPECCHIATO

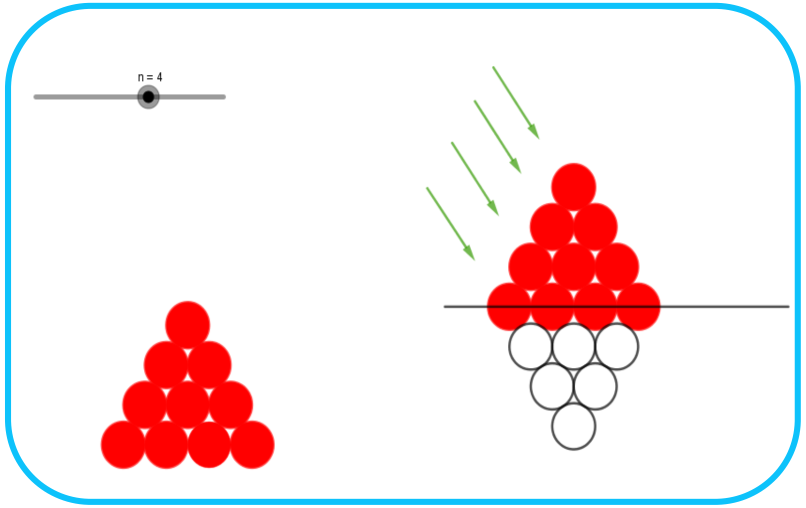
1) FAI ASSUMERE ALLO SLIDER I VALORI n=1, ...,6

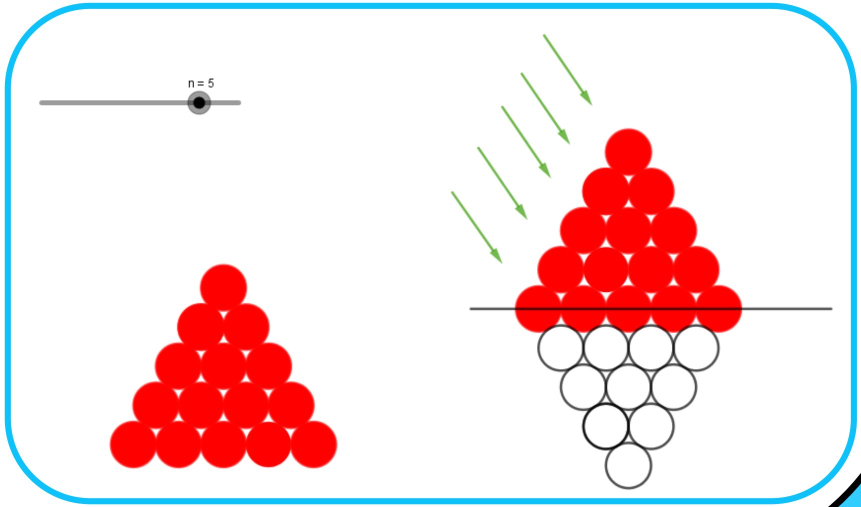
2) PER OGNI n=1, ...,6 TROVA QUANTI PUNTI CI SONO NELLA FIGURA DI DESTRA OSSERVANDO QUANTO VALE n E QUANTI CE NE SONO IN OGNUNA DELLE RIGHE INDICATE DALLE FRECCE VERDI

3) PER OGNI n=1, ...,6 TROVA QUANTI PUNTI CI SONO NELLA FIGURA DI SINISTRA OSSERVANDO QUANTO VALE n E QUANTI CE NE SONO NELLA FIGURA DI DESTRA DELLE RIGHE INDICATE DALLE FRECCE VERDI









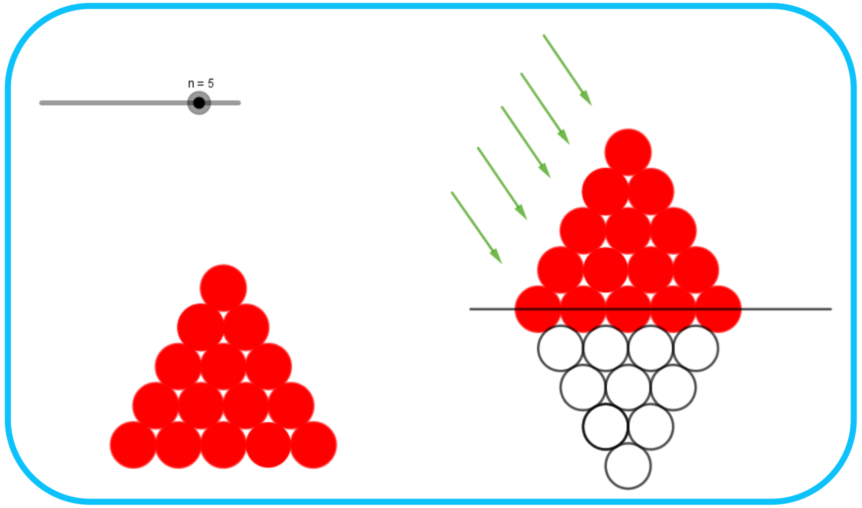
Attività 1 – postazione 3

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

IL “TRIANGOLO EQUILATERO” SPECCHIATO

GeoGebra

Dynamic Mathematics for Everyone



Attività 1 – postazione 4

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

LA SOMMA CON L'ORDINE DEGLI ADDENDI INVERTITO

Prova a determinare l'espressione della somma dei primi n naturali mediante la generalizzazione del procedimento per il calcolo della somma dei primi 100 numeri naturali, che è riportato qui sotto.

Il valore di $T_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 98 + 99 + 100$ non cambia se si scrive $T_{100} = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$ quindi, sommando verticalmente termine a termine gli addendi delle due righe qui sotto e dividendo il risultato per 2 si può determinare l'espressione di T_{100}.

$$
\begin{array}{lllllllll}
1 & +2 & +3 & + \ldots\ldots & +98 & +99 & +100 & & = T_{100} \\
100 & +99 & +98 & + \ldots & +3 & +2 & +1 & & = T_{100} \\
\hline
101 & +101 & +101 & + \ldots & +101 & +101 & +101 & & = 2\,T_{100}
\end{array}
$$

Quindi $2\,T_{100} = 101 \cdot 100$ da cui $T_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 98 + 99 + 100 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$

Attività 1 – postazione 4

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

LA SOMMA CON L'ORDINE DEGLI ADDENDI INVERTITO

Generalizza questo metodo per trovare la somma dei primi n numeri naturali completando solo dove ci sono i puntini rossi.

$$1 + 2 + 3 + \quad \ldots \quad + (n-2) \quad + (n-1) + n = T_n$$

$$\ldots \quad + \ldots + \ldots \quad + \quad \ldots \quad + \ldots \quad + \ldots \quad + \ldots \quad = T_n$$

____

$$\ldots \quad + \ldots + \ldots \quad + \quad \ldots \quad + \ldots \quad + \ldots \quad + \ldots \quad = \ldots\, T_n$$

Quindi $\ldots T_n = \ldots \cdot \ldots$ da cui $T_n = \dfrac{(\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots)}{2}$

Attività 1 – postazione 5

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

IL TELESCOPIO

Metti in campo ora alcune conoscenze di base di calcolo algebrico.

$$(i+1)^2 - i^2 = i^2 + 2i + 1 - i^2 = 2i + 1$$

Esplicita questa uguaglianza per i=1,2,3, …, n

$2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1$
$3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1$
$4^2 - 3^2 = 2 \cdot 3 + 1$
$5^2 - 4^2 = 2 \cdot 4 + 1$
…
$(n+1)^2 - n^2 = 2 \cdot n + 1$

Attività 1 – postazione 5

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

IL TELESCOPIO

Somma verticalmente membro a membro.
Sommando i primi membri avviene un fenomeno di cancellazione che diminuisce il numero degli addendi che è necessario considerare. Nell’immagine sotto segni dello stesso colore cancellano termini uguali. La somma a primo membro è detta telescopica perché si “accorcia” come un telescopio quando lo si chiude.

$$
\begin{array}{lcccl}
\cancel{2^2} & - & 1^2 & = & 2\cdot 1 + 1 \\
\cancel{3^2} & - & \cancel{2^2} & = & 2\cdot 2 + 1 \\
\cancel{4^2} & - & \cancel{3^2} & = & 2\cdot 3 + 1 \\
\cancel{5^2} & - & \cancel{4^2} & = & 2\cdot 4 + 1 \\
\ldots & & & & \\
(n+1)^2 & - & \cancel{n^2} & = & 2n+1 \\
\hline
(n+1)^2 & - & 1^2 & = & 2(\ldots + \cdots + \cdots + \cdots) + n
\end{array}
$$

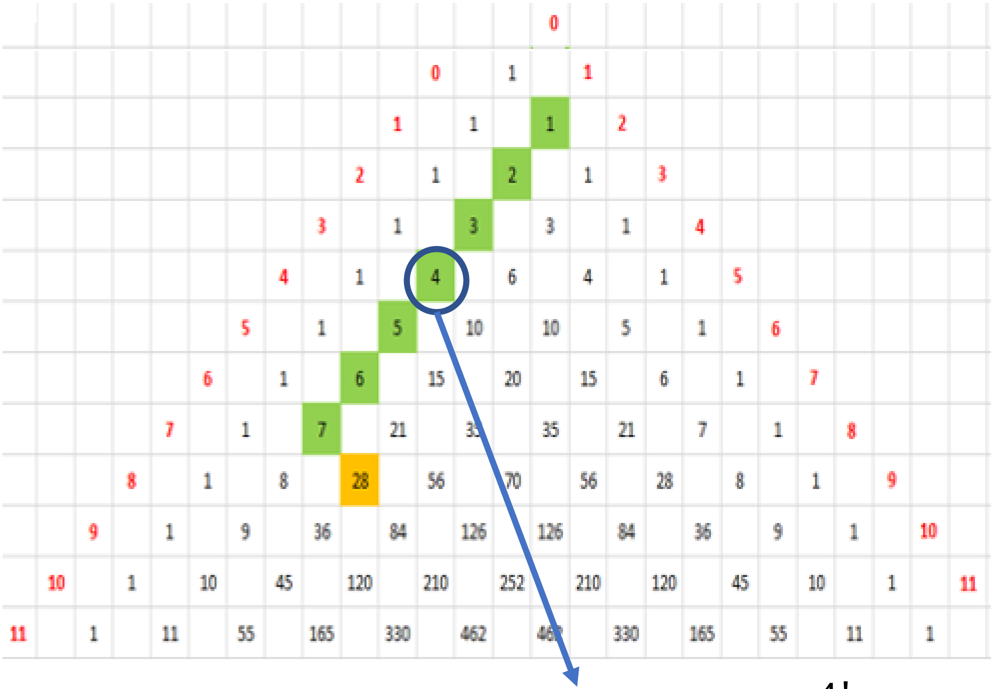
Completa nell’ultima riga dove ci sono i puntini rossi.
Poi sviluppa il quadrato e semplifica i calcoli per ottenere l’espressione cercata di 1+2+…+n.

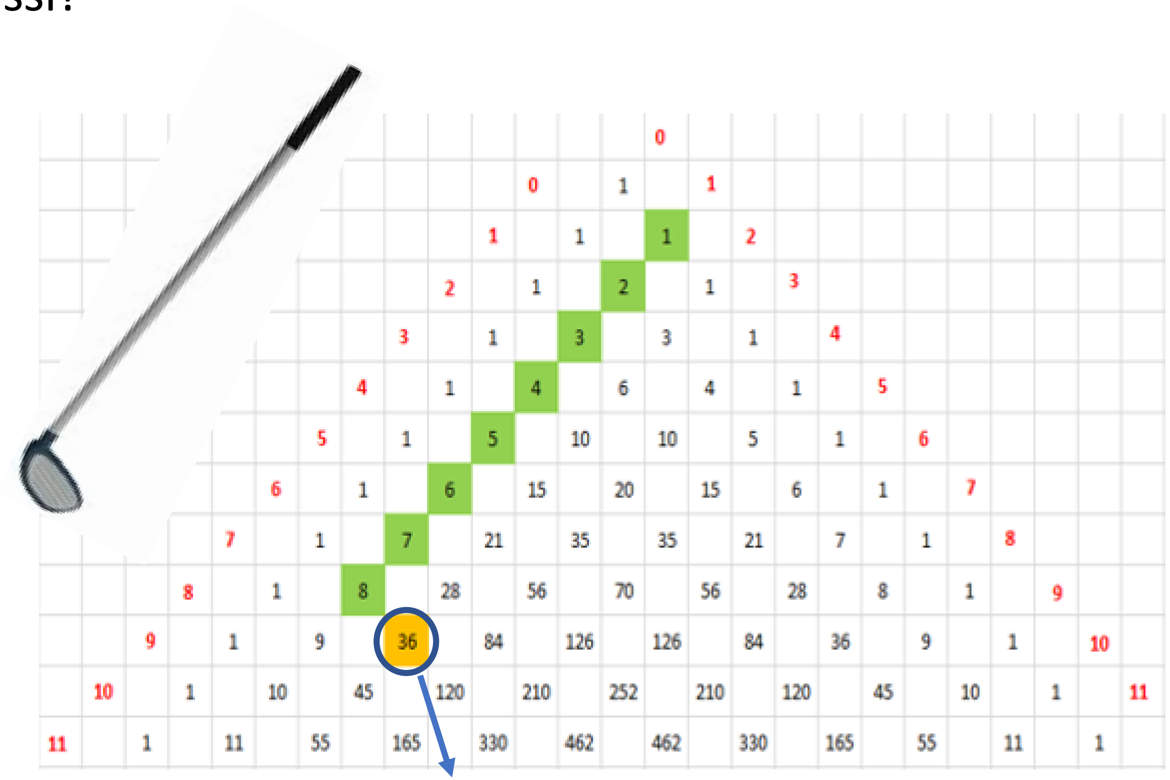
Attività 1 – postazione 6

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

LA MAZZA DA HOCKEY

Osserva queste immagini relative al triangolo di Tartaglia.
Cosa sono nei due casi i numeri verdi?
Cosa rappresenta il numero giallo rispetto ad essi?





posizione (4,1), contenuto $\frac{4!}{3!1!} = 4$

posizione (9,2), contenuto $\frac{9!}{7!2!} = 36$

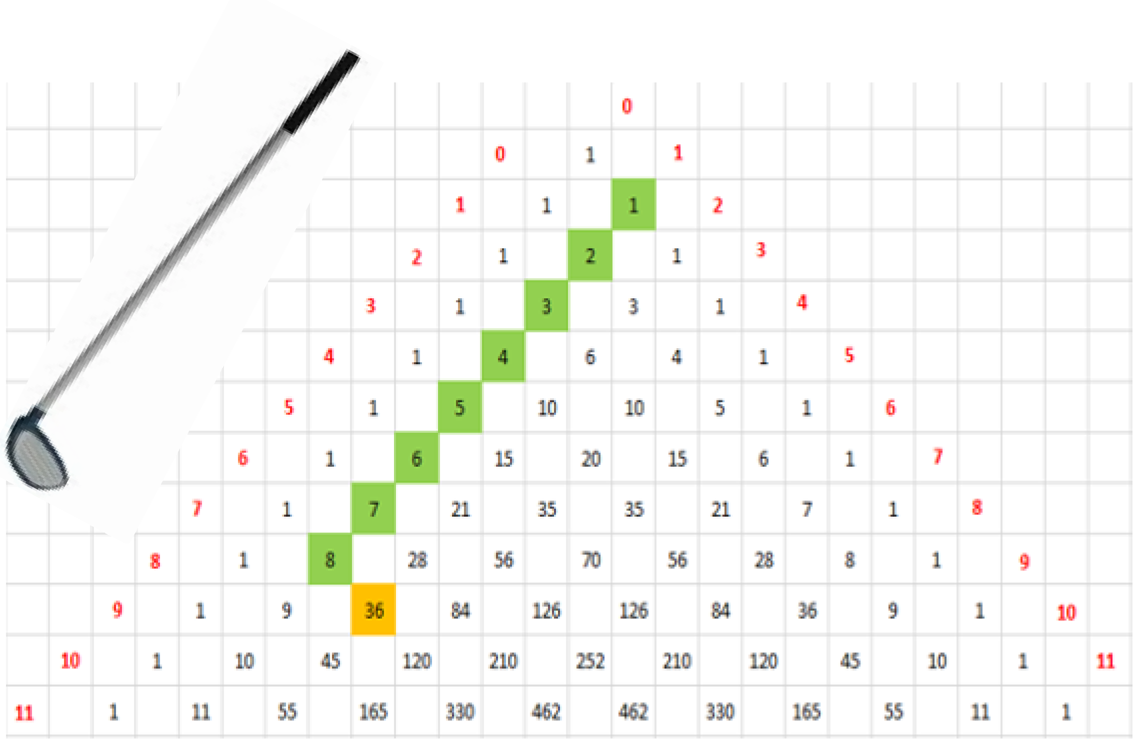
Attività 1 – postazione 6

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

LA MAZZA DA HOCKEY

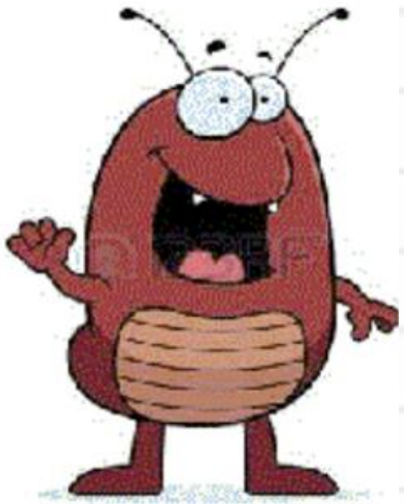
Rispetto alla mazza da hockey, la linea verde può essere assimilata al manico, il quadrato giallo alla testa.
Il manico della mazza da hockey parte da un bordo del triangolo di Tartaglia ed è parallela all'altro, come in figura.
In figura il manico della mazza da hockey è lungo 8.
Quando il manico della mazza da hockey è lungo n quale posizione è occupata dalla testa della mazza da hockey?
Qual è il valore della testa della mazza da hockey quando il manico è lungo n?

RICORDA
Jack la pulce

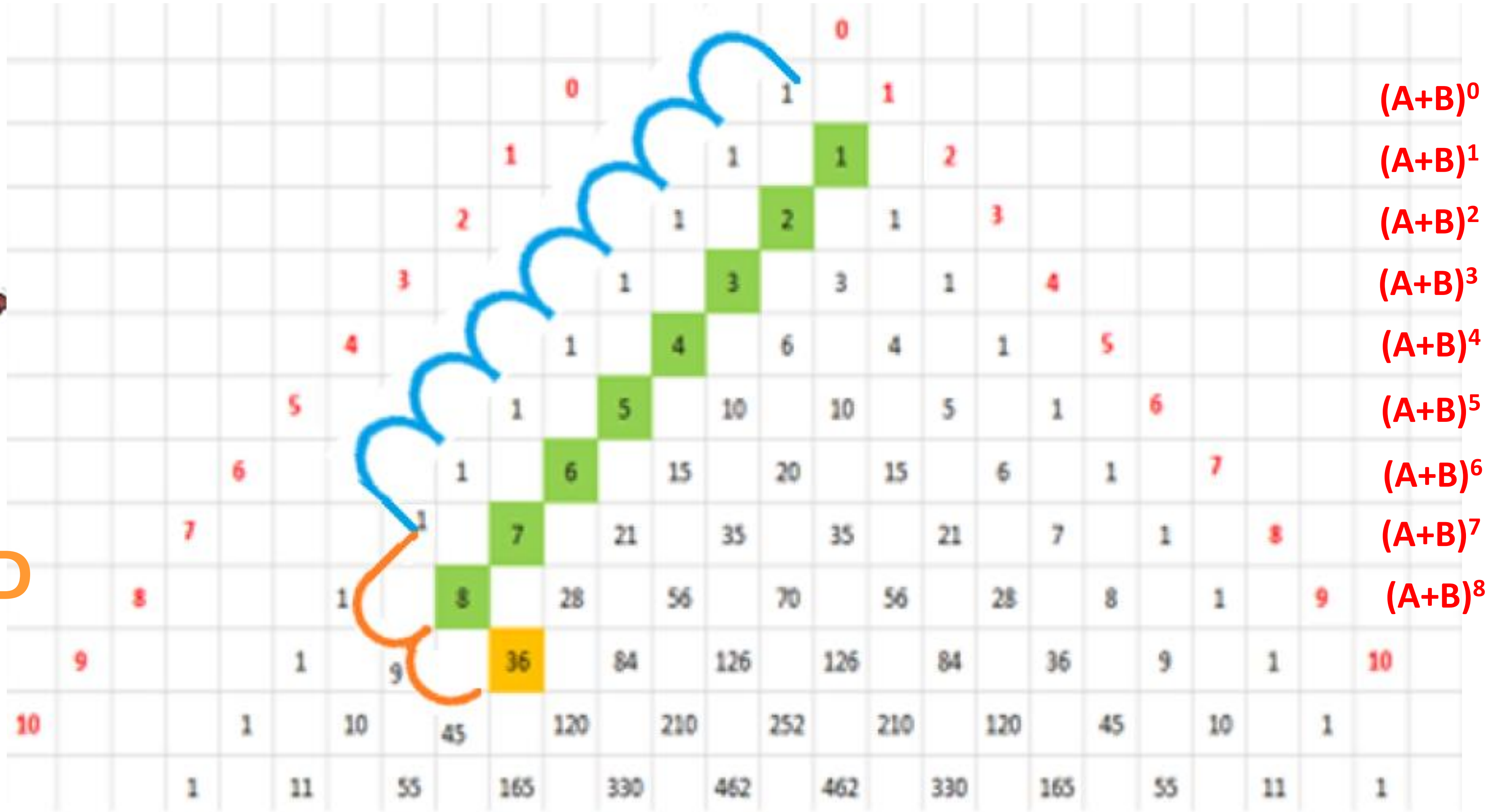


Attività 1 – postazione 6

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI



Jack la pulce



$(A+B)^0$
$(A+B)^1$
$(A+B)^2$
$(A+B)^3$
$(A+B)^4$
$(A+B)^5$
$(A+B)^6$
$(A+B)^7$
$(A+B)^8$

SSSSSSSDD

$$\frac{(7+2)!}{7!\cdot 2!} = 36$$

Casella (9,2)
riga 9, 3ª posizione da sx

Somma dei primi n numeri naturali

Attività 1 per gruppi e postazioni

↓

Attività 1 discussione di bilancio

↓

Attività 1 validazione risultati

INDUZIONE

obiettivo attività 2:

Somma dei primi n numeri pari
e dei primi n numeri dispari

Attività 2

Somma dei primi n numeri pari e dei primi n numeri dispari

POSTAZIONE 1 – Somma dei primi n numeri dispari:
Tante «L quadrate» l’una incastrata all’altra

POSTAZIONE 2 – Somma dei primi n numeri dispari:
I quattro «podi»

POSTAZIONE 3 – Somma dei primi n numeri dispari:
Da qualche prova all’idea

POSTAZIONE 3 – Somma dei primi n numeri pari:
Una particolare disposizione di due «scale quadrate» uguali fra loro

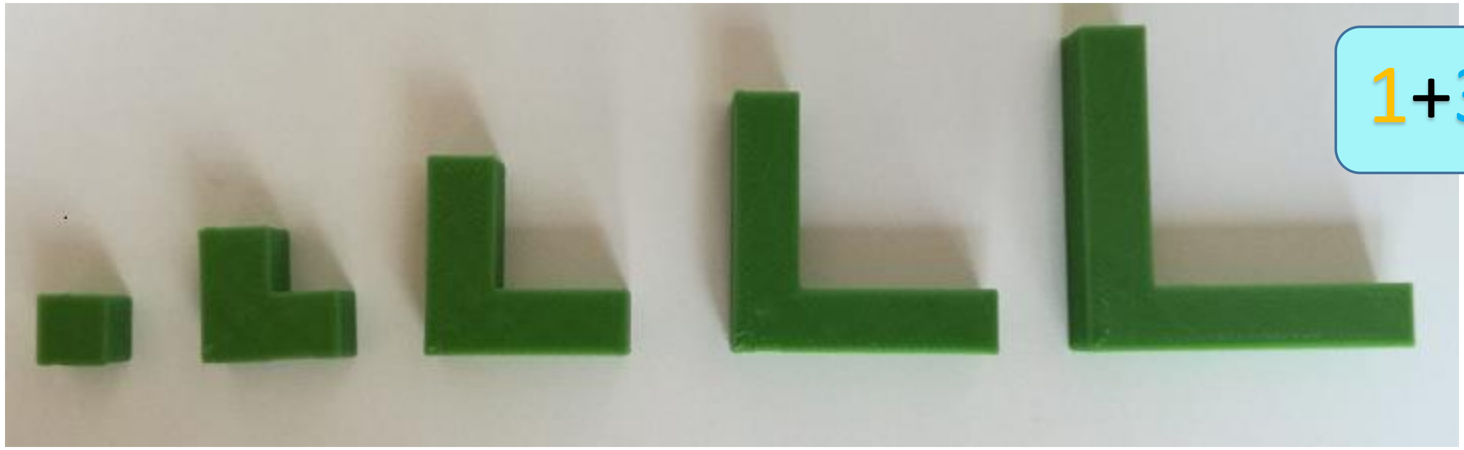
POSTAZIONE 5 – Somma dei primi n numeri dispari:
Il telescopio e non solo

GRUPPI ≤ # POSTAZIONI

Attività 2 – postazione 1

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI DISPARI

TANTE «L QUADRATE» L'UNA INCASTRATA ALL' ALTRA



$1+3+5+7+9+ \ldots +(2n-1)= ?$

Nicomaco da Gerasa circa 100 a.C.

$1+3$

$1+3+5$

$1+3+5+7$

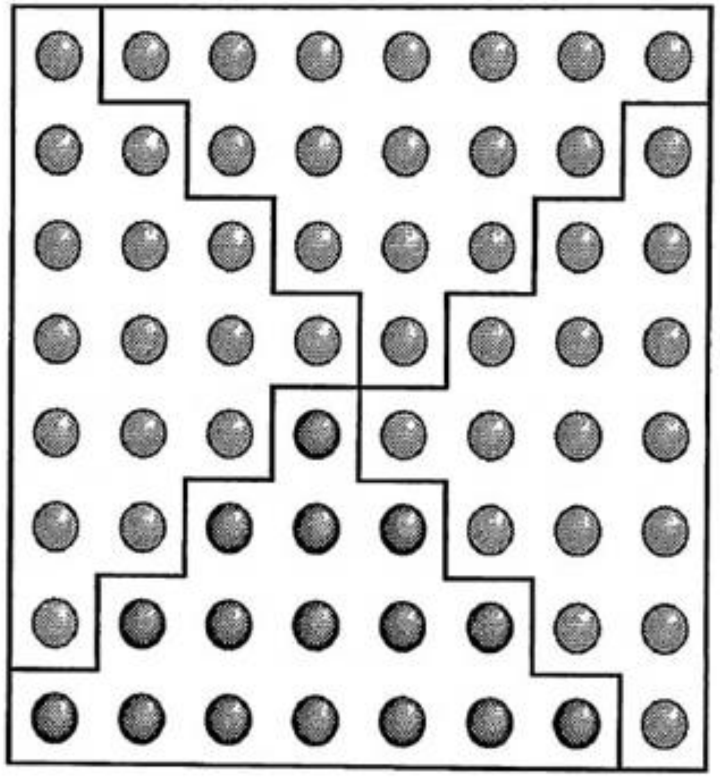
$1+3+5+7+9$

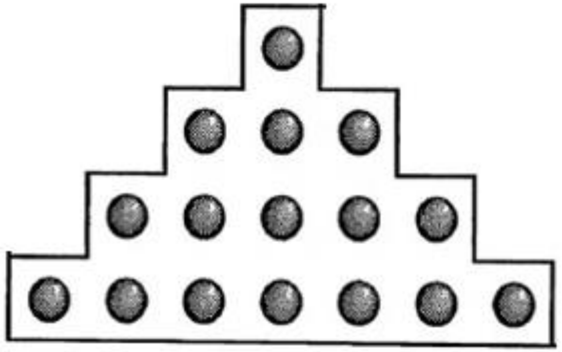
Attività 2 – postazione 2

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI DISPARI

I QUATTRO «PODI»

Nell'immagine ci sono 4 podi a quattro gradini opportunamente disposti. Disponi in modo analogo quattro modelli che hai a disposizione di podi tutti rispettivamente a 2, 3, 5, 6 … gradini quindi, considerando che un podio a n gradini rappresenta la somma dei primi n numeri dispari, generalizza trovando una formula che ti permetta di trovare la somma dei primi n numeri dispari.





podio a 4 gradini

Proof without Words
Roger B. Nelsen – 1993

Martin Gardner – 1973
rivista Scientific American

Attività 2 – postazione 3

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI DISPARI
DA QUALCHE PROVA ALL'IDEA

1	=1	$= 1^2$
1+3	= 4	$= 2^2$
1+3+5	= …	= …
1+3+5+7	= …	= …
1+3+5+7+9	= …	= …
1+3+5+7+9+11	= …	= …
1+3+5+7+9+11+13	= …	= …
…		
1+3+5+ … + (2n-1)		= …

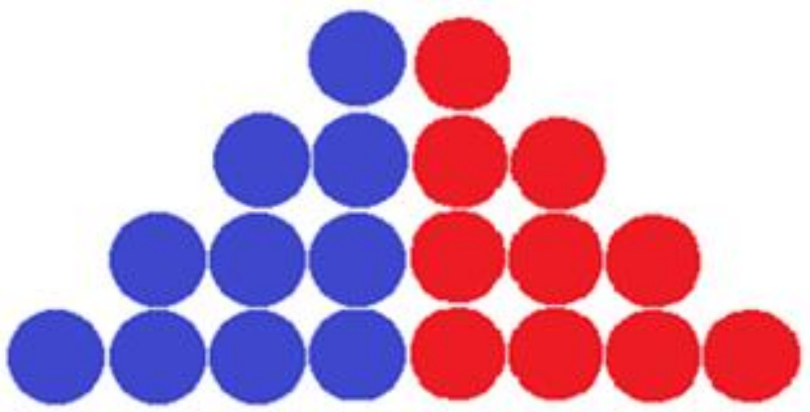
Dagli esempi precedenti e da altre prove con un foglio di calcolo cerca la formula che ti permette di esprimere la somma dei primi n numeri dispari. Elabora la tua congettura.

OpenOfficeCalc

Attività 2 – postazione 4

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

UNA PARTICOLARE DISPOSIZIONE DI DUE «SCALE QUADRATE» UGUALI FRA LORO



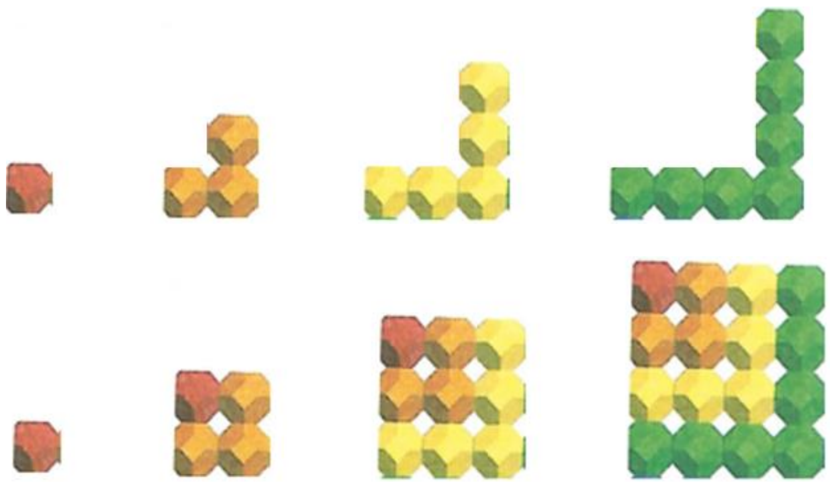
Nell'immagine a lato sono state disposte due scale quadrate, entrambe di lato 4. Ricordando che la scala quadrata di lato n è la rappresentazione grafica di T_n, somma dei primi n numeri naturali, quella in figura è la rappresentazione grafica di $2T_4$. Utilizzando i modelli di scale quadrate che hai a disposizione costruisci e disponi allo stesso modo due scale quadrate dello stesso lato (ad esempio di lato 2, 3 o 5). A partire dall'alto nei vari casi quanti sono i punti che costituiscono le righe delle figure così ottenute?

Supponi ora di disporre in modo analogo due scale quadrate entrambe di lato n.
A partire dall'alto quanti sono in questo caso i punti che costituiscono le righe della figura così ottenuta?
La figura così ottenuta di cosa è la rappresentazione grafica?
In base a quanto osservato, conoscendo il valore di T_n riesci a trovare un'espressione in funzione di n che ti permetta di calcolare la somma dei primi n numeri pari?

Attività 2 – postazione 5

SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

IL TELESCOPIO E NON SOLO



Con riferimento alle definizioni di L quadrate e numeri quadrati della prima delle attività di questa fase, osservando le immagini a lato è possibile capire che ogni numero dispari può essere scritto come la differenza fra due quadrati successivi.

Allo stesso risultato puoi arrivare per via algebrica facendo la differenza fra i due quadrati consecutivi

$$(i+1)^2 - i^2 = i^2 + 2i + 1 - i^2 = 2i + 1$$

(per i=0, 1, 2, … restituisce tutti i numeri dispari).

Se consideri l'ordinamento naturale dei numeri dispari che posizione occupa (2n+1)?
Esplicita questa uguaglianza per i=1,2,3, …, n-1 analogamente a quanto fatto nell'attività "il telescopio" dell'Attività 1 e somma verticalmente membro a membro.
Considerando che la somma a primo membro è una somma telescopica e che gli addendi del secondo membro sono 3, 5, 7,…,2n-1, riesci a ricavare la formula che restituisce la somma dei primi n numeri dispari 1+3+5+…+(2n-1)?

Somma dei primi n numeri pari e dei primi n numeri dispari

Attività 2 per gruppi e postazioni

Attività 2 discussione di bilancio

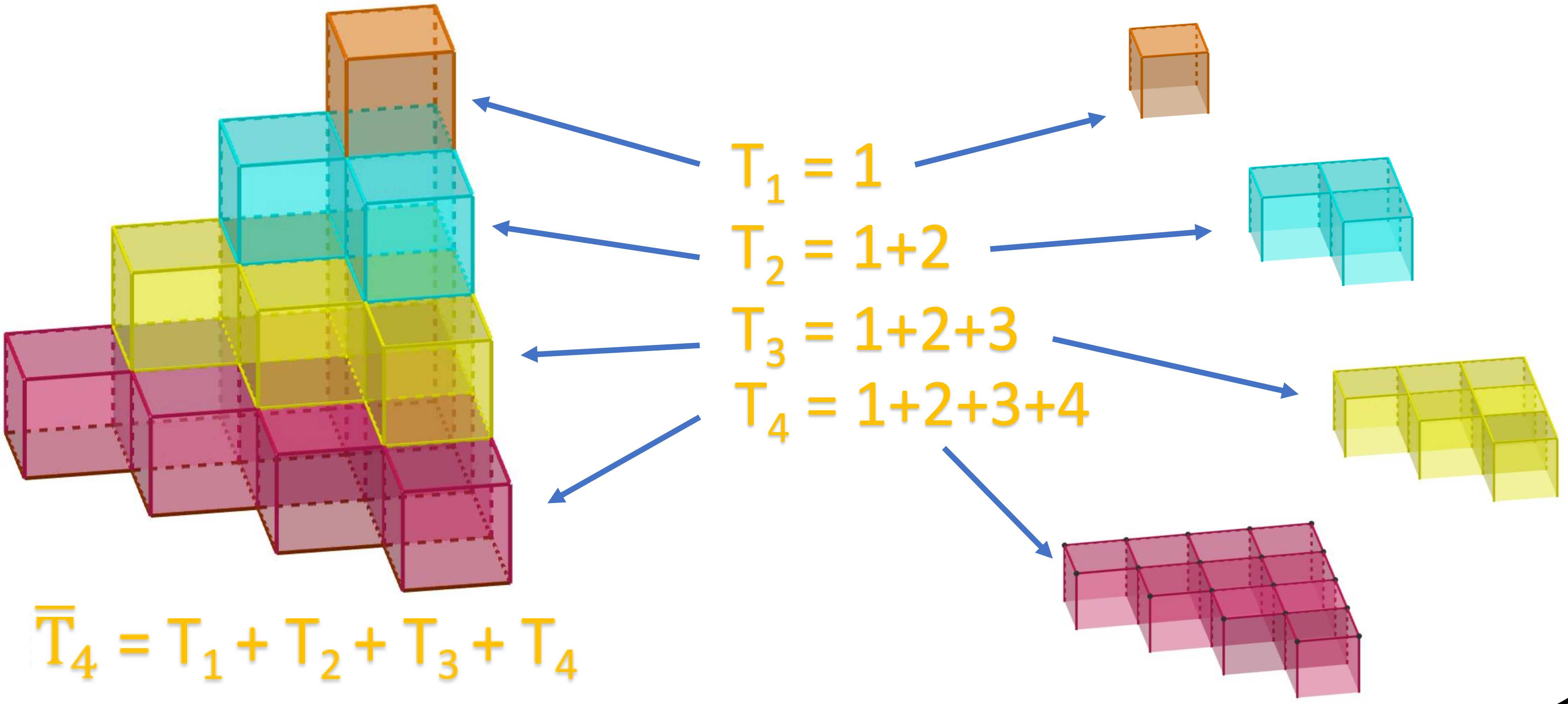
Attività 2 validazione risultati

INDUZIONE

obiettivo attività 3:

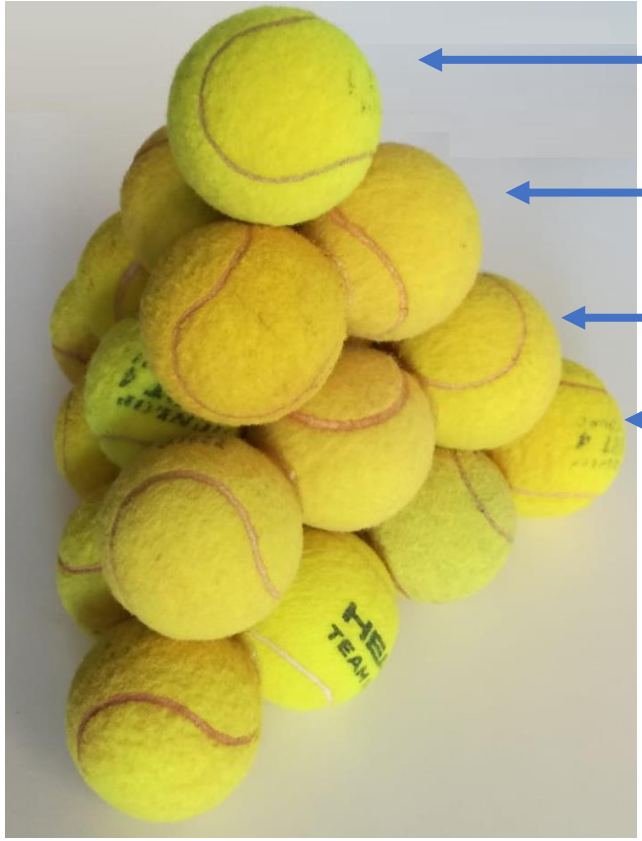
Somma dei primi n numeri triangolari

Somma dei primi n numeri triangolari
il numero tetraedrico $\overline{T}_n$ e la «piramide a gradoni triangolari»



Somma dei primi n numeri triangolari
il numero tetraedrico $\overline{T}_n$ e la «piramide a gradoni quadrati»

$\overline{T}_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$



$T_1 = 1$

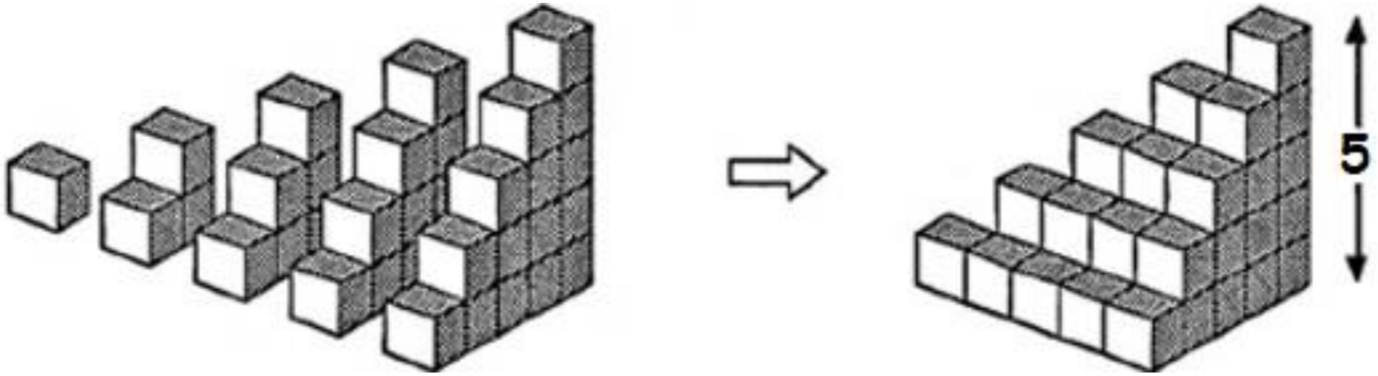
$T_2 = 1+2$

$T_3 = 1+2+3$

$T_4 = 1+2+3+4$

Somma dei primi n numeri triangolari
il numero tetraedrico $\overline{T}_n$ e la «scala con gradini a bacchetta»

Un altro modo per rappresentare un numero tetraedrico è quello in figura, che scegliamo di chiamare scala con n gradini a bacchetta. In particolare, nell'immagine a destra n = 5 e il numero il numero tetraedrico rappresentato è $\overline{T}_5$.



$\overline{T}_5$ e la scala con gradini 5 a bacchetta

Attività 3

Somma dei primi n numeri triangolari

POSTAZIONE 1 – Le tre piramidi a gradoni triangolari
e il parallelepipedo di altezza unitaria

POSTAZIONE 2 – Le sei scale con n gradini a bacchetta

POSTAZIONE 3 – Somma dei primi n numeri dispari:
Da qualche prova all'idea

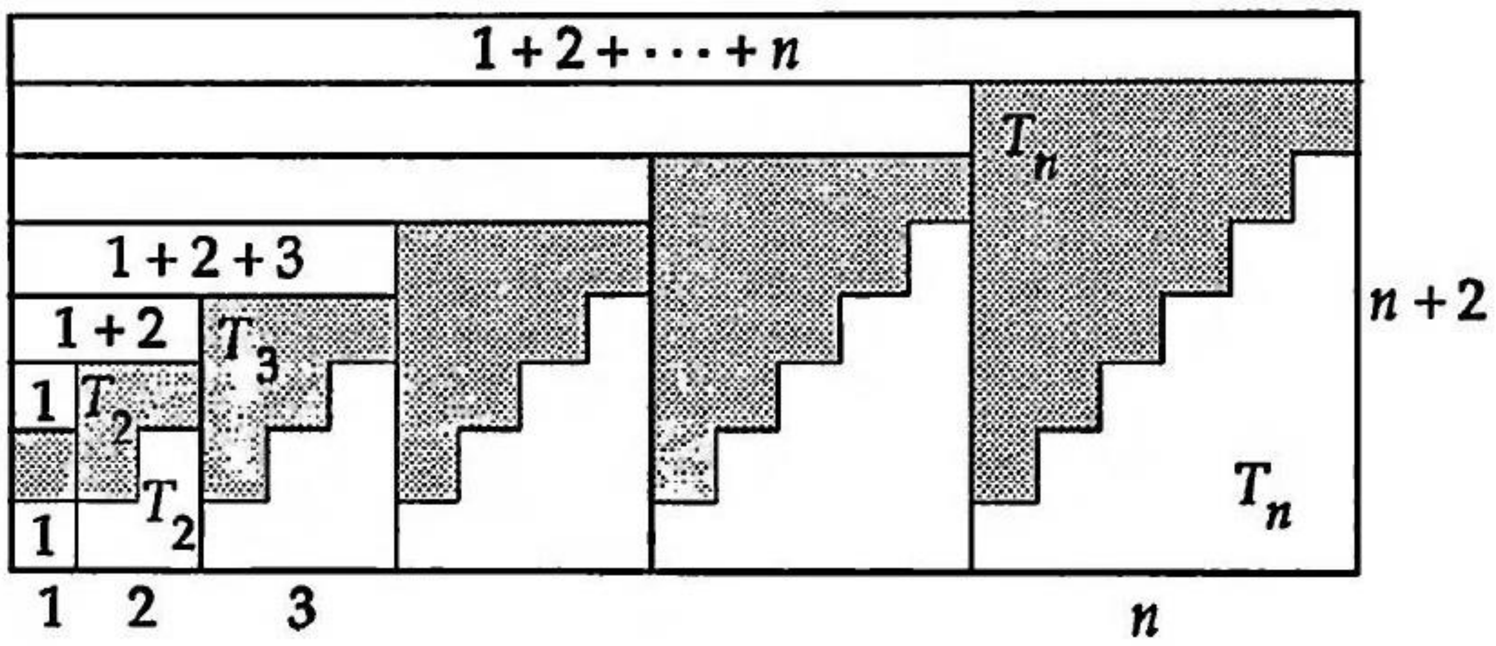
POSTAZIONE 3 – Somma dei primi n numeri pari:
Una particolare disposizione di due «scale quadrate» uguali fra loro

POSTAZIONE 5 – Somma dei primi n numeri dispari:
Il telescopio e non solo

GRUPPI $\leq$ # POSTAZIONI

Attività 3 – postazione 1

Somma dei primi n numeri triangolari
Le tre piramidi a gradoni triangolari e il parallelepipedo di altezza unitaria

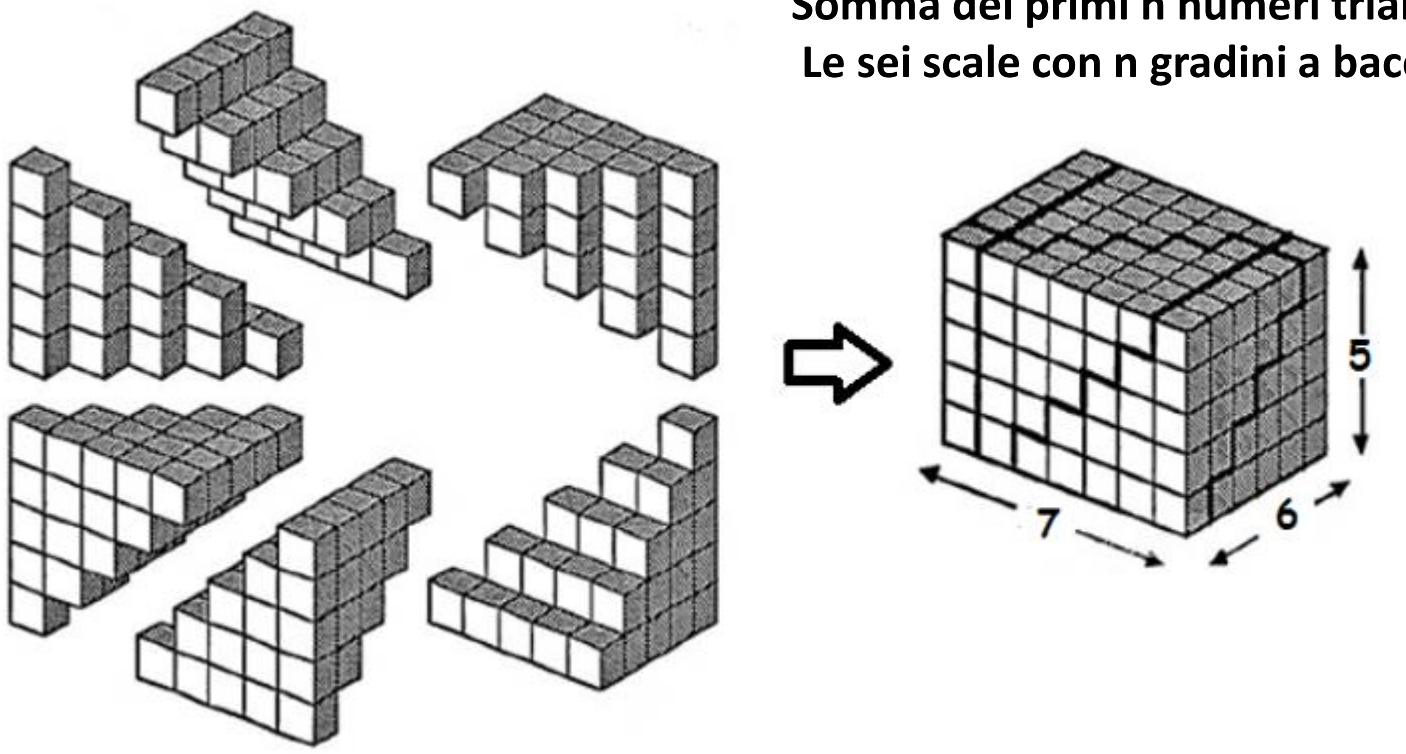


Nel testo “Proof without words” di Roger B. Nielsen del 1993 è riportata un’immagine analoga a quella a lato, legata al nome di Monte J.Zerger, con lo scopo di portare il lettore a trovare la formula della somma dei primi n numeri tetraedrici.
Riesci a trovare tale formula?

Per realizzare praticamente la costruzione in figura puoi utilizzare i “Modelli delle tre piramidi a gradoni triangolari per la costruzione del parallelepipedo di altezza unitaria” che hai a disposizione.

Attività 3 – postazione 2

Somma dei primi n numeri triangolari
Le sei scale con n gradini a bacchetta



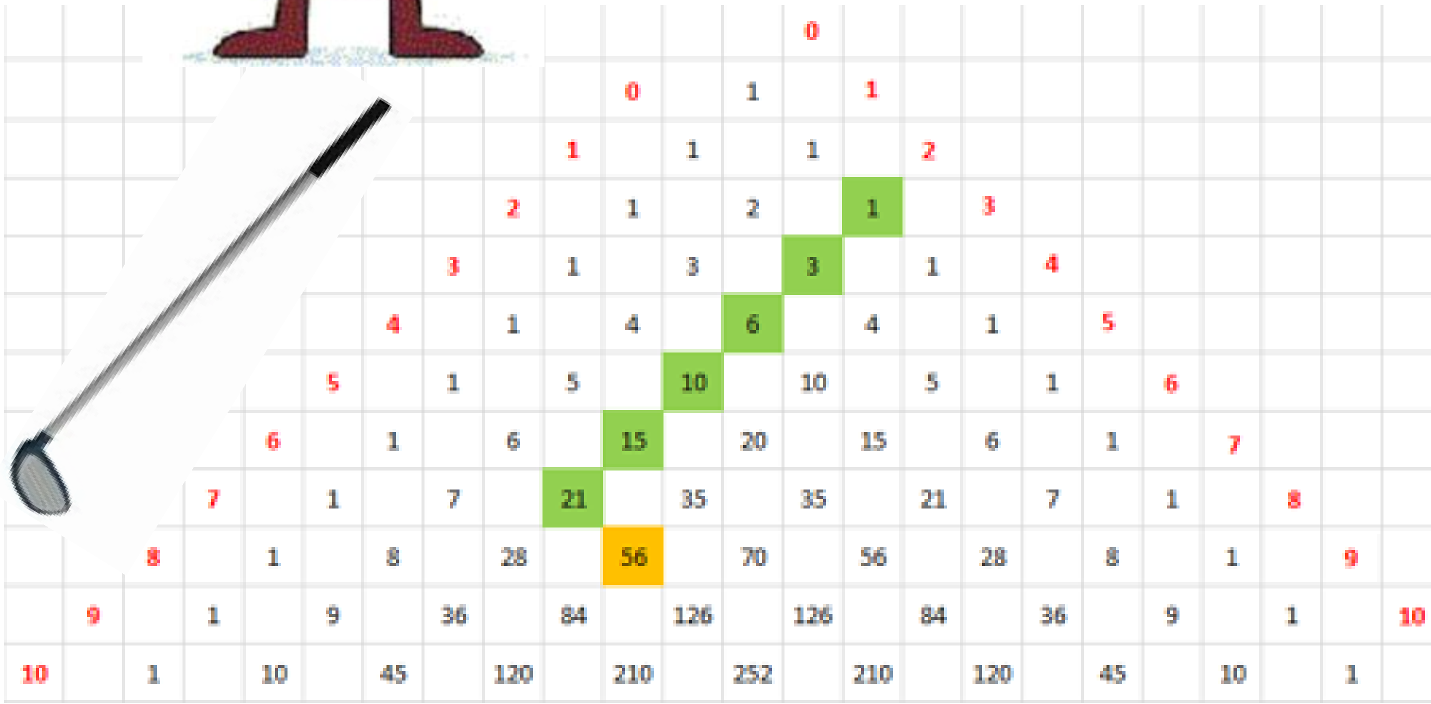
Disponendo come nella figura a lato sei piramidi con 5 gradini a bacchetta si ottiene un parallelepipedo di dimensioni 5, 6 e 7.
Sapendo le dimensioni del parallelepipedo è possibile determinare il numero dei cubi di lato unitario da cui è costituito e quindi, di conseguenza, quanti sono quelli che costituiscono ognuna delle sei piramidi di partenza.

Generalizzando al caso di sei scale a n gradoni orizzontali si ottiene ancora un parallelepipedo. Sai esprimere le sue dimensioni in funzione di n? Sai determinare il numero dei cubi di lato unitario da cui è costituito? Se sei arrivato a questo punto non dovresti avere problemi a determinare quanti sono i cubi di lato unitario che costituiscono ognuna delle sei piramidi di partenza e quindi a determinare.

Attività 3 – postazione 3

Somma dei primi n numeri triangolari

La mazza da hockey



Osserva l'immagine a destra relativa al triangolo di Tartaglia.
Cosa sono in questo caso i numeri verdi?
Cosa rappresenta il numero giallo rispetto ad essi?
Rispetto alla mazza da hockey a destra, la linea verde può essere assimilata al manico e il quadrato giallo alla testa.
Il manico della mazza da hockey parte da un bordo del triangolo di Tartaglia ed è parallela all'altro, come in figura.
In figura il manico della mazza da hockey è lungo 6.
Quando il manico della mazza da hockey è lungo n quale posizione è occupata dalla testa della mazza da hockey?
Qual è il valore della testa della mazza da hockey quando il manico è lungo n?
Come può aiutarci questa informazione a scoprire quanto vale la somma dei primi n numeri triangolari?

Somma dei primi n numeri pari e dei primi n numeri dispari

Attività 3 per gruppi
e postazioni

↓

Attività 3
discussione di bilancio

↓

Attività 3
validazione risultati

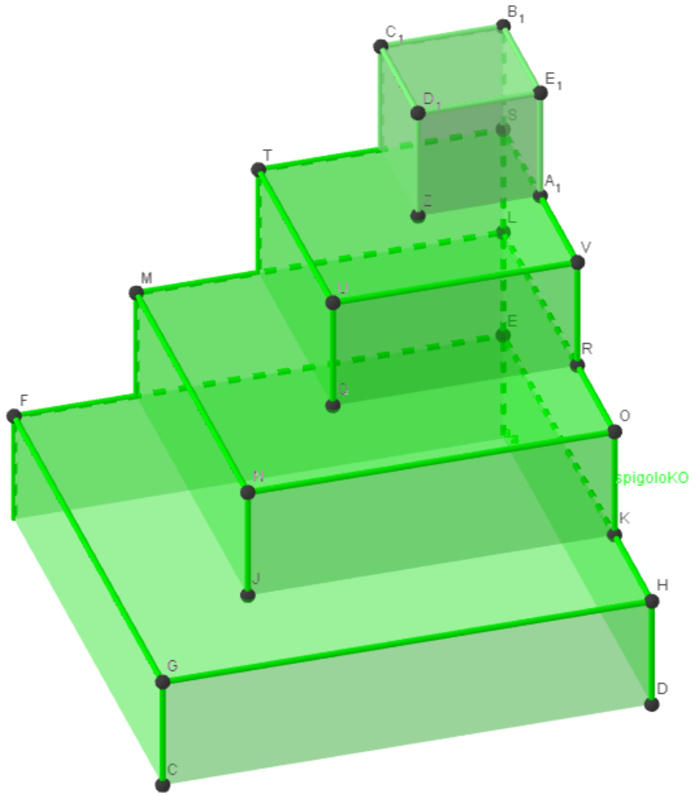
INDUZIONE

obiettivo attività 4:

Somma dei quadrati
dei primi n numeri naturali

Somma dei primi n numeri triangolari
la somma dei primi n quadrati e la «piramide a n gradoni quadrati»

Quella in figura è la rappresentazione grafica della somma dei primi quattro numeri quadrati e scegliamo qui di chiamarla piramide a 4 gradoni quadrati.
L’aggettivo “quadrati” dei gradoni è legato alla forma degli gnomoni che in questa volta sono i numeri quadrati appunto e l’n-esimo numero quadrato Q_n permette di passare dalla piramide di lato n-1 a quella di lato n.
Ciò che ci proponiamo ora è determinare la somma dei quadrati dei primi n numeri triangolari e cioè una formula che permetta di stabilire quanti cubi di lato 1, come quello alla sommità della figura, costituiscono la piramide a gradoni quadrati di lato n.



La piramide a 4 gradoni quadrati

Attività 4

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali

POSTAZIONE 1 – Le sei piramidi a n gradoni quadrati

POSTAZIONE 2 – Smontiamo tre piramidi a n gradoni quadrati

POSTAZIONE 3 – Le tre piramidi a n gradoni quadrati

POSTAZIONE 4 – Smontiamo una piramide a n gradoni quadrati e una p
a gradoni triangolari di lato n-1

POSTAZIONE 5 – La piramide a n gradoni quadrati e gli n-1 muretti*

GRUPPI ≤ # POSTAZIONI

*la postazione 5 non è indicata per alunni di classi I e II

Attività 4 – postazione 1

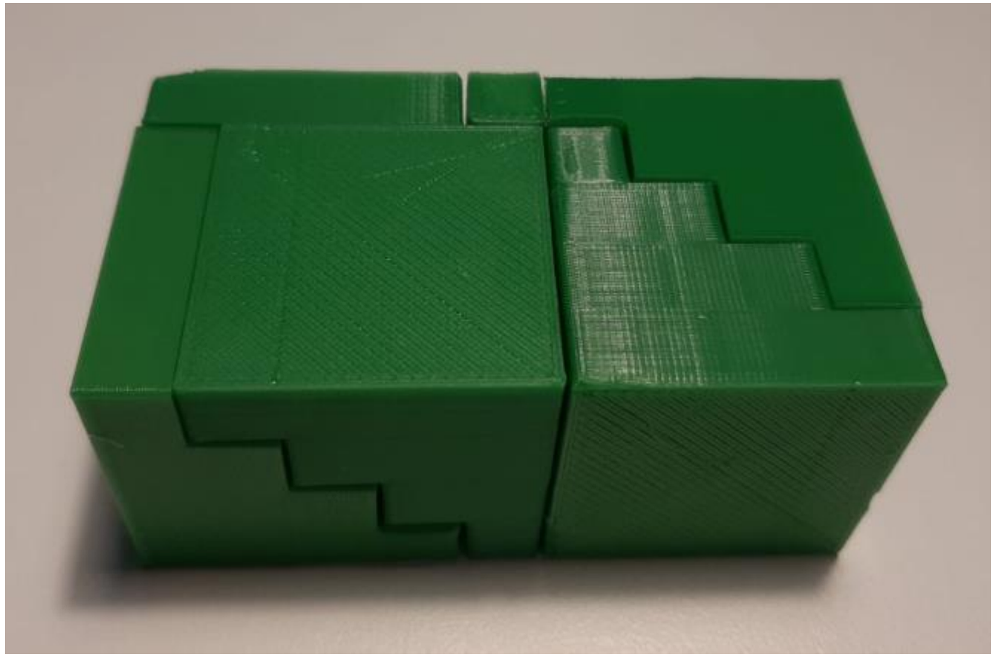
Somma dei primi n numeri triangolari
Le sei piramidi a n gradoni quadrati

Per determinare la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali esaminiamo il problema equivalente della determinazione del numero dei cubi di lato unitario contenuti la piramide a gradoni n quadrati.

- Riesci a disporre queste sei piramidi così da formare un parallelepipedo?
- Considerando che le piramidi hanno lato di base 4, quali sono le dimensioni del parallelepipedo ottenuto?
- Quanti cubi di lato unitario costituiscono tale parallelepipedo?
- Considerando che il parallelepipedo è formato da sei piramidi a 4 gradoni quadrate, quanti cubi di lato uno formano ognuna di queste?
- Qual è dunque la somma dei primi quattro quadrati?
- Generalizzando quanto mostrato nel file in questione nel caso particolare di n=4 riesci a trovare la formula che permette di determinare la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali?

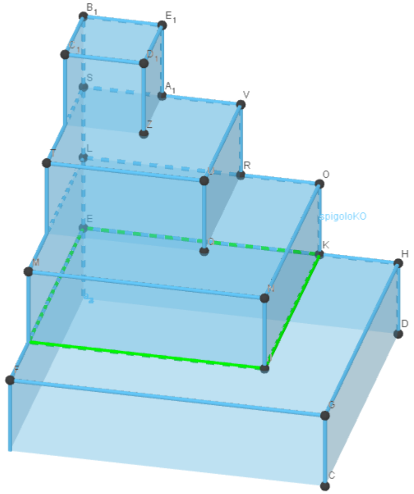
Attività 4 – postazione 1

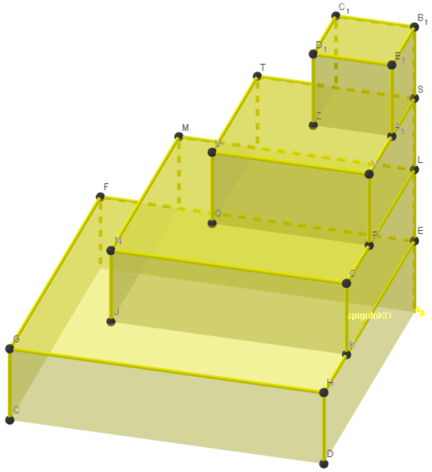
Somma dei primi n numeri triangolari
Le sei piramidi a n gradoni quadrati

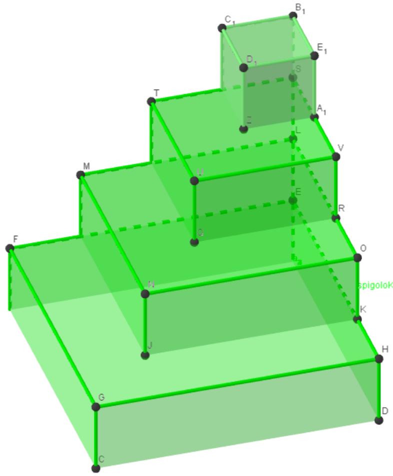


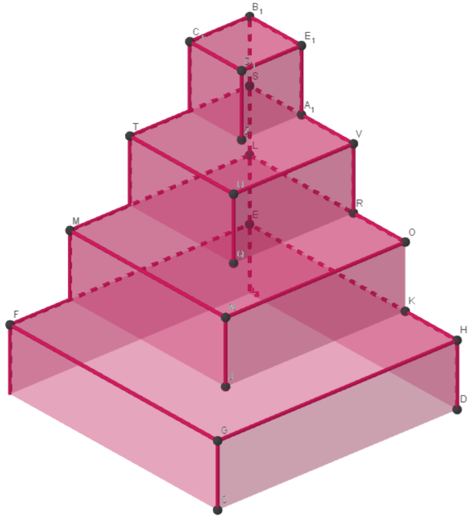
Attività 4 – postazione 1

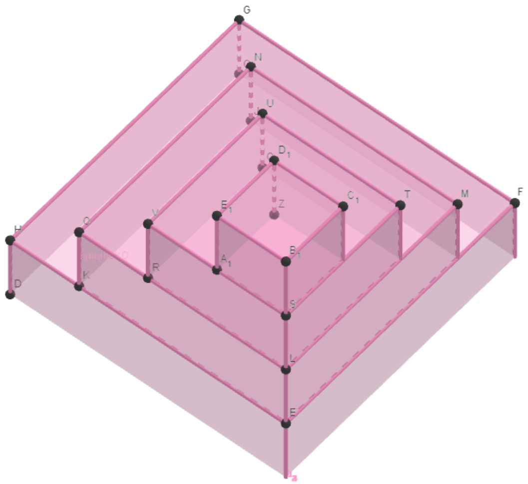
Somma dei primi n numeri triangolari
Le sei piramidi a n gradoni quadrati

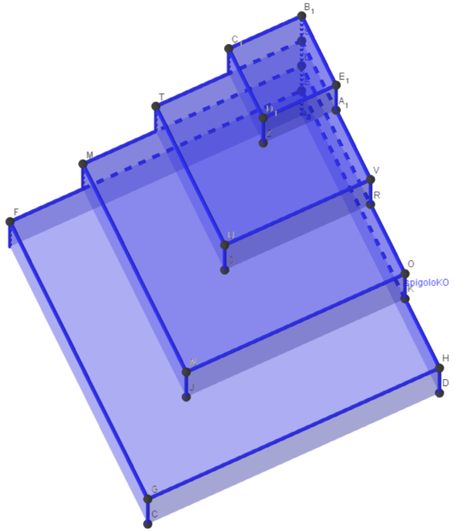








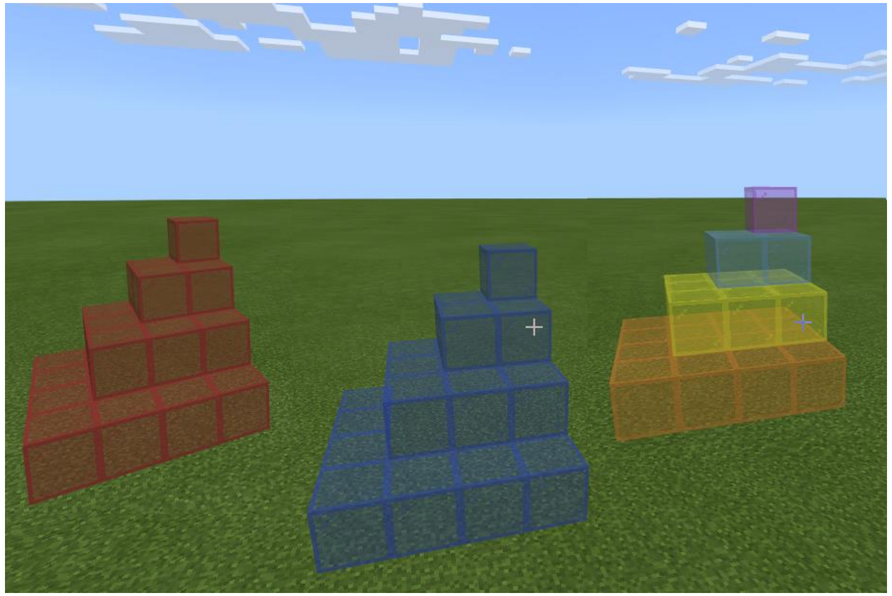


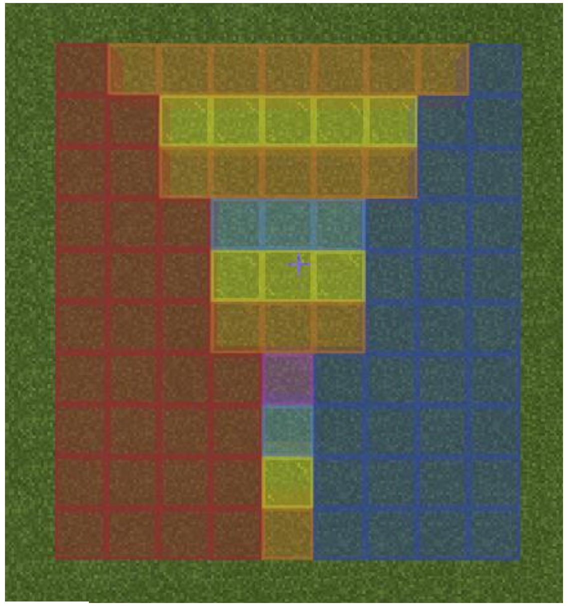


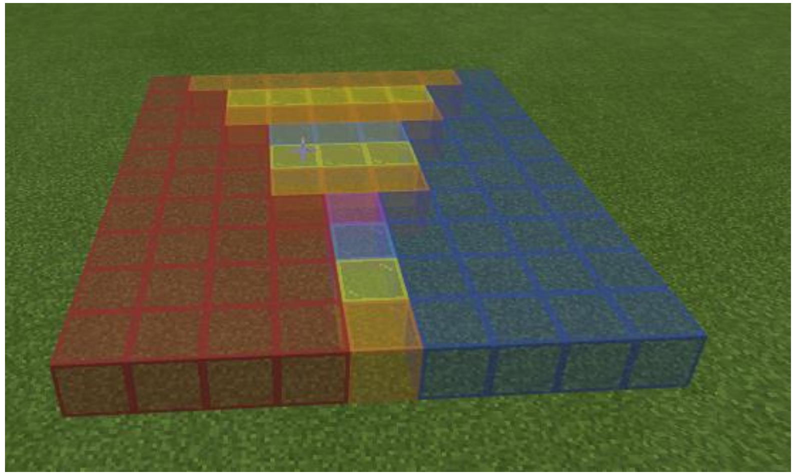
Prerequisito: somma dei primi n naturali

Attività 4 – postazione 2

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali
Smontiamo tre piramidi a n gradoni quadrati







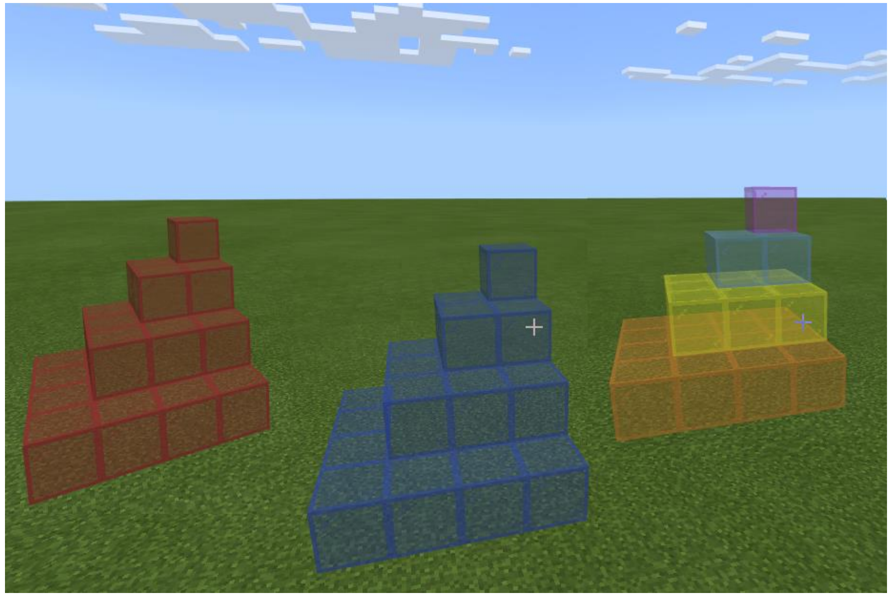
$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}(2n+1)(1+2+\cdots+n)$$

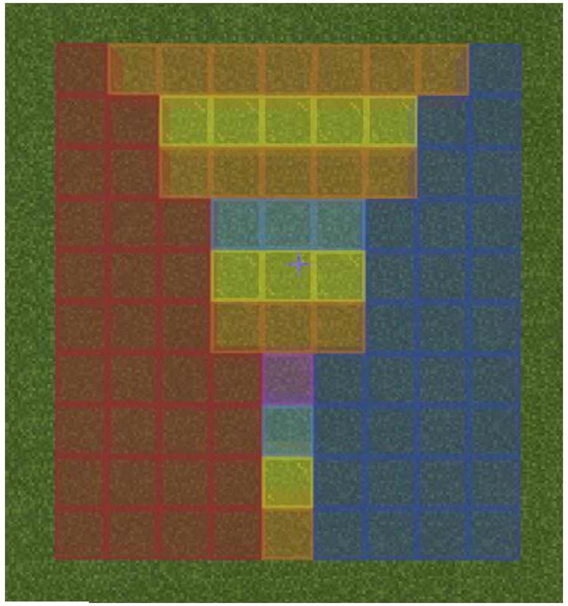
$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}(2n+1)\frac{n(n+1)}{2}$$

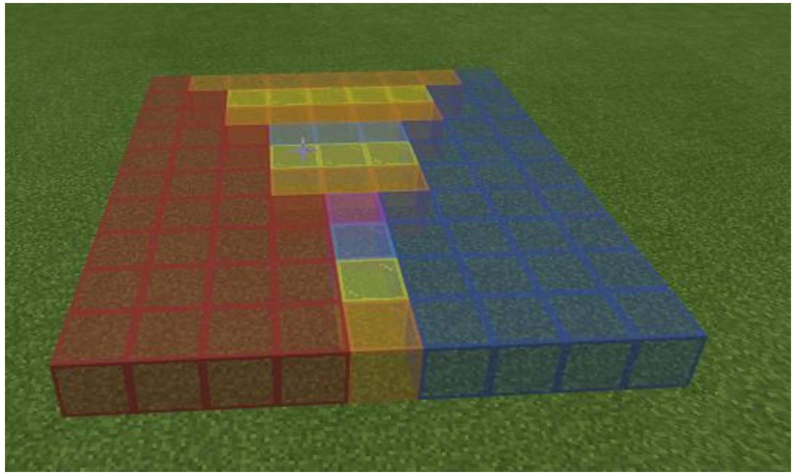
Prerequisito: somma dei primi n naturali

Attività 4 – postazione 2

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali
Smontiamo tre piramidi a n gradoni quadrati







~~MINECRAFT~~

MATECRAFT

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}(2n+1)(1+2+\cdots+n)$$

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}(2n+1)\frac{n(n+1)}{2}$$

Attività 4 – postazione 2

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali
Smontiamo tre piramidi a n gradoni quadrati

Le immagini precedenti mostrano come possano essere smontate ed opportunamente ricomposte tre piramidi a n gradoni quadrati così da formare un parallelepipedo di altezza 1.

Dalla determinazione delle altre due dimensioni del parallelepipedo e quindi del numero di cubi unitari che lo costituiscono è possibile risalire al numero di cubi unitari che costituiscono ognuna delle tre piramidi iniziali?

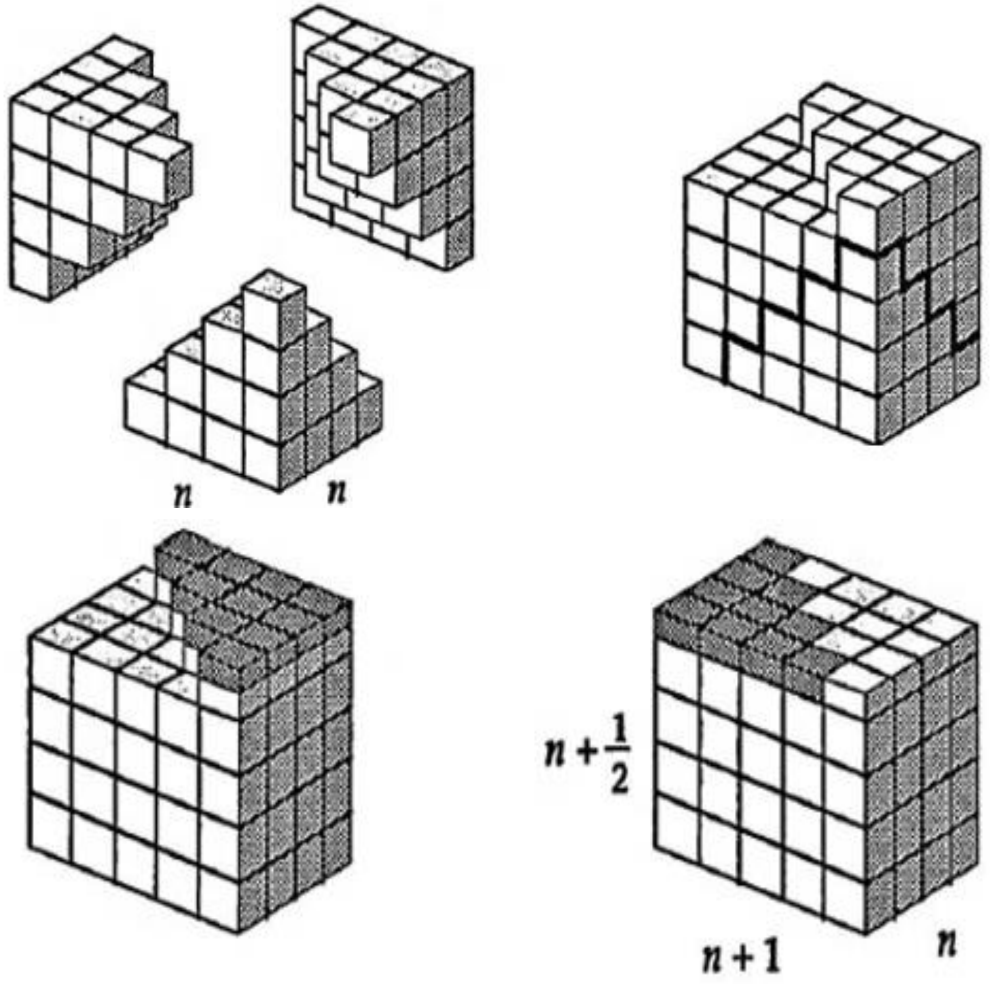
Riesci a trovare la formula della somma dei primi n numeri triangolari ripetendo un analogo ragionamento a partire da tre piramidi a n gradoni quadrati?

Attività 4 – postazione 3

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali
Le tre piramidi a n gradoni quadrati

Nel testo "Proof without words" di Roger B. Nielsen del 1993 vengono riportate immagini analoghe a quelle a lato, legate al nome di Man-Keung Siu, con lo scopo di portare il lettore a trovare la formula della somma dei quadrati dei primi n numeri naturali.

Riesci a trovarla ?

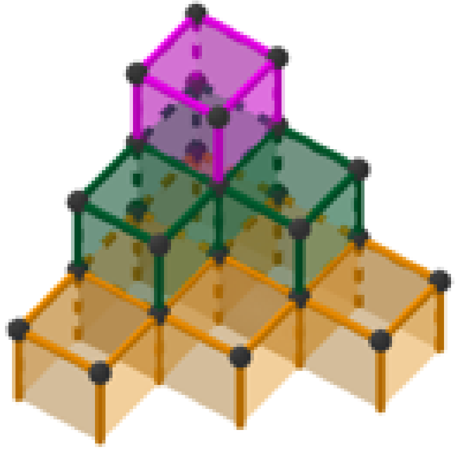


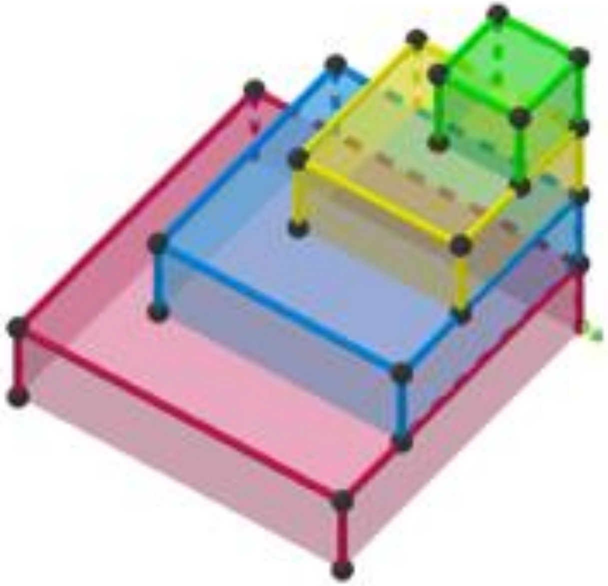
Attività 4 – postazione 4

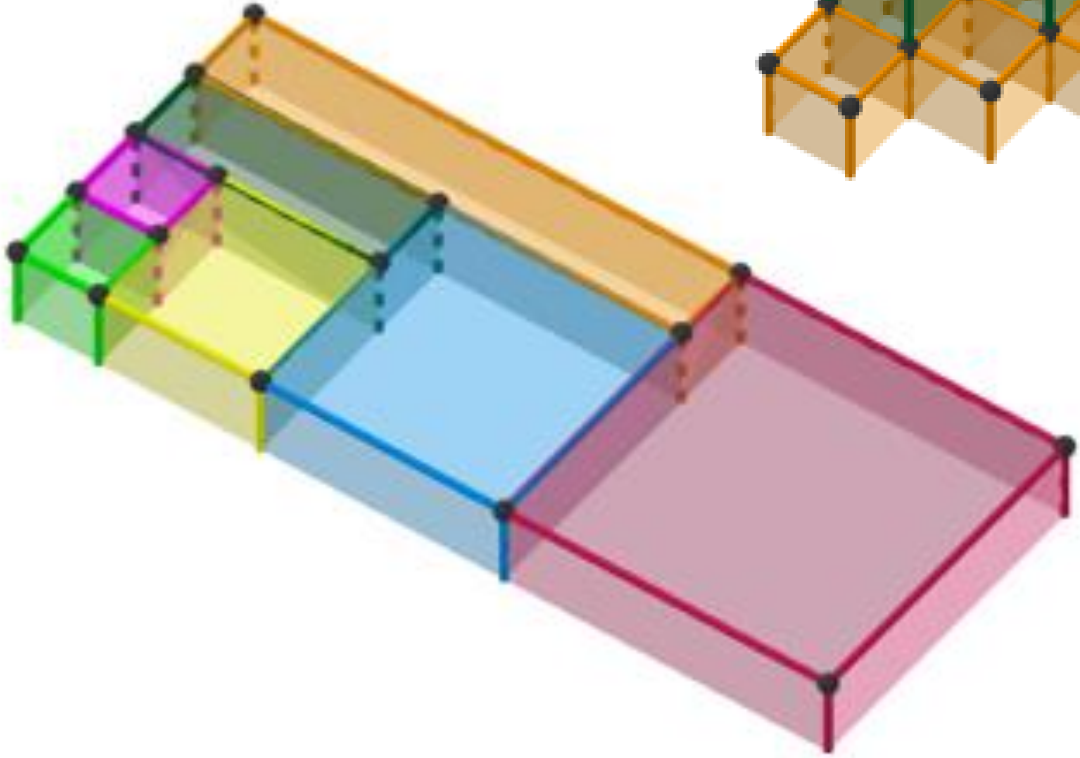
Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali

Smontiamo una piramide a n gradoni quadrati e una piramide a gradoni triangolari di lato n-1

Prerequisito: somma dei primi n naturali e somma dei primi n tetraedrici







Attività 4 – postazione 4

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali
Le tre piramidi a n gradoni quadrati

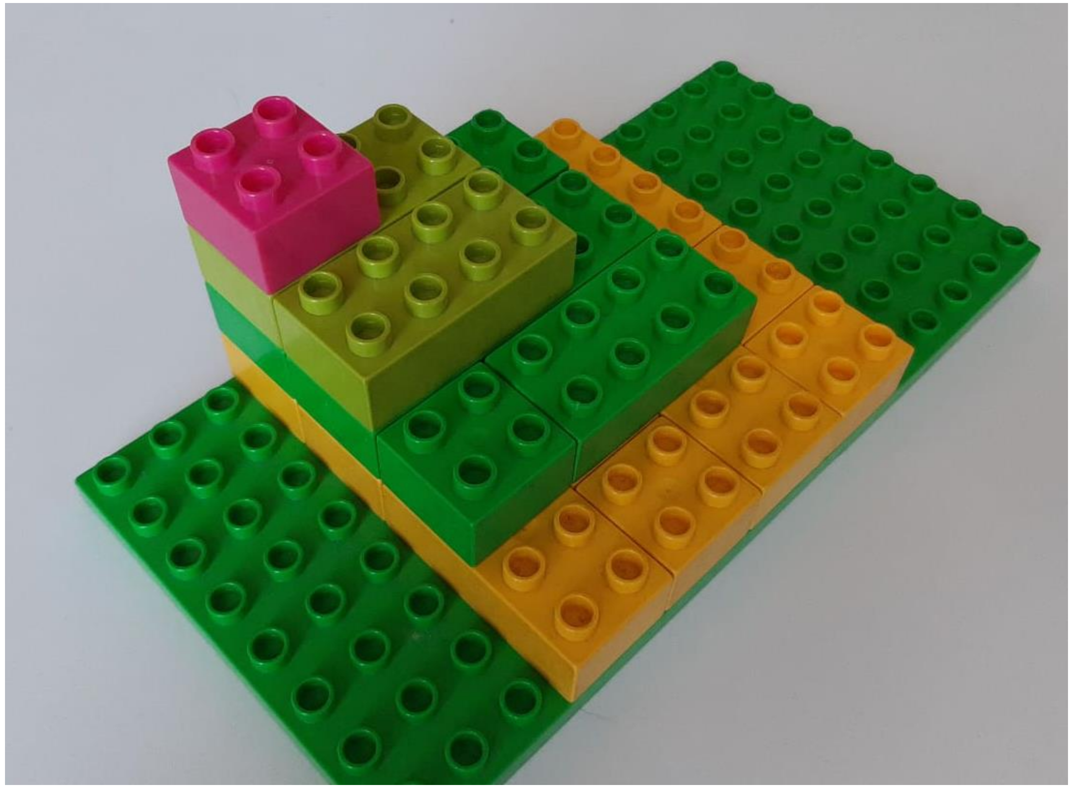
Le immagini precedenti mostrano come possano essere smontate ed opportunamente ricomposte una piramide a 4 gradoni quadrati e una piramide triangolare di lato 3 così da formare un parallelepipedo di altezza 1. Dalla determinazione delle altre due dimensioni del parallelepipedo e quindi del numero di cubi unitari che lo costituiscono è possibile risalire al numero di cubi unitari che costituiscono la piramide quadrata sapendo quanti sono quelli che della piramide triangolare (hai già trovato la formula che ti permette di calcolare $\overline{\mathrm{T}}_{\mathrm{n}}$). Applicando anche le tue conoscenze di calcolo algebrico, riesci a trovare la formula cercata ripetendo questo ragionamento a partire da tre piramidi a gradoni quadrati di lato n?

Attività 4 – postazione 5

Classe >II

Sommatorie

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali
La piramide a n gradoni quadrati e gli n-1 muretti

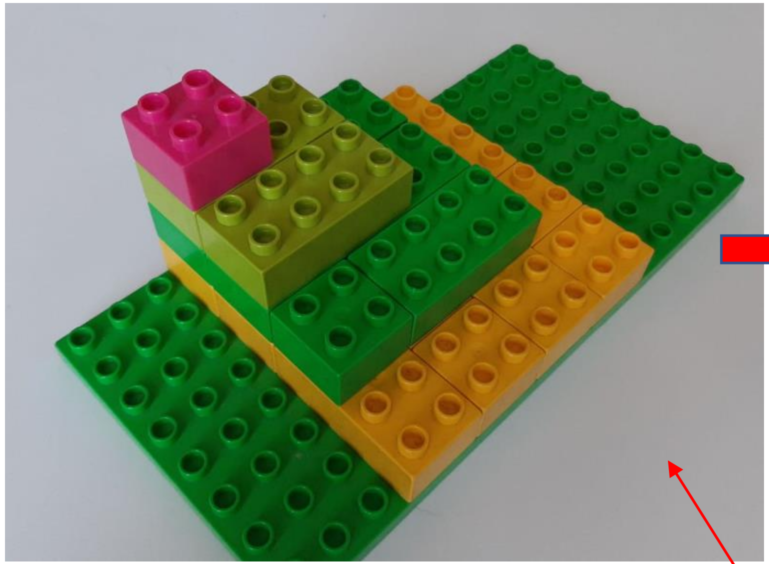


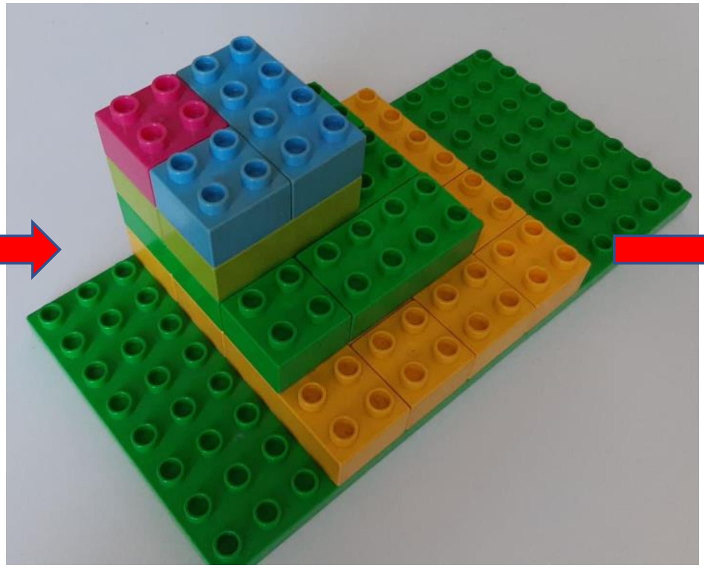
Un modo per trovare la somma dei quadrati dei primi 4 numeri naturali è quello suggerito nel video “La piramide a gradoni quadrati di lato 4 e gli 3 muretti realizzati con i mattoncini per le costruzioni“.

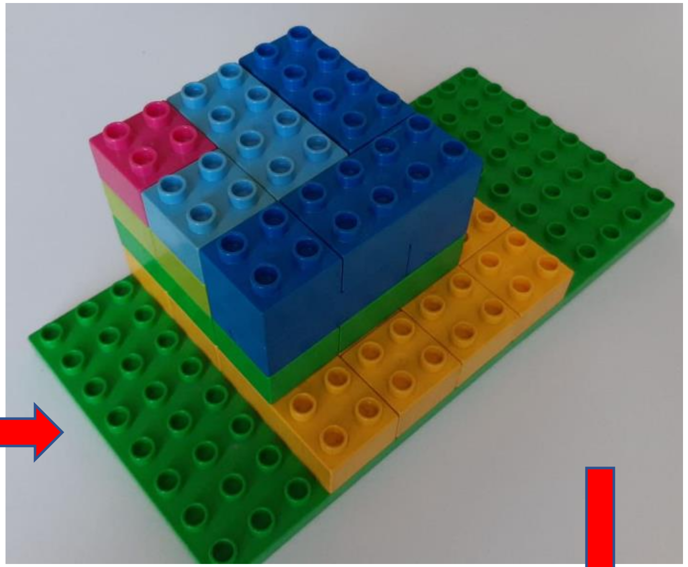
Generalizzando quanto visto nel caso particolare di n=3, riesci a trovare la formula della somma dei quadrati dei primi n numeri naturali?

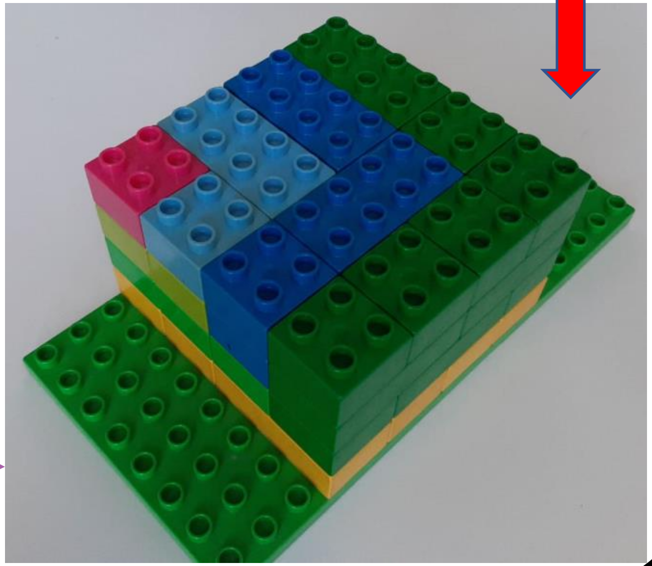
Attività 4 – postazione 5

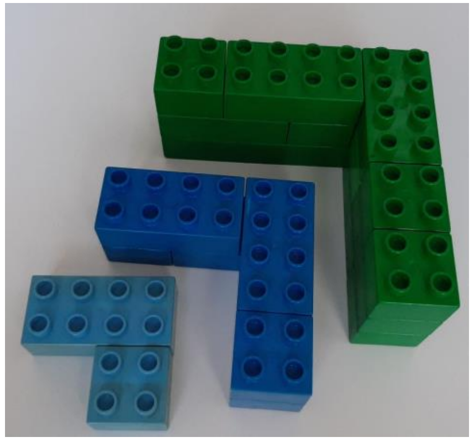
Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali
La piramide a n gradoni quadrati e gli n-1 muretti











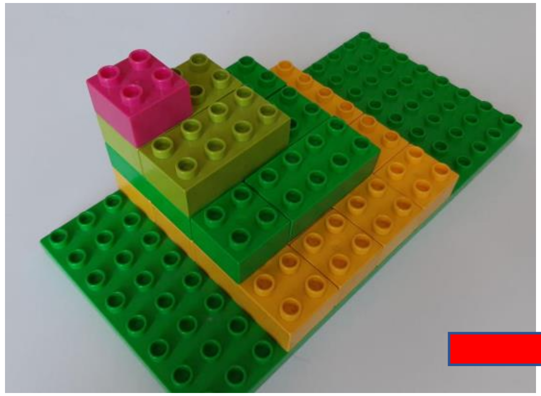
$n = 4$

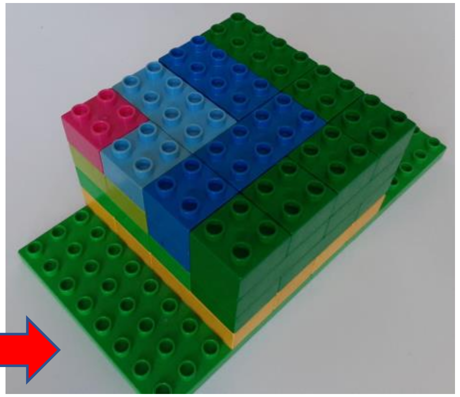
$(1^2+2^2+3^2+4^2) + [(3x1)+(5x2)+(7x3)] = 4^3$

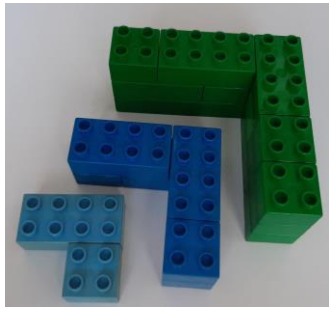
Classe >II
Sommatorie

Attività 4 – postazione 5

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali
La piramide a n gradoni quadrati e gli n-1 muretti







n = 4

$(1^2+2^2+3^2+4^2) + [(3x1)+(5x2)+(7x3)]= 4^2$

Caso generale

$(1^2+2^2+...+n^2) + [(3x1)+(5x2)+ ...+(2n-1)x(n+1)] = n^3$

$(1^2+2^2+...+n^2) = n^3- [(3x1)+(5x2)+ ...+(2n-1)x(n+1)]$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=n^3 - \sum_{i=1}^{n}(2i-1)(i-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=n^3 - \sum_{i=1}^{n} 2i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2=n^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i - n$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2=n^3 - 3\,\frac{n\,(n+1)}{2} - n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n\,(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$$

Attività 4 – postazione 6

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali

Il telescopio

Applica un procedimento analogo a quello utilizzato nelle omonime attività delle Fasi I e IV partendo questa volta dalla differenza $(i+1)^3 - i^3$.

Riesci ad ottenere in funzione di n il valore di $1^2+2^2+\ldots+n^2$?

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali

Attività 4 per gruppi
e postazioni

↓

Attività 4
discussione di bilancio

↓

Attività 4
validazione risultati

INDUZIONE

obiettivo attività 5:

Somma dei cubi
dei primi n numeri naturali

Attività 5

Somma dei cubi dei primi n numeri naturali

POSTAZIONE 1 – Nicomaco

POSTAZIONE 2 – I due grattacieli

POSTAZIONE 3 – L’n-esimo cubo e la somma di n dispari consecutivi

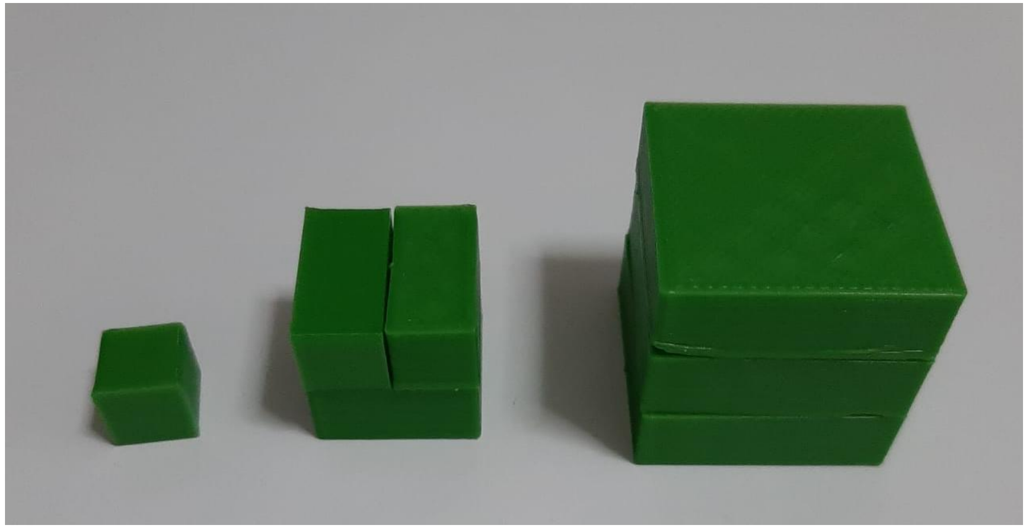
POSTAZIONE 4 – Il telescopio

\# GRUPPI $\leq$ # POSTAZIONI

Attività 5 – postazione 1

Somma dei cubi dei primi n numeri naturali
Nicomaco

Sono dati tre cubi, di lati n=1,2,3 rispettivamente, costituiti ognuno da n parallelepipedi di dimensioni 1xnxn.
Nel caso di n=2 esattamente uno di questi parallelepipedi è spezzato a sua volta in due parallelepipedi di dimensioni 1x1x2.



- Prova a comporre un parallelepipedo di altezza 1 utilizzando tutti e solo i pezzi dei cubi di lati 1 e 2 e poi utilizzando tutti e solo i pezzi di quelli di lati 1,2 e 3. Quanto valgono rispettivamente la somma dei primi 2 e 3 cubi? Utilizza i modelli di cubi «a strati» di lati 4 e 5. Ripeti il ragionamento precedente. Quanto valgono rispettivamente la somma dei primi 4 e 5 cubi?

- Supponi di avere n cubi di lati 1,2,…, n rispettivamente costituiti ognuno da n parallelepipedi di dimensioni 1xnxn sovrapposti uno sull'altro. Considera poi che nel caso di n pari esattamente uno di questi parallelepipedi è spezzato a sua volta in due parallelepipedi di dimensioni 1xnx(n/2). Riesci a generalizzare quanto osservato nel caso dei tre cubi per trovare la formula della somma dei cubi dei primi n numeri naturali ?

Attività 5 – postazione 1

Somma dei cubi dei primi n numeri naturali
Nicomaco

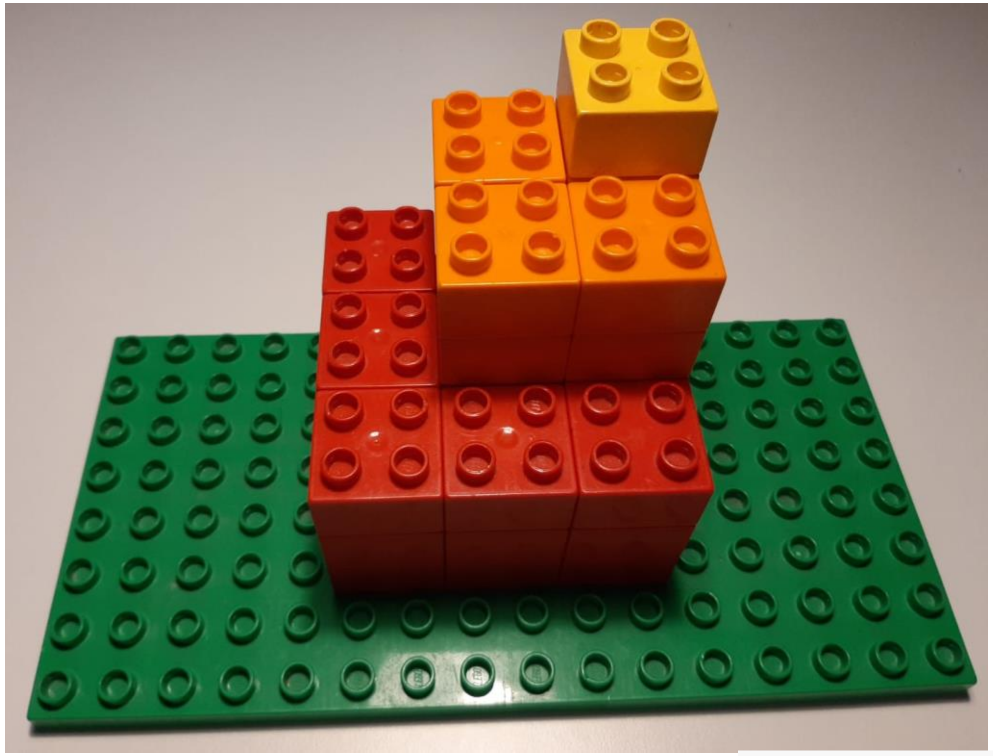
$1^2 + 2^2 + 3^2 = (1+2+3)^2$

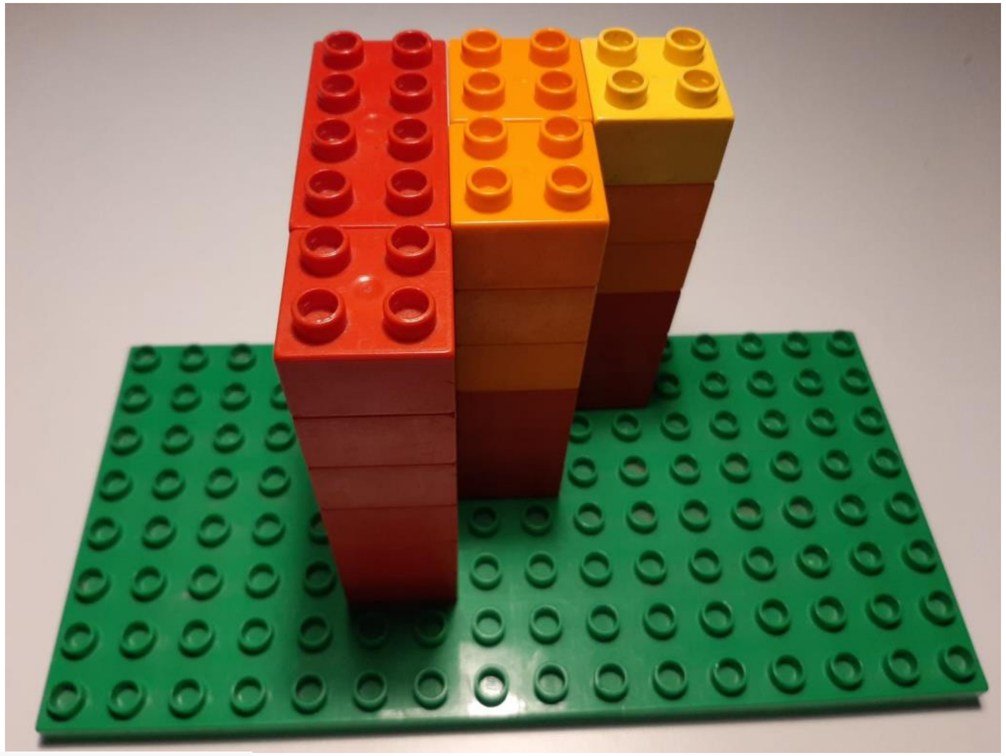
Lo studente ripete lo stesso procedimento con i modelli dei primi 4 e 5 cubi (costruiti in modo analogo ai precedenti) poi congettura:

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (1+2+\ldots+n)^2$

Attività 5 – postazione 2

Somma dei cubi dei primi n numeri naturali
I due grattacieli





Attività 5 – postazione 3

Charles Weatston, 1854

Somma dei cubi dei primi n numeri naturali
L'n-esimo cubo e la somma di n dispari consecutivi

Con riferimento a quanto scritto a destra, sommando verticalmente i termini a primo membro si ha la somma dei cubi dei primi quattro numeri naturali .

$1^3 = 1$

$2^3 = 3+5$

$3^3 = 7+9+11$

$4^3 = 13+15+17+19$

- Quanti sono i termini che compaiono a secondo membro rispettivamente nella prima, nella seconda, nella terza e nella quarta riga?
- Quanti sono in tutto i termini che compaiono a secondo membro delle quattro uguaglianze?
- Come può essere espresso questo risultato in termini di numeri triangolari?
- Utilizzando la formula che permette di calcolare la somma dei primi n numeri dispari scoperta nell'attività 2 di questo laboratorio, sai stabilire quanto vale la somma di tutti i termini a secondo membro?
- Sai esprimere opportunamente questo risultato in termini di numeri triangolari?
- Generalizzando quanto visto ora nel caso particolare della somma dei primi 4 cubi, riesci a trovare una formula che permette di determinare la somma dei primi n cubi?

Attività 5 – postazione 4

Somma dei cubi dei primi n numeri naturali

Il telescopio

Applica un procedimento analogo a quello utilizzato nelle omonime attività delle Fasi I e IV partendo questa volta dalla differenza $(i+1)^4 - i^4$.

Riesci ad ottenere in funzione di n il valore di $1^3+2^3+\ldots+n^3$?

Somma dei cubi
dei primi n numeri naturali

Attività 5 per gruppi e postazioni

↓

Attività 5 discussione di bilancio

↓

Attività 5 validazione risultati

INDUZIONE

grazie dell’attenzione