



UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Matematica e Musica

Fabio Bellissima



1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

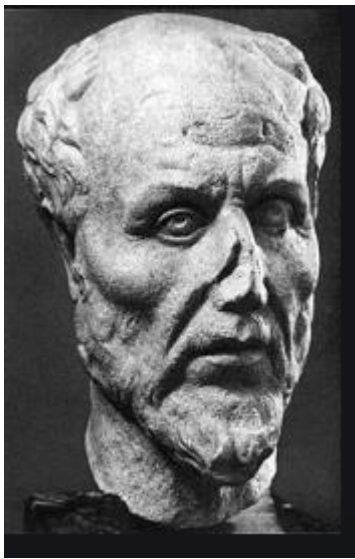
6. Ancora calcoli

8. I *minimi numeri*

7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

10. Frazioni continue



Proclo (412-485)

Commento al Primo libro degli Elementi di Euclide:

“Ora, i Pitagorici erano d'opinione di dividere l'intera scienza matematica in quattro parti: [...] l'*aritmetica* considera il numero per se stesso, la *musica* lo considera rispetto ad un altro numero; la *geometria* considera l'estensione come immobile, l'*astronomia* la considera mobile su se stessa.”

Musica = Teoria dei rapporti tra numeri naturali.

Come è stato possibile?



1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

8. I *minimi numeri*

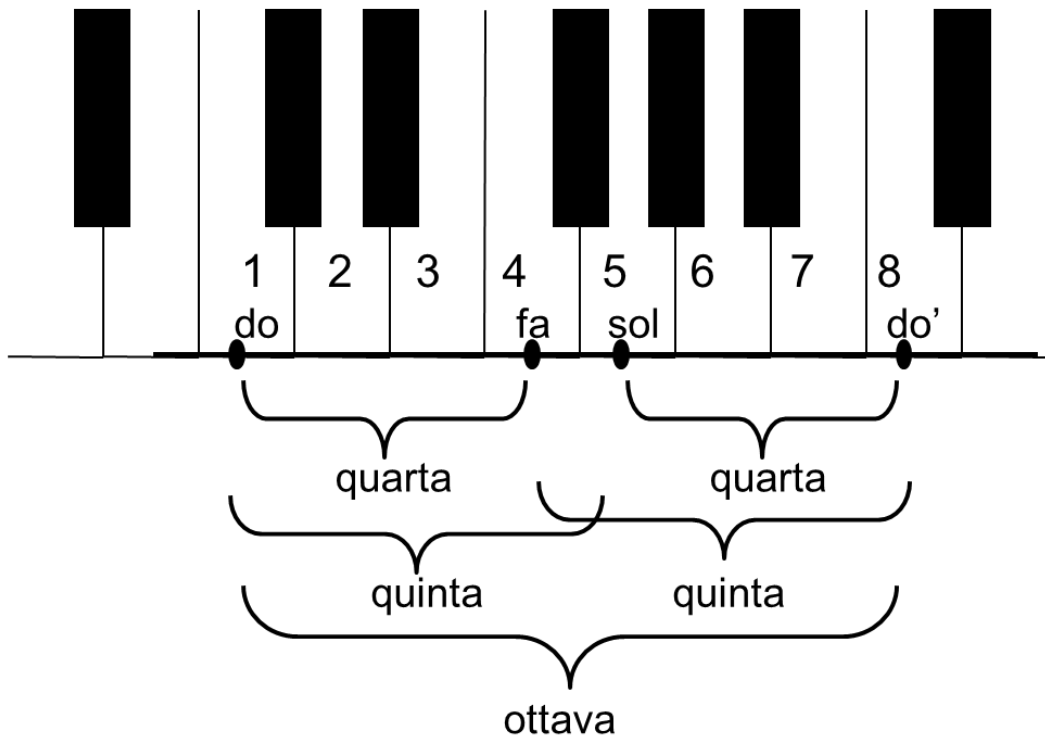
7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

10. Frazioni continue

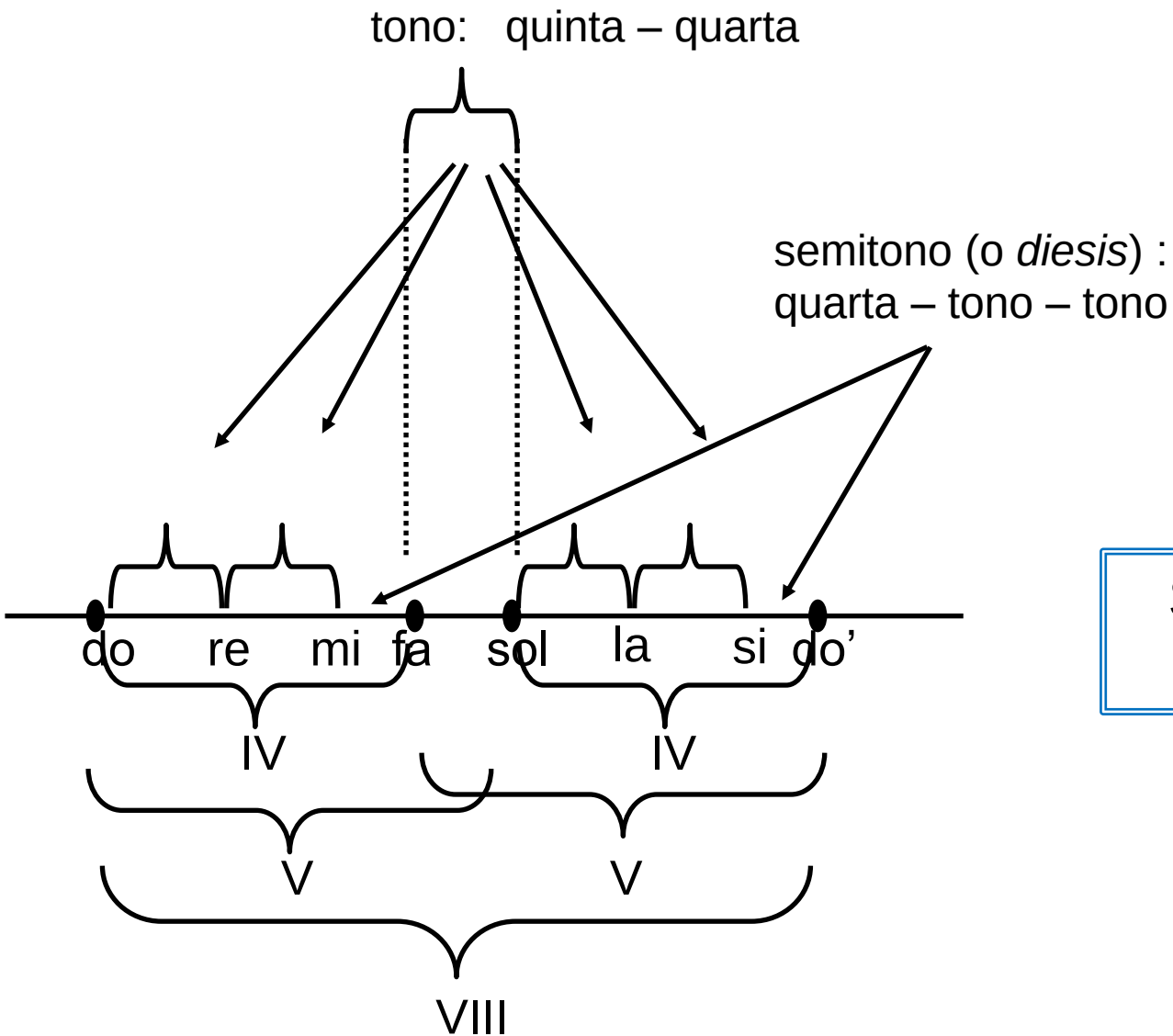
1. La scelta dei suoni della scala.

Le consonanze fondamentali



I nomi attuali delle consonanze sono fanno riferimento alla scala diatonica di sette note.

Tuttavia il concetto di consonanza ha preceduto la definizione della scala e ne è stato il motore.



Scala di genere
diatonico

Consonanze e generi scalari erano
“antichi” e importanti.



Platone (428 – 348)

Leggi, III 700A-701B

ATENIESE - Cari amici, al tempo di quella antica legislazione il popolo non era detentore della sovranità, ma si sottometteva volentieri alle leggi.

MEGILLO - A quali leggi?

ATENIESE - In primo luogo, alle leggi che riguardano la musica. Allora, nella nostra Città la musica era divisa in certi generi suoi propri e in certe figure. [...] Col trascorrere degli anni ebbero il sopravvento degli artisti per natura dotati di estro poetico, ma del tutto all'oscuro di ciò che è giusto e corretto in campo musicale. [...] In seguito a questa libertà è sorto il rifiuto a sottostare all'autorità costituita.

1. La scelta dei suoni della scala.



2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

8. I *minimi numeri*

7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

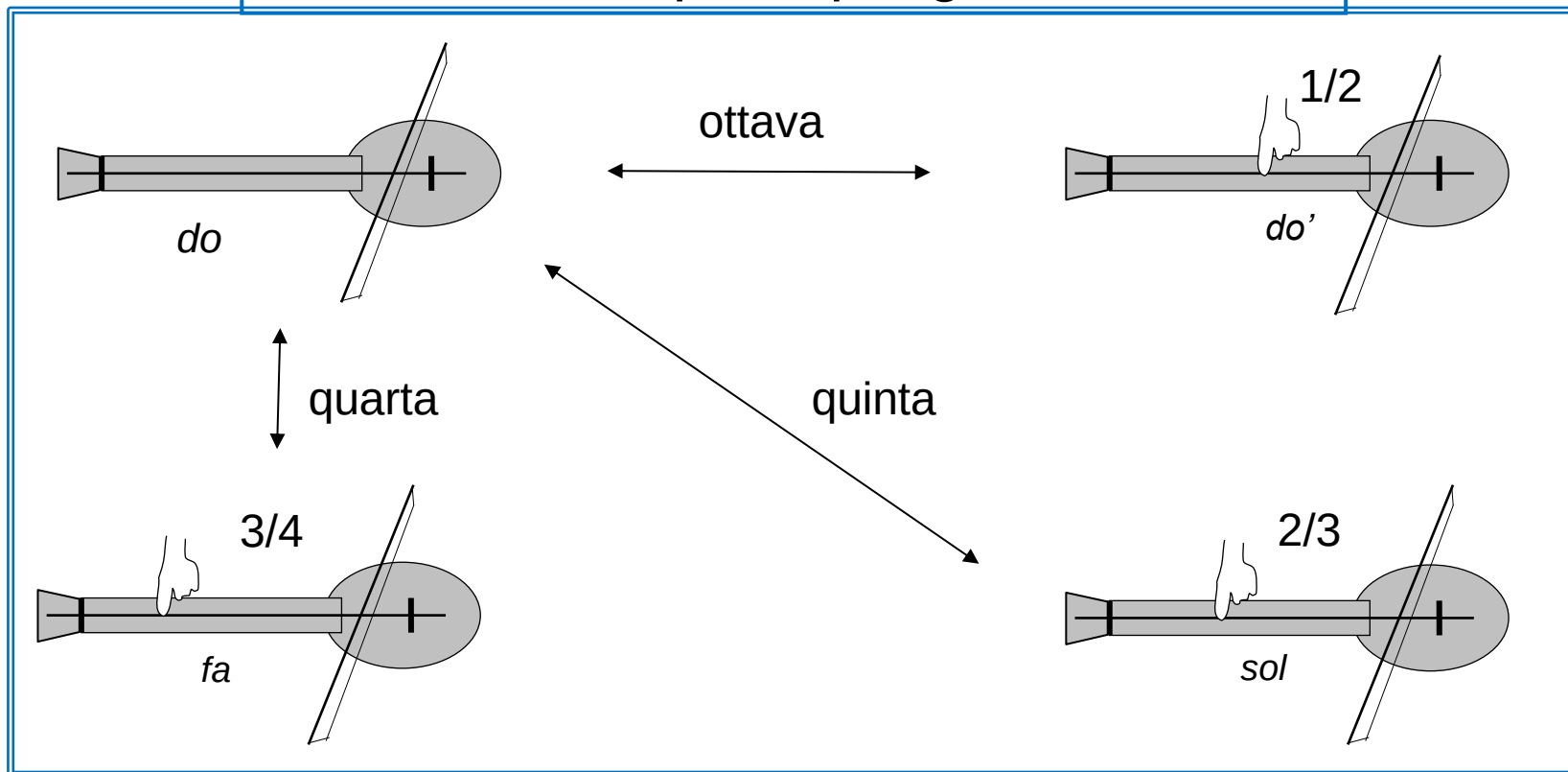
10. Frazioni continue

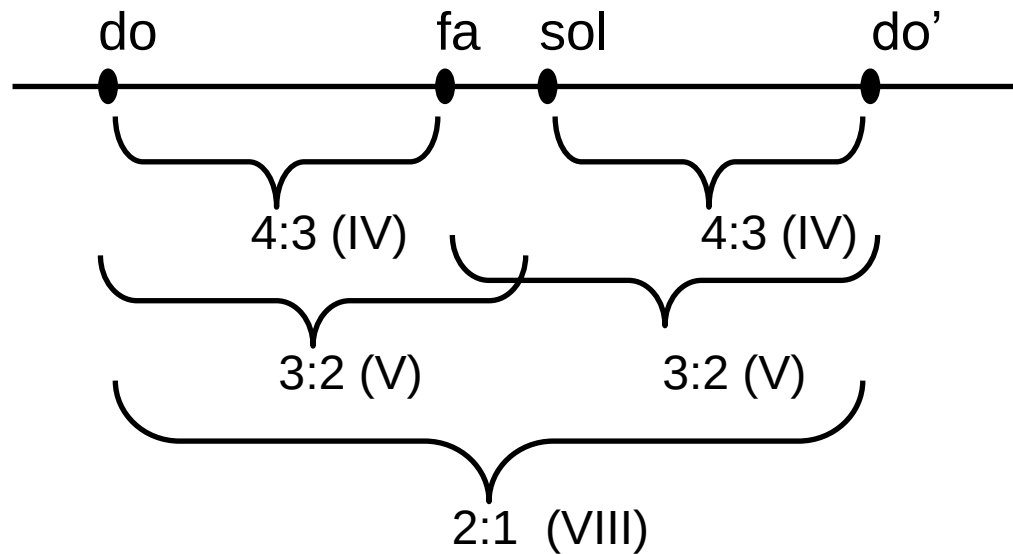
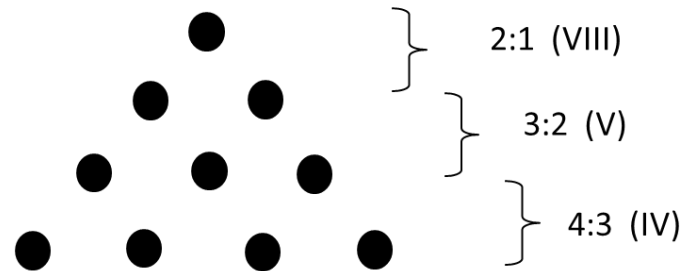


2. Arrivano i numeri

Pitagora (570 – 495)

La “scoperta pitagorica”





minimi numeri naturali a produrre simultaneamente tutti i rapporti

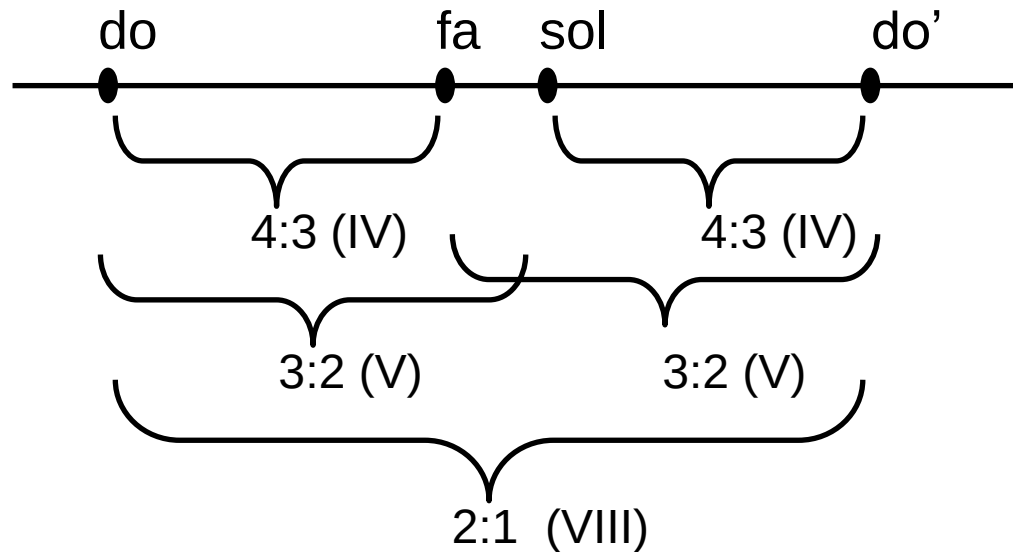


12

9

8

6



La scoperta ebbe un effetto dirompente

Talete: *tutto è acqua*

Anassimene: *tutto è aria*

Anassimandro: *tutto è apeiron*

Pitagora: *tutto è numero*

princìpi fisici



Aristotele (384-322)

Metafisica, Z2, 1028 b 16

“I Pitagorici, per il fatto che vedevano molte proprietà dei numeri presenti nei corpi sensibili, supposero che le cose reali fossero numeri. E perché? Perché le proprietà dei numeri si trovano nella musica, nel cielo e in molte altre cose.”

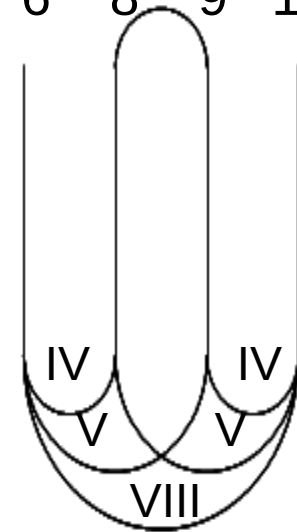
e duraturo





epogdoon

6 8 9 12



1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri



3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

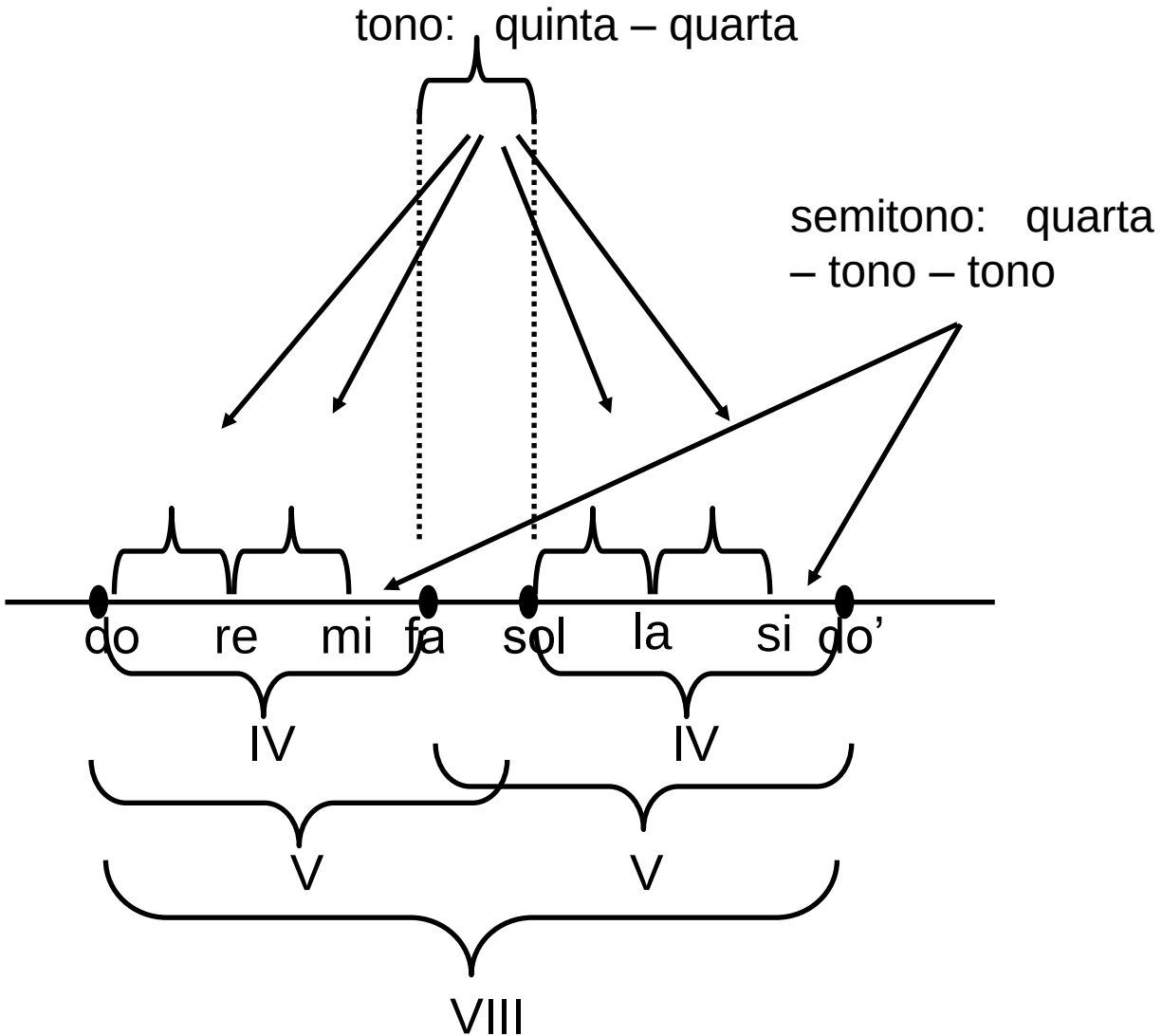
8. I *minimi numeri*

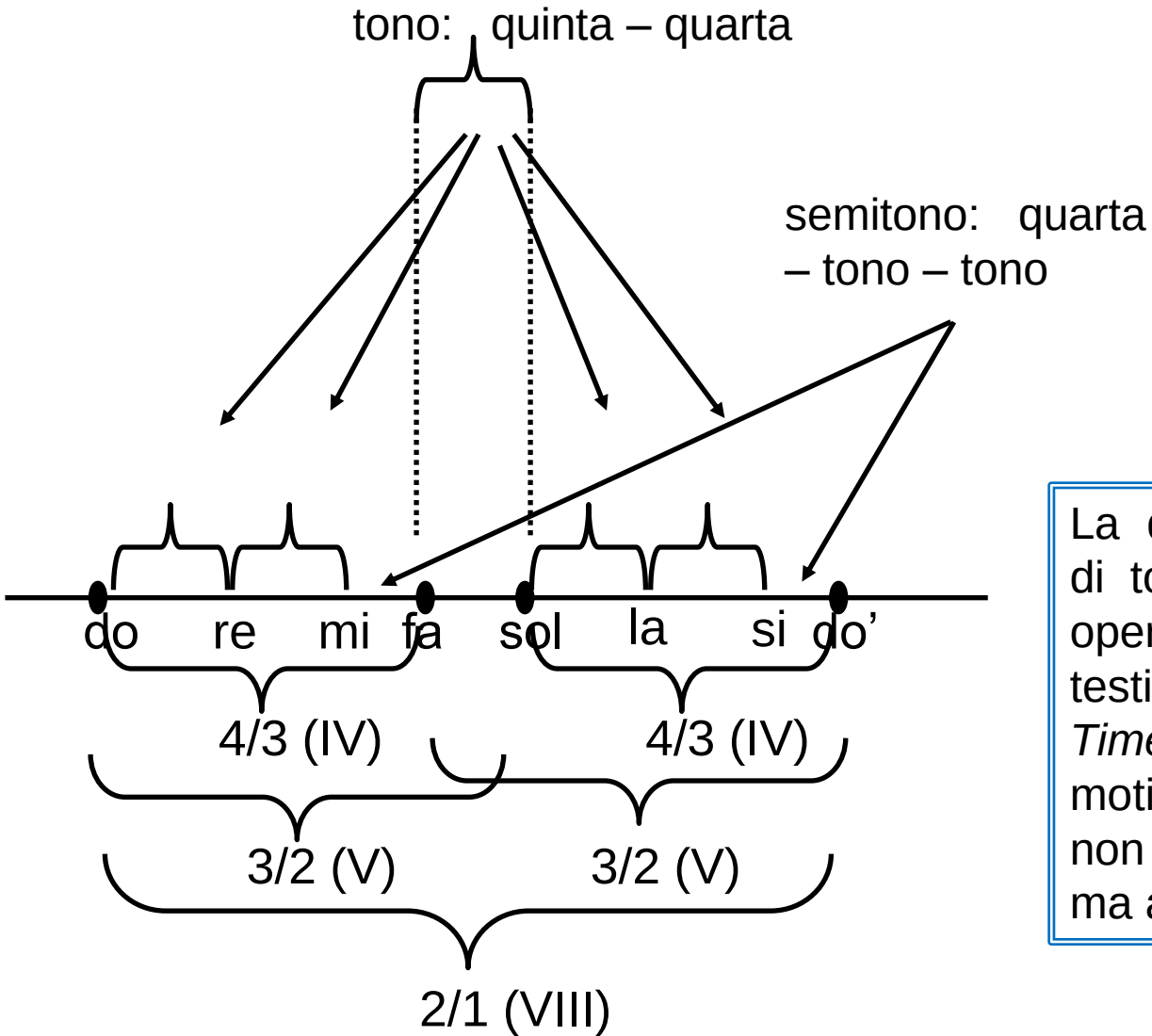
7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

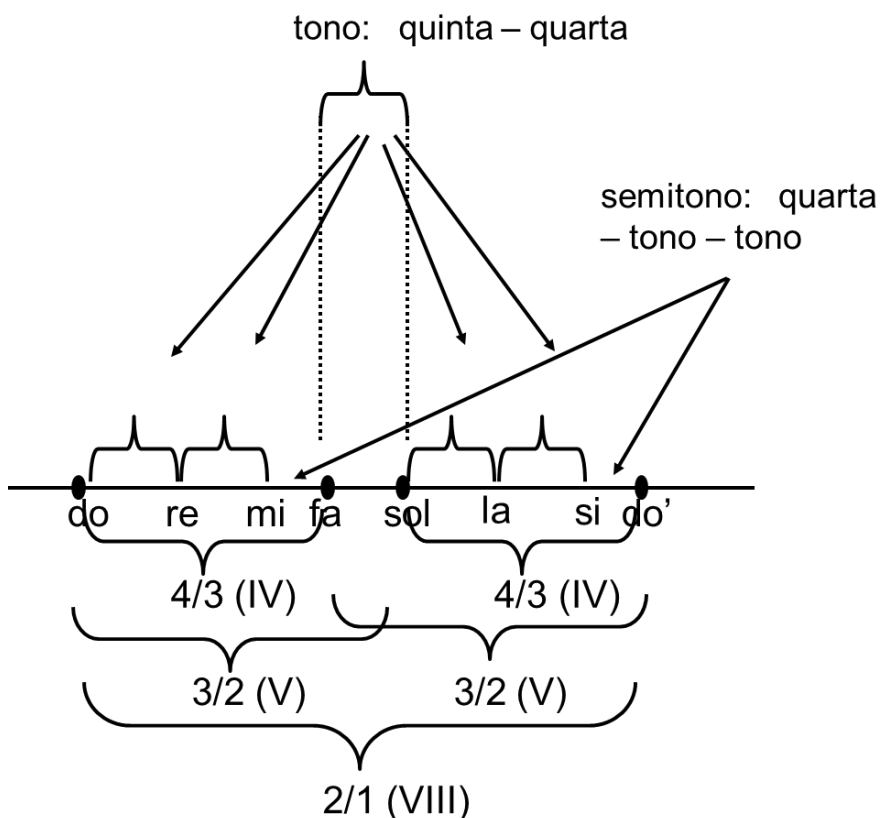
10. Frazioni continue

3. Primi calcoli



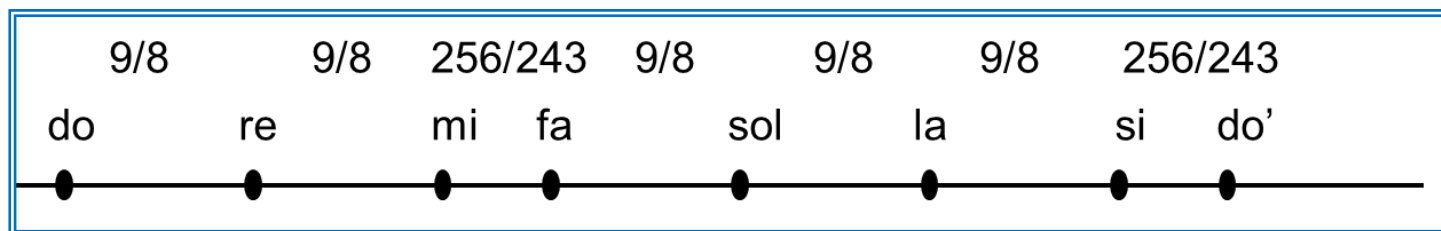


La quantificazioni degli intervalli di tono e semitono avvenne ad opera dei Pitagorici, ma la prima testimonianza scritta si trova nel *Timeo* di Platone. Per questo motivo questa scala è conosciuta non solo come *Scala pitagorica*, ma anche come *Scala del Timeo*.



Timeo 36 A-B

“ Poiché risultavano intervalli di una volta e mezzo ($3/2$), di una volta un terzo ($4/3$) e di una volta e un ottavo ($9/8$) nell'ambito degli intervalli precedenti, riempì con un intervallo di uno e un ottavo ($9/8$) gli intervalli di uno e un terzo ($4/3$), lasciandone una parte di ciascuno di essi in modo che l'intervallo di questa parte lasciata, in rapporto di numero a numero, avesse i suoi termini come 256 in rapporto a 243.”



1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli



4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

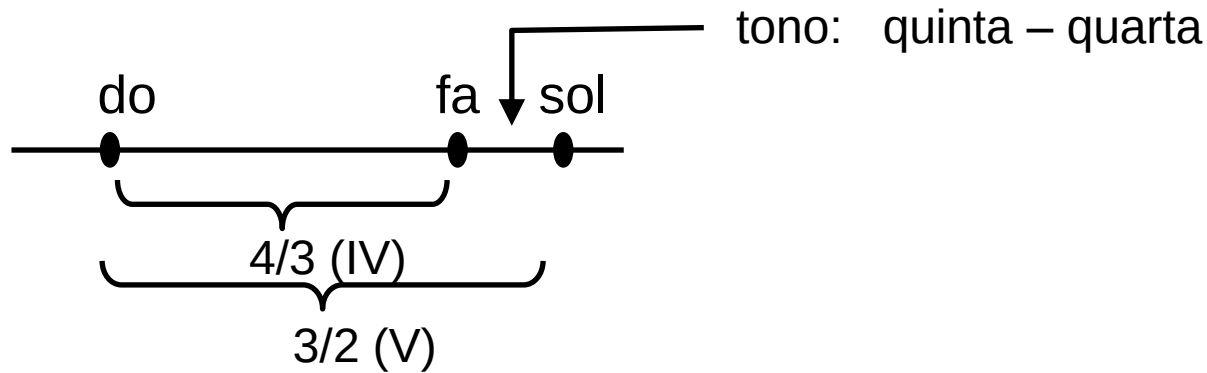
8. I *minimi numeri*

7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

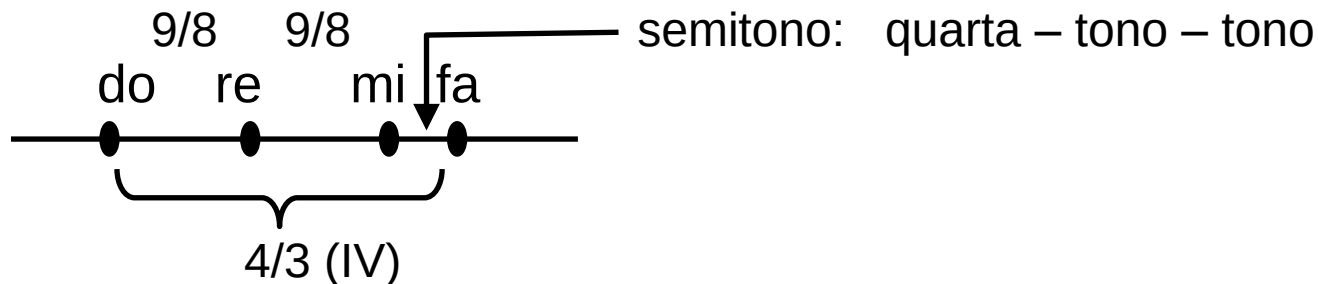
10. Frazioni continue

4. Lo sfasamento dei linguaggi



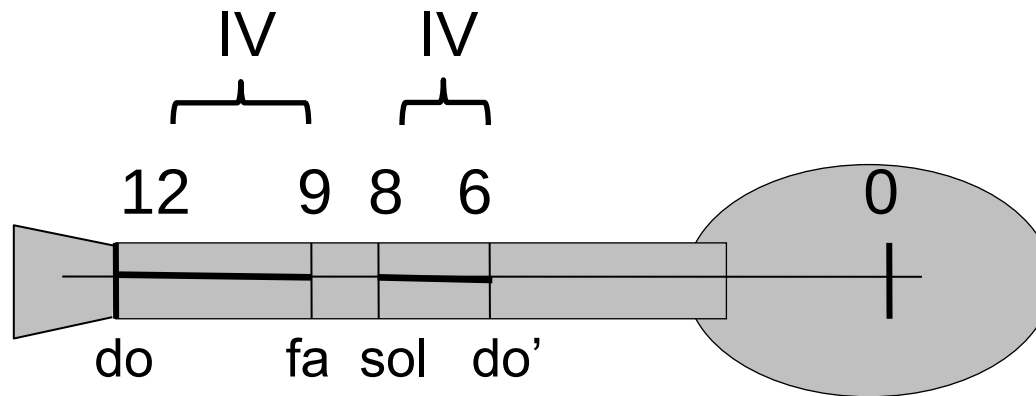
rapporto corrispondente al tono: $3/2 - 4/3$ NO

rapporto corrispondente al tono: $(3/2) / (4/3) = 9/8$



rapporto corrispondente al semitono: $4/3 - 9/8 - 9/8$ NO

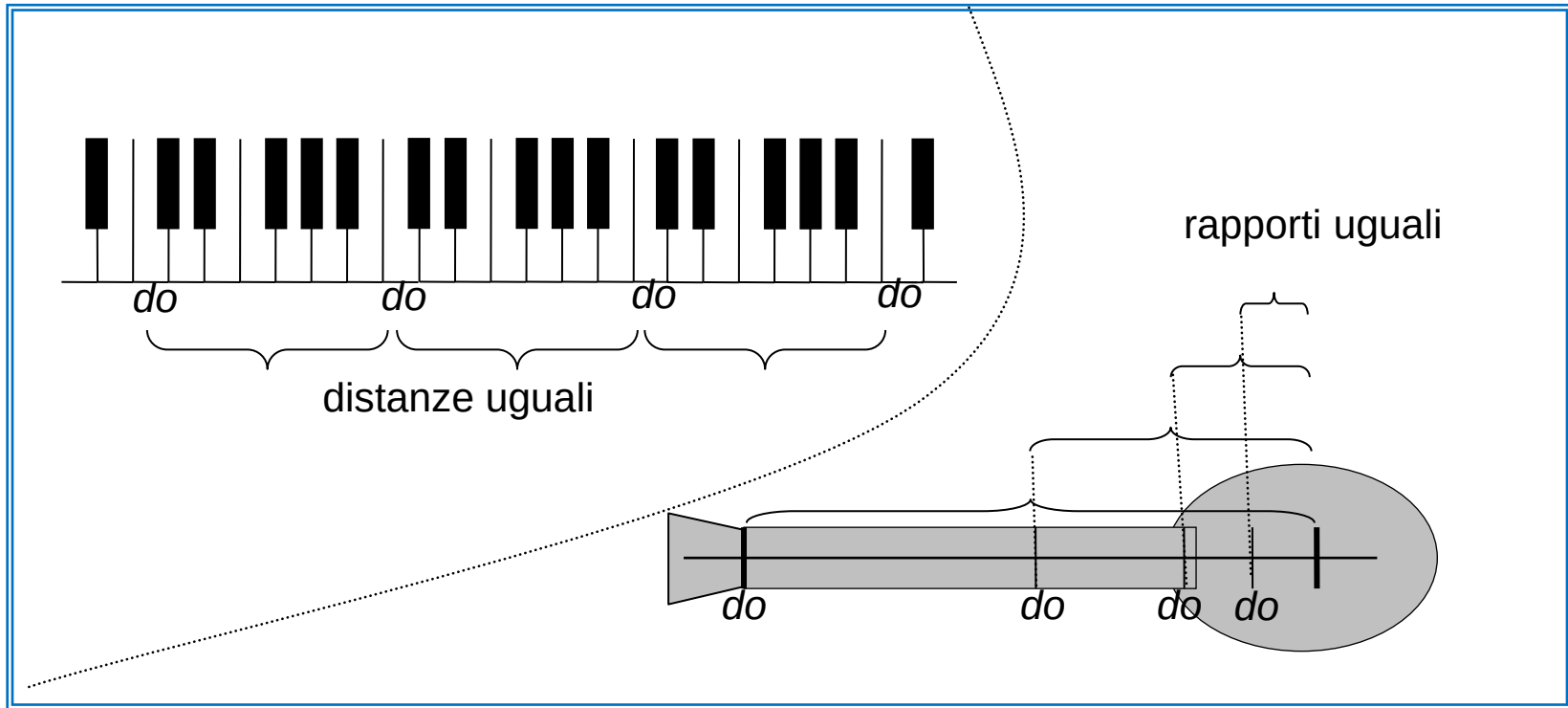
rapporto corrispondente al semitono: $(4/3) / (9/8) / (9/8) = 256/243$



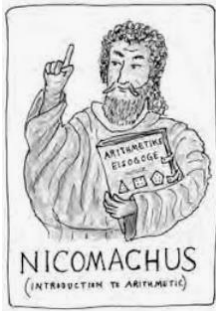
$$12 - 9 \neq 8 - 6$$

$$12 : 9 = 8 : 6$$

L'intuizione musicale considera un intervallo come una **differenza**, ma percepisce come uguali due intervalli quando questi sono espressi dallo stesso **rapporto**



Lo sfasamento tra la percezione musicale, che interpreta gli intervalli come differenze, e la realtà matematica, che associa agli intervalli dei rapporti, produce un sfasamento anche sulle **operazioni tra intervalli**.



Nicomaco (c. 60-120)

“ Sbaglia chi ritiene che differenza e rapporto siano la stessa cosa. ”



Porfirio (233-305)

“E' la differenza che fa l'intervallo. E la differenza è diversa dal rapporto. Infatti tra 6 e 3 la differenza è 3, il rapporto 2. Inoltre, tra i numeri 6 e 2, il rapporto è 3 e la differenza 4; ma tra 20 e 16 la differenza è ancora 4 ma il rapporto è sesquiquarto $[5/4]$. Quindi che la differenza sia diversa dal rapporto è manifesto. Tuttavia mostriamo come il rapporto, e la complessione tra loro dei termini comparati, sia detto anche intervallo. Troviamo infatti "intervallo" al posto di "rapporto" comunemente tra gli antichi [vengono elencati molti nomi tra cui il Platone del *Timeo*]. ”

differenza di intervalli (Es.: $V - IV = T$)



quoziente dei corrispondenti rapporti: $(3/2) / (4/3) = 9/8$

somma di intervalli (Es.: $IV + T = V$)



prodotto dei corrispondenti rapporti: $(4/3) \cdot (9/8) = 3/2$

moltiplicazione per n di un intervallo (Es.: $3 \cdot T = T + T + T$)



potenza ennesima del corrispondente rapporto: $(9/8) \cdot (9/8) \cdot (9/8) = (9/8)^3$

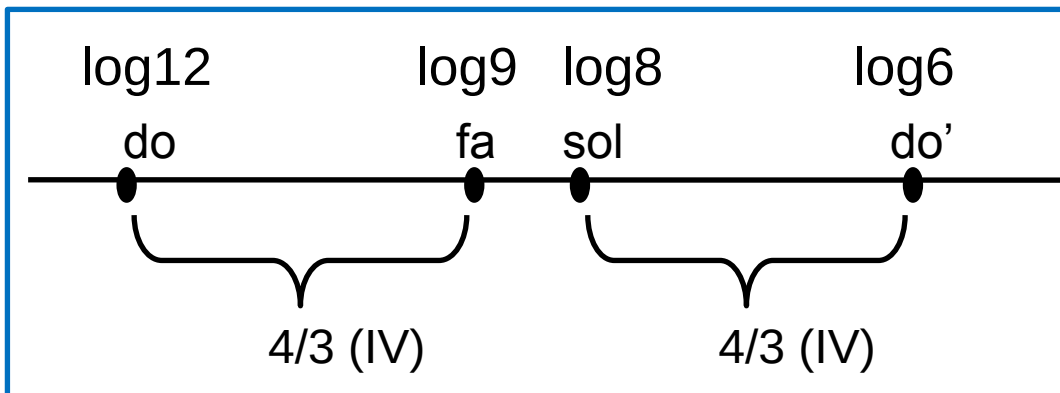
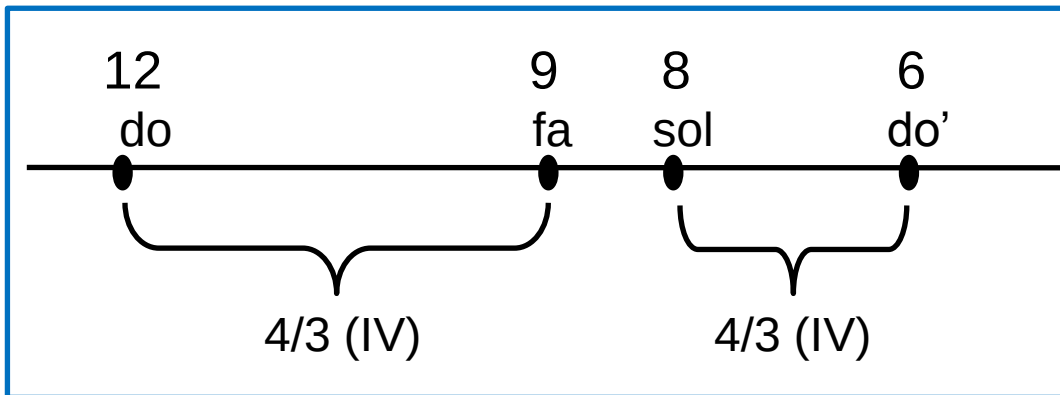
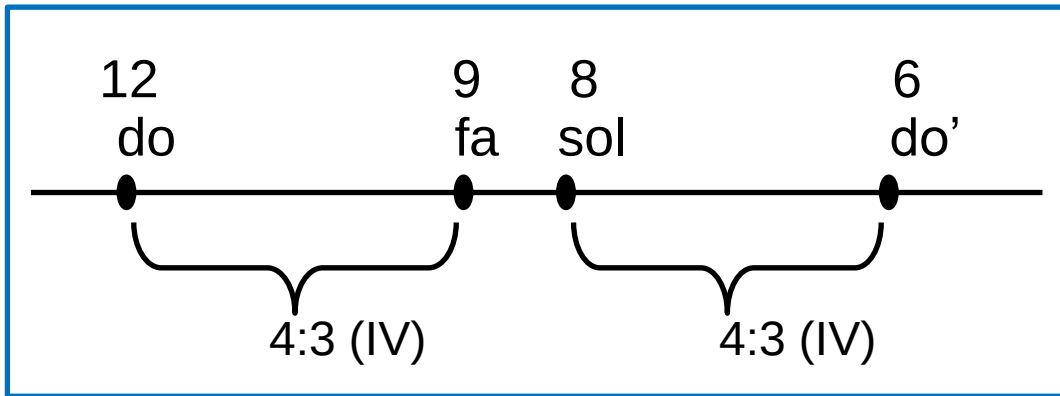
divisione per n di un intervallo (Es.: $T/2 + T/2 = T$)



radice ennesima del corrispondente rapporto: $\sqrt{\frac{9}{8}} \cdot \sqrt{\frac{9}{8}} = 9/8$

differenza	quoziente
somma	prodotto
prodotto per n	potenza ennesima
divisione per n	radice ennesima
media aritmetica	media geometrica

$$\frac{a + b}{2} \longrightarrow \sqrt[2]{a \cdot b}$$



$$a / b = c / d$$

$$\log(a/b) = \log(c/d)$$

$$\log(a) - \log(b) = \log(c) - \log(d)$$

1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

8. I *minimi numeri*

7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

10. Frazioni continue



5. Metafisica

Due citazioni precedenti:

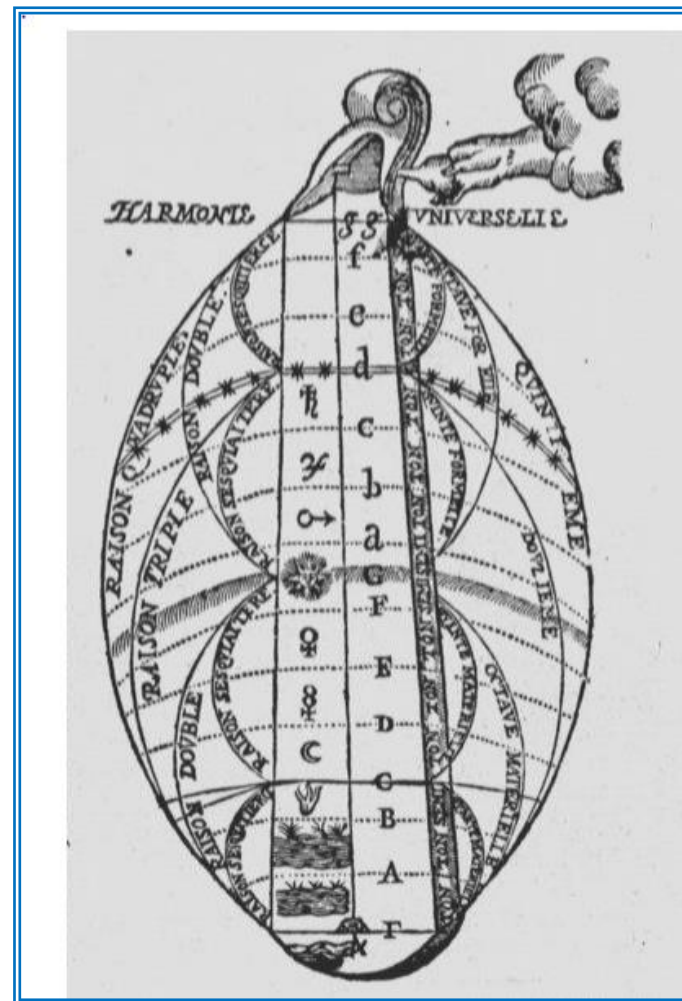
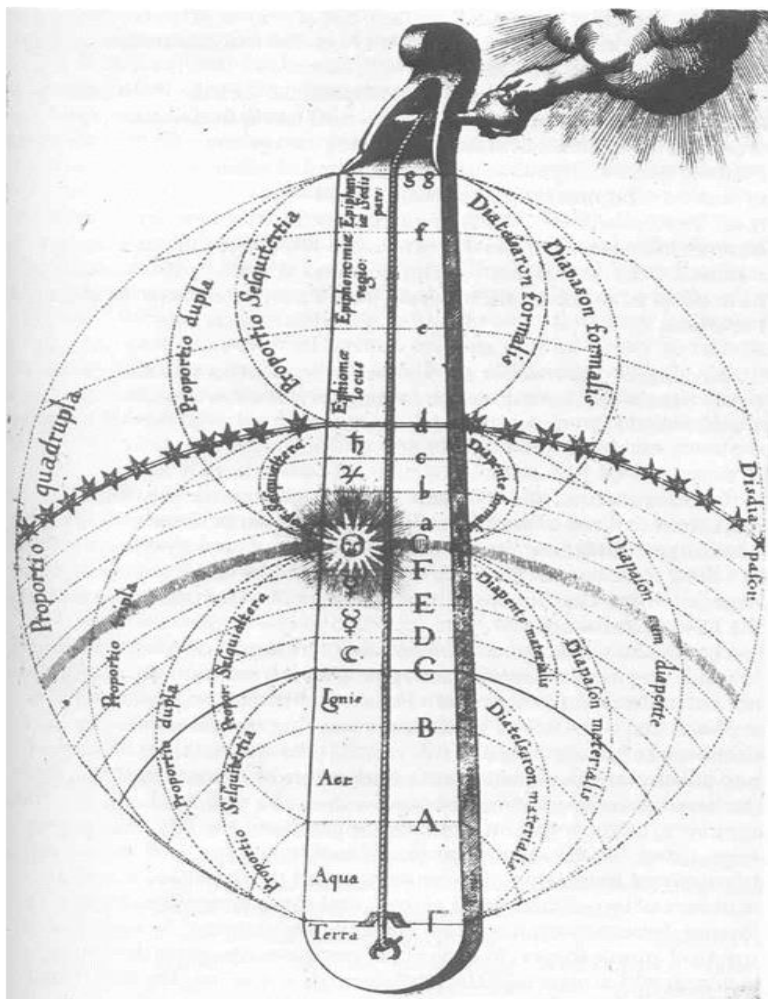
Aristotele, *Metafisica*, Z2, 1028 b 16

“I Pitagorici, per il fatto che vedevano molte proprietà dei numeri presenti nei corpi sensibili, supposero che le cose reali fossero numeri. E perché? Perché le proprietà dei numeri si trovano nella musica, nel cielo e in molte altre cose.”

Platone, *Timeo*, 36 A-B

“Poiché risultavano intervalli di una volta e mezzo ($3/2$), di una volta un terzo ($4/3$) e di una volta e un ottavo ($9/8$) nell'ambito degli intervalli precedenti, **riempì** con un intervallo di uno e un ottavo ($9/8$) gli intervalli di uno e un terzo ($4/3$), lasciandone una parte di ciascuno di essi in modo che l'intervallo di questa parte lasciata, in rapporto di numero a numero, avesse i suoi termini come 256 in rapporto a 243.”

Domanda: chi il soggetto e quale l'oggetto di “riempì”?



Risposta: il *Demiurgo* e l'*Anima del mondo*.

Sono nate l'*Armonia del Cosmo* e la
Musica delle Sfere.

Sono durate oltre due millenni:



Franchino Gaffurio

(1451-1522)

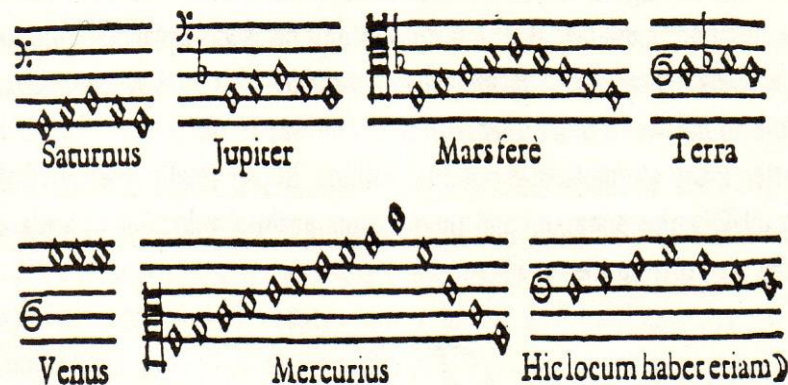
Theorica Musice (1492). "La stella del Sole dista dalla Terra tre toni e un semitono minore, intervallo detto *diapente*, mentre dalla Luna due toni e un semitono minore, intervallo detto *diatessaron*. Dal Sole alla stella di Marte, chiamata *Pyrios*, c'è altrettanta distanza quanta dalla Terra alla Luna, e corrisponde a un tono. Da qui alla stella di Giove, detta *Fetonte*, circa la metà, cioè un semitono minore; da Giove alla stella di Saturno, chiamata *Fenon*, poco di più, cioè un semitono maggiore; da qui al cielo più alto dove si trovano le costellazioni c'è un semitono minore; dal cielo più alto al Sole l'intervallo è detto *diatessaron*, cioè due toni e un semitono. "



Giovanni Keplero

(1571-1630)

Mysterium cosmographicum (1597)



non senza critiche:



Aristotele (384-322)

Metafisica, A 5, 986 a. "L'affermazione che dal moto degli astri si generi armonia, in quanto i rumori da essi prodotti sarebbero consonanti, è una trovata graziosa e originale, ma non corrisponde al vero. [...] Ammesso che le velocità determinate dalle consonanze stiano tra loro secondo i rapporti delle consonanze, quei filosofi affermano che la rotazione degli astri genera un suono armonioso. Ma poiché sembrerebbe strano che noi non sentissimo questo suono, dicono che la causa di ciò è che esso esiste già al momento in cui nasciamo, sicché non è reso percepibile dal contrasto col silenzio. "

Il cielo, II 9 (290 b). "E quante concordanze [i Pitagorici] potevano mostrare nei numeri e nei rapporti musicali in relazione alle vicende e parti del cielo e all'intero ordinamento dell'universo, le raccoglievano cercando di farle corrispondere a quelle. Che se qualcosa non tornava, facevano di tutto perché la loro trattazione si mantenesse coerente."

1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

8. I *minimi numeri*

7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

10. Frazioni continue



6. Ancora calcoli

I commi

Nella scala pitagorica, due semitoni sono uguali ad un tono?

Traduzione: $\left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{9}{8}$?

No. $\left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}}$; $\frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3}$ e $\frac{2^{16}}{3^{10}} \neq \frac{3^2}{2^3}$. Infatti $2^{16} \cdot 2^3 = 2^{19}$, $3^{10} \cdot 3^2 = 3^{12}$, e una potenza di 2 non può essere uguale ad una potenza di 3.

Due semitoni sono minori di un tono?

Traduzione: $\left(\frac{256}{243}\right)^2 < \frac{9}{8}$?

Sì. $2^{19} = 524288 < 531441 = 3^{12}$.

Qual è la differenza tra un tono e due semitoni? Traduzione: $\frac{9}{8} / \left(\frac{256}{243}\right)^2 = ?$

Calcolo: $\frac{3^2}{2^3} / \frac{2^{16}}{3^{10}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$. E' il cosiddetto **comma pitagorico** (ed è molto piccolo: il che giustifica il nome *semitono* dato all'intervallo corrispondente a $\frac{256}{243}$).

Il *comma pitagorico* corrisponde anche a quanto sei toni superano un'ottava. Lo troviamo calcolato in Euclide.
(c. 300 a.C.)

I commi

Sectio Canonis. Proposizione 9. Sei intervalli sesquiottavi sono maggiori di un intervallo doppio.

Sia A un numero, B in rapporto sesquiottavo con A, G in rapporto sesquiottavo B, D in rapporto sesquiottavo con G, E in rapporto sesquiottavo con D, Z in rapporto sesquiottavo con E, e H in rapporto sesquiottavo con Z. Dico che H è maggiore del doppio di A. Poiché abbiamo visto come trovare sette numeri ciascuno maggiore di un ottavo, siano A,B,G,D,E,Z,H i numeri trovati:

$$A = 262144$$

$$B = 294912$$

$$G = 331776$$

$$D = 373248$$

$$E = 419904$$

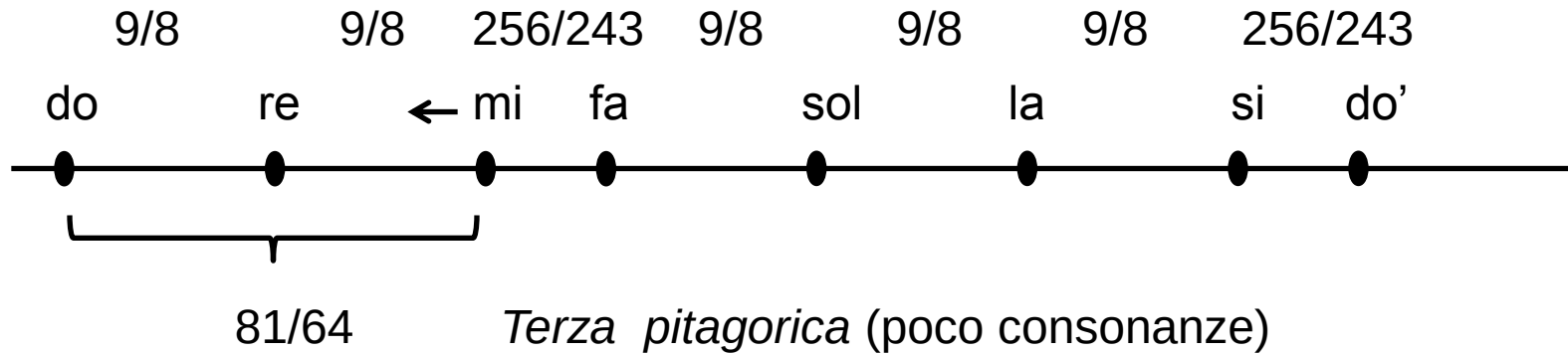
$$Z = 472392$$

$$H = 531441$$

ed abbiamo che H è maggiore del doppio di A.



Dalla *Scala pitagorica* alla *Scala naturale*

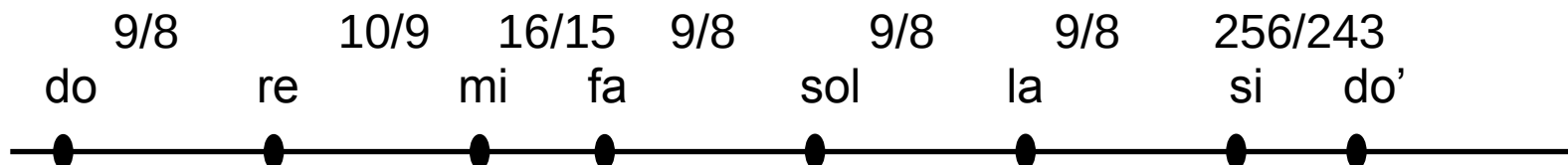


Rapporto "giusto" (consonante) : $5/4$ (= $80/64$)

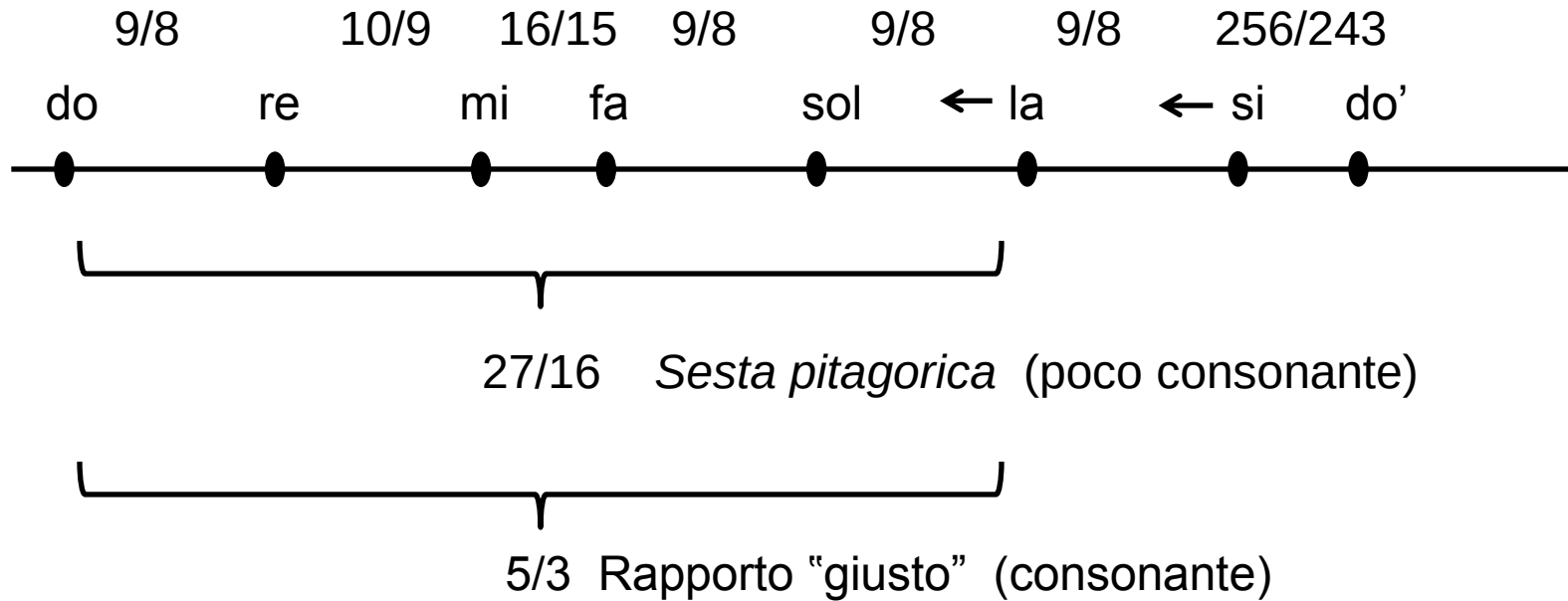
Intervallo di spostamento: $(81/64)/(5/4) = 81/80$ (**Comma sintonico**)

re-mi: $(5/4)/(9/8) = 10/9$ (*Tono minore*)

mi-fa: $(4/3)/(5/4) = 16/15$ (*Semitono naturale o maggiore*)



Dalla *Scala pitagorica* alla *Scala naturale*

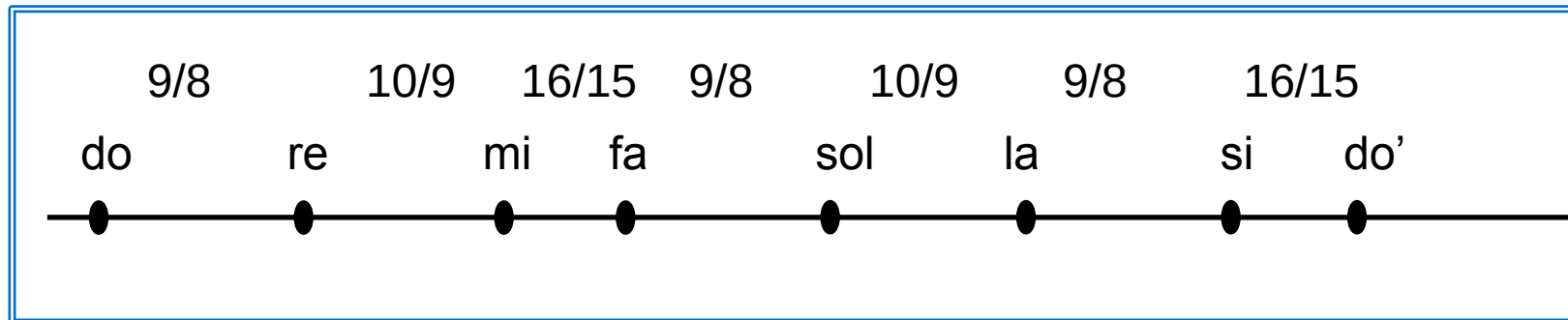


Intervallo di spostamento: $(27/16)/(5/3) = 81/80$ (*Comma sintonico*)

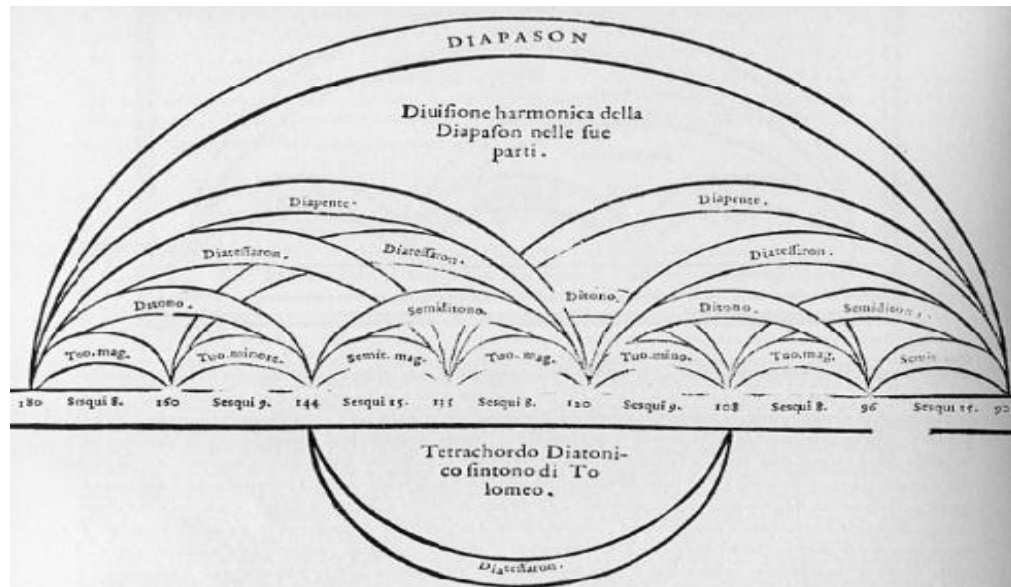
sol-la: $10/9$ (*Tono minore*)

si-do: $16/15$ (*Semitono naturale o maggiore*)

La *Scala naturale* o Scala di Zarlino



Gioseffo Zarlino
(1517-1590)



1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

8. I *minimi numeri*



7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

10. Frazioni continue

7. Il problema del semitono

Due semitoni pitagorici sono meno di un tono: $(254/243)^2 < 9/8$

Due semitoni naturali sono più di un tono: $(16/15)^2 > 9/8$

	differenza	quoziente
	somma	prodotto
	prodotto per n	potenza ennesima
→	divisione per n	radice ennesima

$$\text{semitono esatto} = \sqrt[2]{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

La musica incontra gli irrazionali, e si divide.

Plutarco (47-126)



De animae procreatione in Timaeo, c.17 .

"Uno degli intervalli è quello chiamato tono, la cui misura esprime di quanto la quinta è maggiore della quarta. Gli Armonici ritengono di riuscire a dividerlo a metà e di farne due intervalli, che chiamano ambedue semitoni. Ma i Pitagorici riconobbero **impossibile** la divisione in due parti uguali. "

due Scuole: Armonici
 Pitagorici



Archita (428-360)

I Pitagorici.

Dal Proemio della *Sectio Canonis* euclidea, attribuito ad Archita:

Principio di consonanza: "gli intervalli consonanti devono corrispondere a rapporti multipli $[n/1]$ o epimori $[(n+1)/n]$. "



Tutti gli intervalli musicali devono essere espressi da rapporti tra numeri naturali.

I Pitagorici.

Euclide. Sectio Canonis, Proposizione 16. "Il tono non è divisibile in due parti uguali, né in più parti uguali.

Abbiamo dimostrato che [il tono] è un intervallo epimorio $[(n+1)/n]$, e in un intervallo epimorio non cadono né uno né più medi proporzionali [Proposizione 3]. Quindi il tono non potrà essere diviso in parti uguali."



Proposizione 3. [Teorema di Archita] "In un intervallo epimorio non vi sono né uno né più medi proporzionali. "

i.e.: se $a : b = n+1 : n$ allora non esiste un numero naturale c tale che $a : c = c : b$, né esistono k numeri naturali $c_1, \dots, c_k$ tali che $a : c_k = c_k : c_{k-1} = \dots = c_2 : c_1 = c_1 : b$.

i.e.: se $a/b = (n+1)/n$, allora per ogni naturale k la radice $\sqrt[k]{(n+1)/n}$ è irrazionale.

(per il Principio di consonanza usato come principio ontologico)

La deriva idealistica di Platone. Dalla *Repubblica* 521 A-C:

Sprezzante contro gli Armonici:

"quei valorosi che non lasciano in pace le corde e le mettono continuamente alla tortura, tendendole sui pioli. "

"O forse non sai che anche nel campo dell'armonia si sta facendo qualcosa di analogo [a quanto successo per l'astronomia]? Infatti, misurando i rapporti fra gli accordi e i suoni ad orecchio, si fa quel che fanno gli astronomi: un lavoro del tutto inutile. "

ma critico anche con i Pitagorici tradizionali:

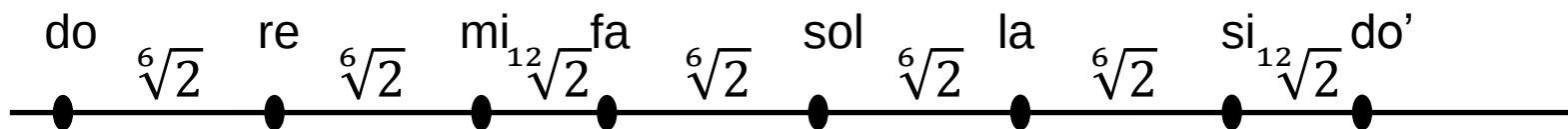
"Nelle armonie che si colgono per via dei sensi essi cercano, certamente, la formula aritmetica, però non risalgono ai veri problemi, e cioè non vanno a vedere quali siano i numeri armonici e quali no, e le ragioni per cui gli uni siano tali e gli altri no. "

Aristosseno

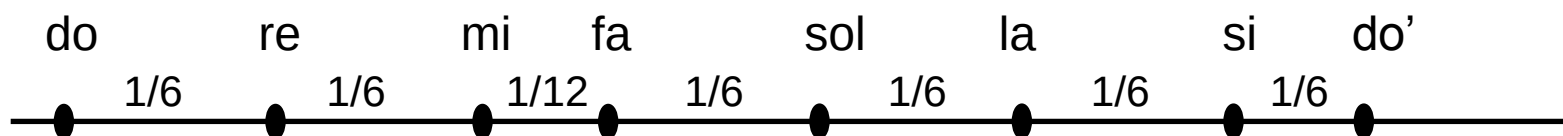
c.375-322

Gli Armonici

L'ottava è espressa dal rapporto epimorio 2:1. Per il Teorema di Archita non può esser divisa in intervalli uguali. Quindi, per i Pitagorici, una scala diatonica equabile, che presuppone l'interposizione di undici medi proporzionali, non è lecita.



Aristosseno presenta una scala diatonica equabile, ma è costretto a farlo in termini "musicali".



Vincenzo Galilei
1520-1591
(Armonico)

vs.

Ioseffo Zarlino
1517-1590
(Pitagorico)

Galilei:

"Il semitono [equabile] è in circa $18/17$. "

$$(18/17)^{12} = 1,985...$$

Zarlino:

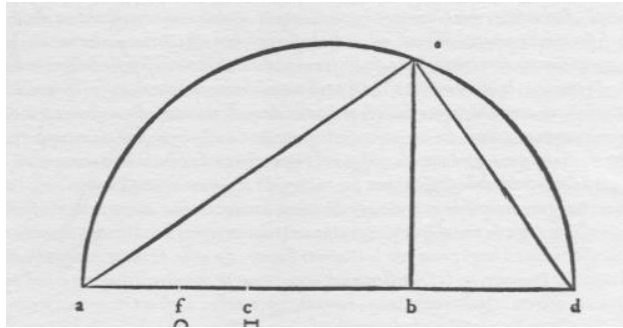
"Et in questo "in circa" che dice è da notare con diligenza da quelli che fanno professione di buoni matematici, perché è termine incognito che non è usato da alcuno nelle dimostrazioni se non da questo matematico moderno. "

Galilei:

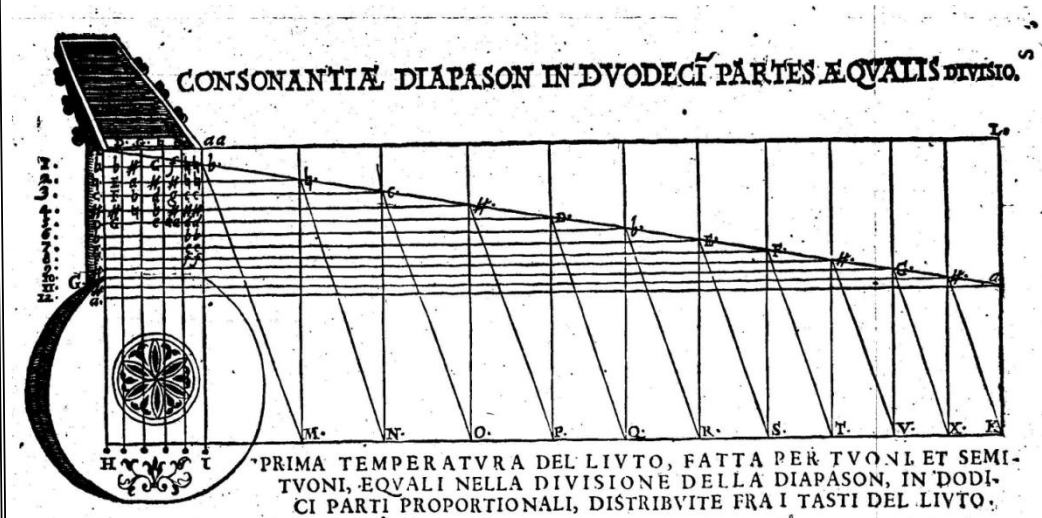
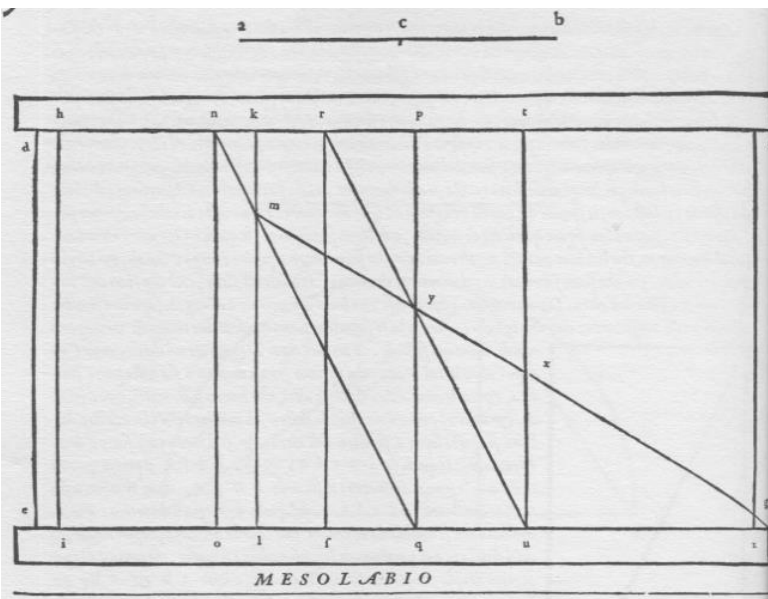
"[$18/17$] non ci da l'esatto della cosa, si come neanche l'apertura del compasso dopo l'haver descritto un cerchio non misura la circonferenza di esso in sei volte. "



Aritmetica vs. Geometria



Gioseffo Zarlino, *Istitutioni Harmoniche*, 1558 ; *Sopplimenti musicali*, 1588.



1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

8. I *minimi numeri*

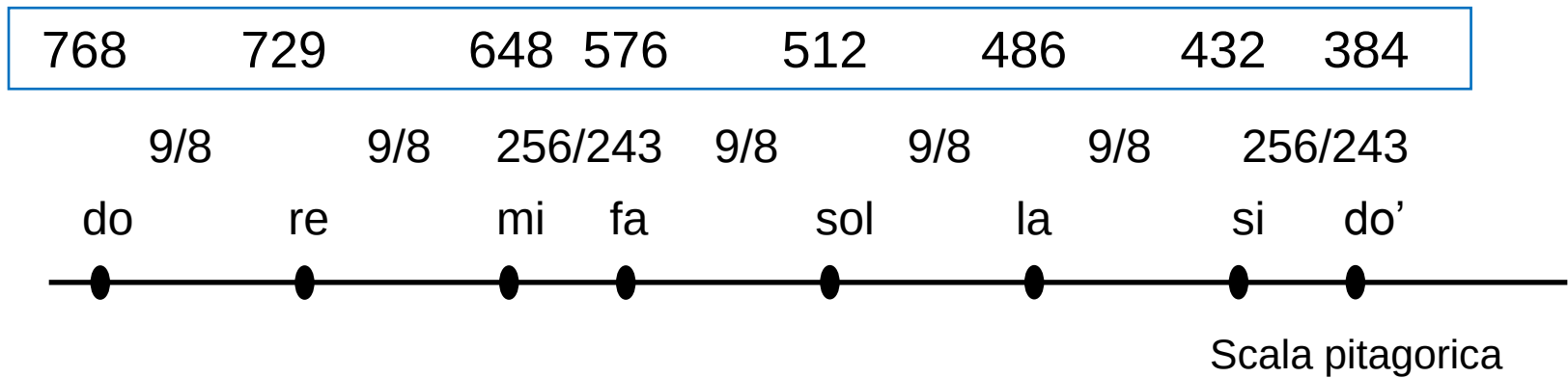
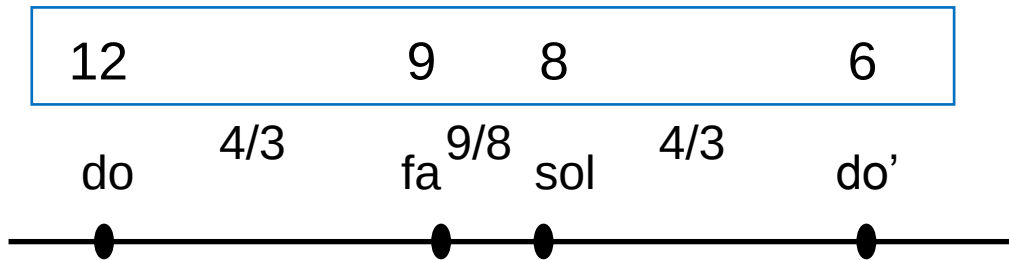
7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

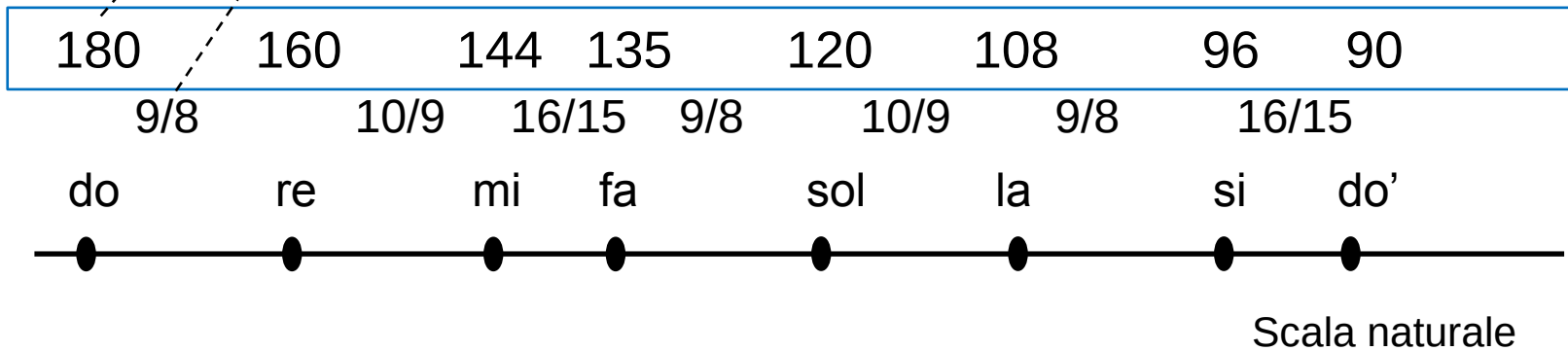
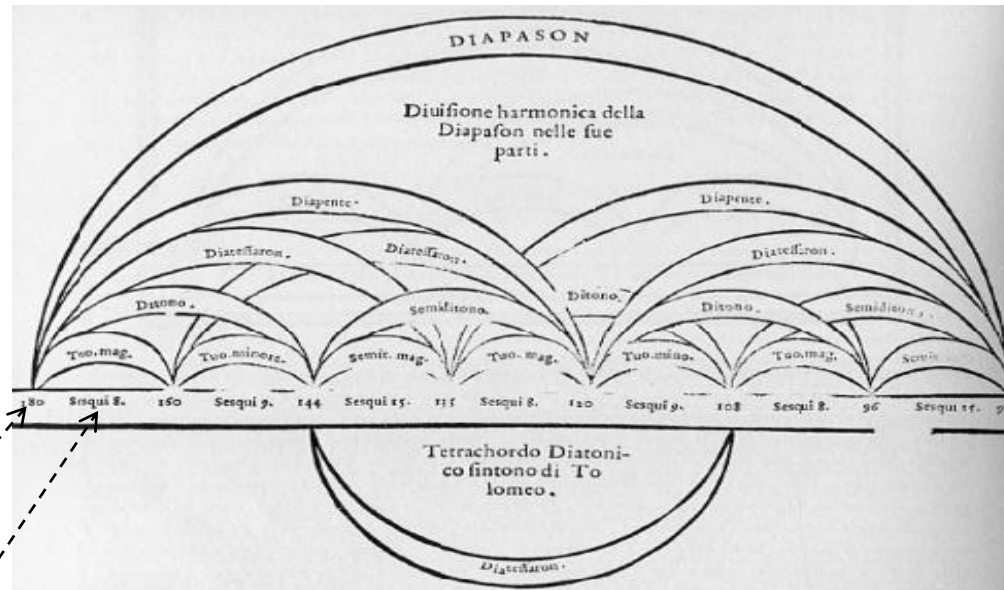
10. Frazioni continue



8. I minimi numeri



Quale è il rapporto corrispondente all'intervallo re-si? $729/432$

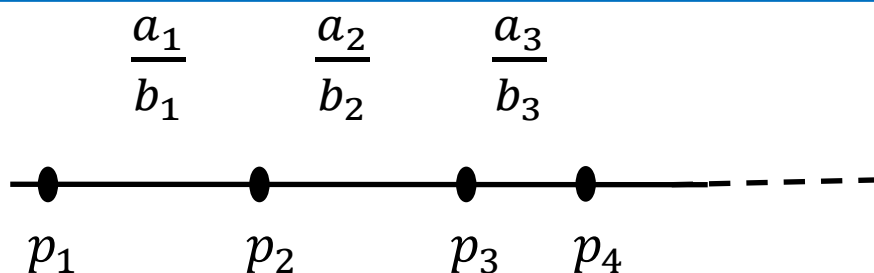


Euclide. *Elementi*. Proposizione VIII.4

"Dati quanti si voglia rapporti che siano espressi nei numeri più piccoli possibile, trovare altri numeri che siano i più piccoli a stare a due a due nei rapporti dati, e tali che il conseguente del primo rapporto sia l'antecedente del secondo, il conseguente del secondo sia l'antecedente del terzo, e così via."

Dati n rapporti $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ trovare i minimi $n + 1$ numeri

$p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ tali che $\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{a_i}{b_i}$.



Metodo "bruto"

$$m_1 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \cdots \cdot b_n$$

$$m_2 = a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \cdots \cdot b_n$$

$$m_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 \cdot \cdots \cdot b_n$$

. . .

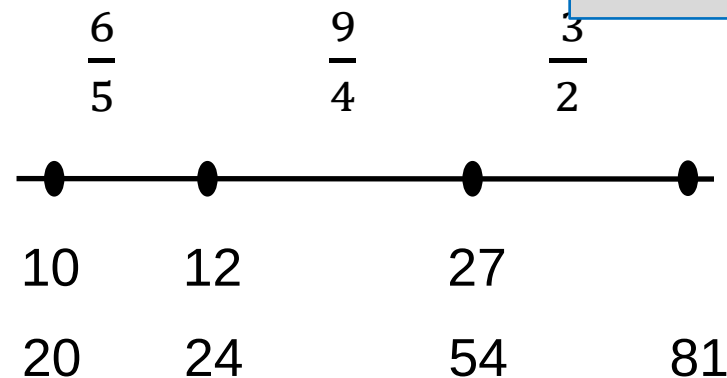
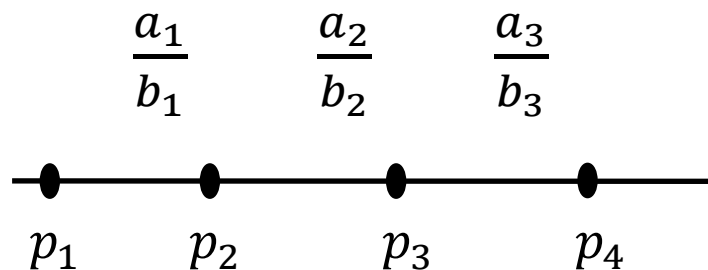
. . .

$$m_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n$$

$$m_{n+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n$$

$$d = MCD(m_1, m_2, \dots, m_{n+1})$$

$$p_i = \frac{m_i}{d}$$



Metodo euclideo, per
approssimazioni successive.

$$d := mcm(a_1, b_2) = mcm(6, 4) = 12$$

$$p_1 := b_1 \cdot \left(\frac{d}{a_1} \right) = 5 \cdot 2 = 10$$

$$p_2 := d = 12$$

$$p_3 := a_2 \cdot \left(\frac{d}{b_2} \right) = 9 \cdot 3 = 27$$

$$d := mcm(p_3, b_3) = mcm(27, 2) = 54$$

$$p_1 := p_1 \cdot \left(\frac{d}{p_3} \right) = 10 \cdot 2 = 20$$

$$p_2 := p_2 \cdot \left(\frac{d}{p_3} \right) = 12 \cdot 2 = 24$$

$$p_3 := d = 54$$

$$p_4 := a_3 \cdot \left(\frac{d}{b_3} \right) = 3 \cdot 27 = 81$$

Confronto tra scale

8. I minimi numeri

768	729	648	576	512	486	432	384
do	re	mi	fa	sol	la	si	do'

(pitagorica)

11520	10240	9720	8640	7680	7290	6480	5760
-------	-------	------	------	------	------	------	------

11520	10240	9216	8640	7680	6912	6144	5760
-------	-------	------	------	------	------	------	------

do	re	mi	fa	sol	la	si	do'
180	160	144	135	120	108	96	90

(naturale)

$$\text{mcm}(768, 180) = 11520$$

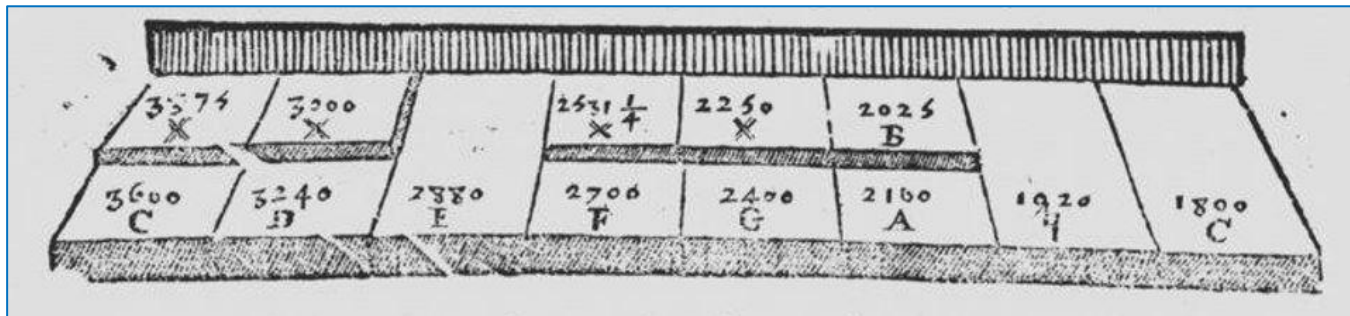
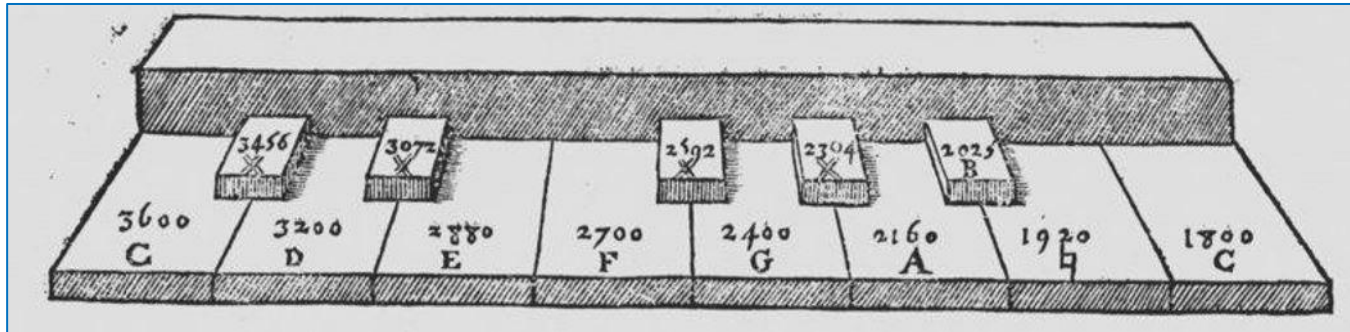
$$11520 / 768 = 15; \text{ valori pitagorici } \times 15$$

$$11520 / 180 = 64; \text{ valori naturali } \times 64$$



Marin Mersenne (1588-1648)

Harmonicorum Libri, 1636.



I	II	III	IV
19		15	C
18	25	16	h
17	24	81	B
16	16	80	B
15	15	25	A
14	128	24	xa
13	125	25	xg
12	16	24	G
11	15	81	yg
10	25	80	xf
9	24	16	F
8	25	15	E
7	24	128	xe
6	25	125	xd
5	24	81	D
4	25	80	D
3	24	128	xl
2	25	125	xc
1	24		C

1800
 demit. mai.
 1910
 demit. mai.
 2000
 comma mi.
 2025
 demit. mai.
 2160
 demit. min.
 2250
 diese
 2304
 demit. min.
 2400
 demit. mai.
 2560
 comma
 2592
 demit. min.
 2700
 demit. mai.
 2880
 demit. min.
 3000
 diese
 3072
 demit. min.
 3200
 comma mi.
 3240
 demit. min.
 3375
 diese
 3456
 demit. min.
 3600



Leonardo Eulero (1707-1783) *Tentamen
novae theoriae musicae*, 1739.

Modo tradizionale

CAPVT OCTAVVM			
Signa Sonor.	Soni.	Intervalla.	Nomina Intervallorum.
GENVS XII. Exponens $2^m \cdot 3^s \cdot 5^t$.			
F	128	128:135	Limma minus
F ^s	135	15:16	Hemitonium maius.
G	144	9:10	Tonus minor.
A	160	8:9	Tonus maior.
H	180	15:16	Hemitonium minus.
e	192	8:9	Tonus maior.
d	216	9:10	Tonus minor.
e	240	15:16	Hemitonium maius.
f	256		

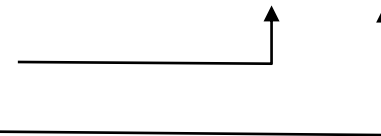
Genus Diatonicum Veterum Correctum.

Modo nuovo

Genesis Exponens $2^m \cdot 3^s \cdot 5^t \cdot 7^u$.			
Signa Sonor.	Soni.	Log. Sonor.	Intervalla.
F	2^{12}	12,00000	
F ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$	12,03617	0,03617 512:513
F ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	12,07681	0,04064 35:36
G ^s	$2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$	12,12928	0,05247 27:28
G	$2^1 \cdot 3^1$	12,16992	0,04064 35:36
G ^s	$3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$	12,20610	0,03618 512:513
G ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	12,22882	0,02272 63:64
A ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$	12,29921	0,07039 20:21
A	$2^{10} \cdot 5$	12,32193	0,02272 63:64
B ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1$	12,39232	0,07039 20:21
B	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	12,39874	0,00642 224:225
H ^s	$2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$	12,45121	0,05247 27:28
H	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	12,49185	0,04064 35:36
e ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1$	12,56224	0,07039 20:21
e	$2^{11} \cdot 3$	12,58496	0,02272 63:64
e ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$	12,62114	0,03618 512:513
e ^s	$2^1 \cdot 5^1$	12,64386	0,02272 63:64
d ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$	12,71425	0,07039 20:21
d	$2^1 \cdot 3^1$	12,75489	0,04064 35:36
d ^s	$2^{10} \cdot 7$	12,80736	0,05247 27:28
d ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	12,81378	0,00642 224:225
e ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$	12,85417	0,07039 20:21
e	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	12,90689	0,02272 63:64
f ^s	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1$	12,97728	0,07039 20:21
f	2^{11}	13,00000	0,02272 63:64

minimi numeri scomposti in fattori primi

logaritmi in base 2



1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

8. I *minimi numeri*

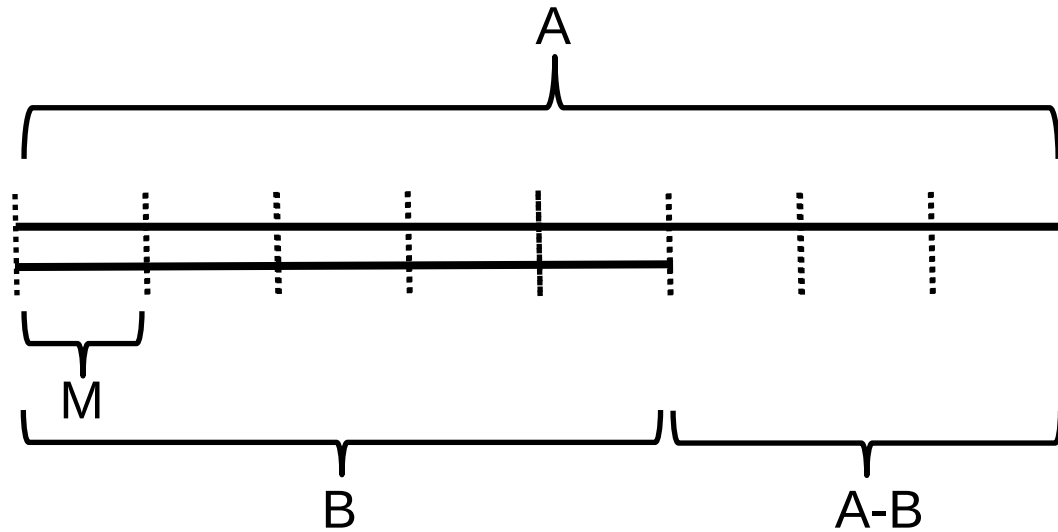
7. Il problema del semitono



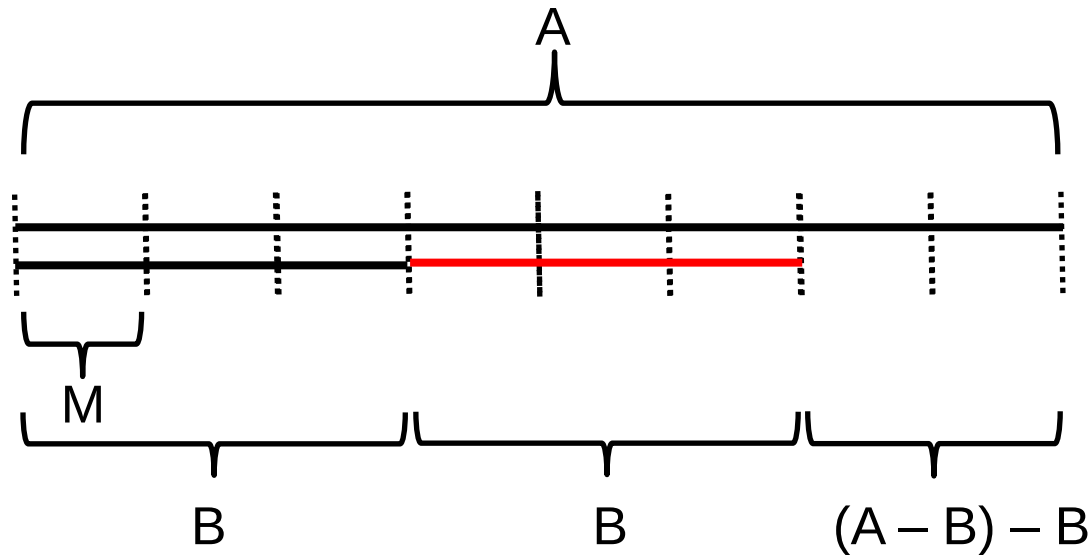
9. L'*antanairesi*

10. Frazioni continue

9. L'antanairesi (Algoritmo Euclideo)



Se M misura
 A e B allora
misura $A-B$



Se M misura A e B allora
misura $(A - B) - B$

Dati A e B con $A > B$, si sottragga reiteratamente B da A fino a che ciò è possibile (cioè fino a ciò che resta è maggiore o uguale a B).

Se al termine non rimane alcun resto, allora B misura A .

Altrimenti, indicando il resto con $r(A,B)$, vale che, per ogni M , se M misura A e B allora M misura $r(A,B)$

124	36	3	16
36	16	2	4
16	4	4	0

$$4 = \text{MCD}(36, 124)$$

93	27	3	12
27	12	2	3
12	3	4	0

$$124 : 36 = 93 : 27$$

stesso rapporto = stessa antanaresi

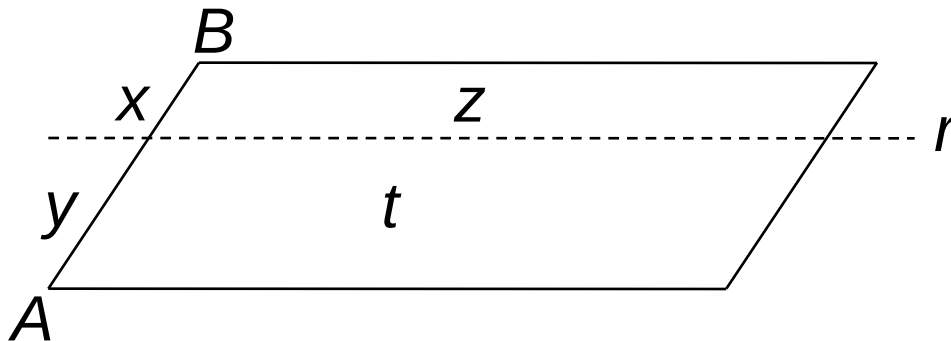
31	9	3	4
9	4	2	1
4	1	4	0

riduzione in fattori primi

Aristotele. *Topici*, VIII.3 158b 29-35.

“Pare che anche nelle scienze matematiche non si dimostri facilmente, per la mancanza di una definizione; così avviene, ad esempio quando si afferma che la retta $[r]$ parallela al lato di un parallelogramma, e condotta sul piano di questo, divide in modo simile il lato $[AB]$ e la superficie.

Tuttavia, una volta enunciata l'espressione definitoria, diventa senz'altro chiaro quanto si vuol dire. Infatti, il numero di parti che viene sottratto alla superficie dal taglio della parallela è eguale al numero di parti che viene sottratto ai lati: orbene, questa è appunto la definizione della proporzionalità.”



$$x : y = z : t$$

124	36	3	16
36	16	2	4
16	4	4	0

$$4 = \text{MCD}(36, 124)$$

93	27	3	12
27	12	2	3
12	3	4	0

$$124 : 36 = 93 : 27$$

stesso rapporto = stessa antanaresi

31	9	3	4
9	4	2	1
4	1	4	0

riduzione in fattori primi

Primi due teoremi del primo dei cosiddetti *libri aritmetici* (VII-VIII-IX) degli *Elementi* :

Elementi, Proposizione VII.1. "Se si prendono due numeri disuguali e si procede a sottrazioni successive, togliendo di volta in volta il minore dal maggiore, se il numero che ogni volta rimane non divide mai quello che immediatamente lo precede, finché rimanga soltanto l'unità, i numeri dati all'inizio saranno primi fra loro. "

Elementi, Proposizione VII.2. "Dati due numeri che non sono primi tra loro, trovare il massimo comun divisore. "

ma anche

Come distinguere tra **commensurabilità** e **incommensurabilità**:

Elementi, Proposizione X.2. "Se di due grandezze disuguali veniamo a sottrarre, sempre e vicendevolmente, la minore dalla maggiore [quante volte sia possibile], e quella [ogni volta] restante non misura mai la grandezza ad essa precedente, le grandezze saranno incommensurabili. "

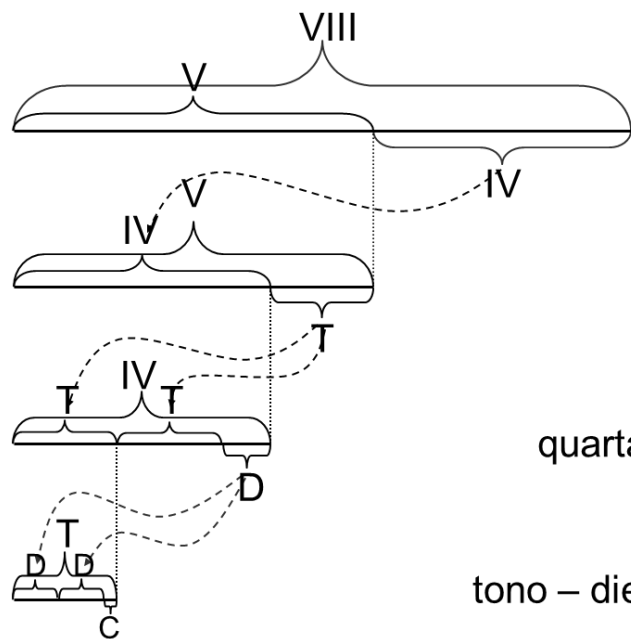
Elementi, Proposizione X.3. "Date due grandezze commensurabili, trovare la loro massima misura comune. "

L'*antanairesi* può dunque essere nata in un contesto aritmetico, oppure geometrico, oppure...



Filolao (479-390)

"La grandezza armonica è formata dagli intervalli di quarta e di quinta; la quinta è maggiore della quarta di un tono. [...] La diesis è quell'intervallo per cui la quarta supera due toni; il comma è quell'intervallo per cui il tono supera due *diesis*, cioè due semitoni minori [...]."



ottava – quinta = quarta

quinta – quarta = tono

quarta – tono – tono = diesis

tono – diesis – diesis = comma

VIII	V	1	IV
V	IV	1	T
IV	T	2	D
T	D	2	C
:	:	:	:

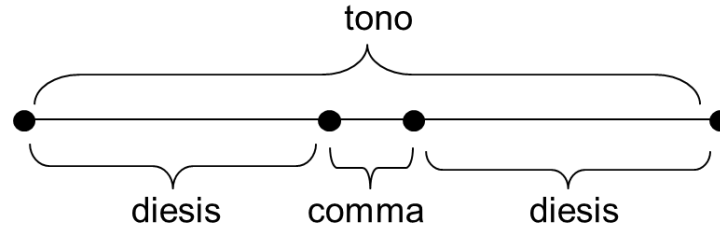
Peculiarità dell'antanaresì armonica

X_i	Y_i	a_i	r_i
X_1	Y_1	a_1	r_1
X_2	Y_2	a_2	r_2
X_3	Y_3	a_3	r_3
X_4	Y_4	a_4	r_4
.	.	.	.

X_i	Y_i	a_i	r_i
VIII	V	1	IV
V	IB	1	T
IV	T	2	D
T	D	2	C
.	.	.	.

- 1) Le prime 6 grandezze (segmenti-intervalli) coinvolte hanno nomi propri.
- 2) Le grandezze coinvolte hanno avuto e hanno vita extra-matematica.
- 3) Non soltanto le due grandezze di cui si fa il rapporto ma anche le successive fino al quarto livello hanno interesse autonomo.

L'antanairesi armonica ricerca un intervallo musicale che sia "misura comune" di tutti gli altri. Perché Filolao si ferma al comma?



Platone. *Repubblica* (VII, 531a)

"[...] Misurando i rapporti fra gli accordi e i suoni ad orecchio, si fa un lavoro inutile".

"E anche ridicolo, per gli dei! – esclamò-. Infatti, volendo definire certe quali sfumature delle note e tendendovi l'orecchio come se cercassero di captare la voce dei vicini, **gli uni** dicono di cogliere una ulteriore nota intermedia e che questo va considerato l'intervallo minimo e dunque adottato come unità di misura dei suoni; **gli altri** ribattono che le due note risuonano allo stesso modo. E' chiaro che si presta più fede all'orecchio che all'intelligenza."

Perché hanno torto gli uni e gli altri?

Ecco perché hanno torto *gli uni*.

Intuizione musicale

$$\text{VIII} - \text{V} = \text{IV}$$

$$\text{V} - \text{IV} = \text{T}$$

$$\text{IV} - \text{T} - \text{T} = \text{D}$$

$$\text{T} - \text{D} - \text{D} = \text{C}$$

Operazioni corrispondenti

$$\frac{2^1}{3^0} / \frac{3^1}{2^1} = \frac{2^2}{3^1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{3^1}{2^1} / \frac{2^2}{3^1} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

$$\left(\frac{2^2}{3^1} / \frac{3^2}{2^3} \right) / \frac{3^2}{2^3} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

$$\left(\frac{3^2}{2^3} / \frac{2^8}{3^5} \right) / \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$$

Continuano ad alternarsi potenze di 2 e di 3. "Se si presta fede all'intelligenza" si conclude che l'intervallo generatore, di cui quinta ed ottava siano multipli, non esiste.

Quali sono le due grandezze numeriche di cui la precedente antanairesi dimostra l'incommensurabilità?

$$\log(2) - \log(3/2) = \log(4/3)$$

$$\log(3/2) - \log(4/3) = \log(9/8)$$

$$\log(4/3) - \log(9/8) - \log(9/8) = \log(256/243)$$

$$\log(9/8) - \log(256/243) - \log(256/243) = \log(531411/524288)$$

$$\frac{2^1}{3^0} / \frac{3^1}{2^1} = \frac{2^2}{3^1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{3^1}{2^1} / \frac{2^2}{3^1} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

$$\left(\frac{2^2}{3^1} / \frac{3^2}{2^3} \right) / \frac{3^2}{2^3} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

$$\left(\frac{3^2}{2^3} / \frac{2^8}{3^5} \right) / \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531411}{524288}$$

$\log 2$ e $\log(3/2)$ sono incommensurabili.

$\log 2 / \log(3/2)$, cioè $\log_{3/2} 2$, è irrazionale

Hanno torto *gli altri* perché, banalmente, il comma non è uguale a 0. Ma se lo fosse...

X_i	Y_i	a_i	r_i
VIII	V	1	IV
V	IV	1	T
IV	T	2	D
T	D	2	C
→ 0			
- - ÷ - - ÷ - - ÷ - - ÷ - -			

$$\text{VIII} = \text{V} + \text{IV}$$

$$\text{V} = \text{IV} + \text{T}$$

$$\text{IV} = 2\text{T} + \text{D}$$

$$\text{T} = 2\text{D} + \cancel{\text{C}}$$

- - ÷ - - ÷ - - ÷ - - ÷ - -

$$\text{VIII} = \text{V} + \text{IV} = 1(7\text{D}) + 5\text{D} = 12\text{D}$$

$$\text{V} = \text{IV} + \text{T} = 1(5\text{D}) + 2\text{D} = 7\text{D}$$

$$\text{IV} = 2\text{T} + \text{D} = 2(2\text{D}) + \text{D} = 5\text{D}$$

$$\text{T} = 2\text{D}$$

$$X_i = a_i Y_i + r_i$$

...otterremmo la scala di Aristosseno (la nostra equabile temperata), la cui ottava è formata da 12 semitoni, la quinta da 7, la quarta da 5 e il tono da 2.

1. La scelta dei suoni della scala.

2. Arrivano i numeri

3. Primi calcoli

4. Lo sfasamento dei linguaggi

5. Metafisica

6. Ancora calcoli

8. I *minimi numeri*

7. Il problema del semitono

9. L'*antanairesi*

10. Frazioni continue



10. Frazioni continue

Porre uguale a 0 un resto non nullo, come abbiamo fatto nell'antanairesi armonica, corrisponde a considerare una *ridotta* della *frazione continua* corrispondente all'antanairesi stessa.

Vediamo come ciò accada.

Da una antanairesi a una frazione continua.

X_i	Y_i	a_i	r_i
X_1	Y_1	a_1	r_1
X_2	Y_2	a_2	r_2
X_3	Y_3	a_3	r_3
X_4	Y_4	a_4	r_4
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

$$X_i = a_i Y_i + r_i$$

$$X_i / Y_i = a_i + r_i / Y_i$$

$$X_i / Y_i = a_i + 1/(Y_i / r_i)$$

$$Y_i = X_{i+1} \text{ e } r_i = Y_{i+1}$$

$$X_i / Y_i = a_i + 1/(X_{i+1} / Y_{i+1})$$



$$\frac{X_1}{Y_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{X_2}{Y_2}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{X_3}{Y_3}}} = \dots = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots \frac{1}{a_n + \dots}}}}$$

Da una antanairesi a una frazione continua...

X_i	Y_i	a_i	r_i
194	27	7	5
27	5	5	2
5	2	2	1
2	1	2	0

$$\frac{194}{27} = 7 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

e ritorno.

$$7 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{194}{27}$$

$$X_i = a_i Y_i + r_i$$

X_i	Y_i	a_i	r_i
194	27	7	5
27	5	5	2
5	2	2	1
2	1	2	0

Ridotte

$$\frac{X}{Y} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

I ridotta

II ridotta

III ridotta

IV ridotta

$$\frac{p_1}{q_1} = a_1$$

$$\frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2}$$

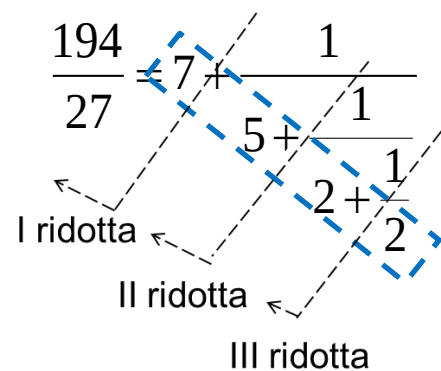
$$\frac{p_3}{q_3} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}$$

n -esima ridotta : p_n / q_n

Teorema fondamentale : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{X}{Y}$

X_i	Y_i	a_i	r_i
194	27	7	5
27	5	5	2
5	2	2	1
2	1	2	0



III ridotta

$$\frac{p_3}{q_3} = 7 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}} = 7 + \frac{1}{\frac{11}{2}} = 7 + \frac{2}{11} = \frac{79}{11}$$

X_i	Y_i	a_i	r_i
194	27	7	5
27	5	5	2
5	2	2	1
2	1	2	0

$\rightarrow 0$

X_i	Y_i	a_i	r_i
158	22	7	4
22	4	5	2
4	2	2	0

$$X_i = a_i Y_i + r_i$$

$$158/22 = 79/11 = p_3 / q_3$$

L' n -esima ridotta di una frazione continua si ottiene ponendo uguale a 0 l' n -esimo resto dell'antanaresi corrispondente.

X_i	Y_i	a_i	r_i
VIII	V	1	IV
V	IV	1	T
IV	T	2	D
T	D	2	C
- - - - -			

Se poniamo il comma $C = 0$, il semitono D diventa misura comune degli altri intervalli.

$$\text{VIII} = \text{V} + \text{IV} = 1(7 \text{ D}) + 5 \text{ D} = 12 \text{ D}$$

$$\text{V} = \text{IV} + \text{T} = 1(5 \text{ D}) + 2 \text{ D} = 7 \text{ D}$$

$$\text{IV} = 2 \text{ T} + \text{D} = 2(2 \text{ D}) + \text{D} = 5 \text{ D}$$

$$\text{T} = 2 \text{ D}$$

Nella Scala equabile (Aristosseno)

$$\text{VIII} : \text{V} = 12 : 7$$

La quarta ridotta di $\log_2/\log(3/2)$ è $12/7$

X_i	Y_i	a_i	r_i
VIII	V	1	IV
V	IV	1	T
IV	T	2	D
T	D	2	C
D	C	3	X
- ÷ -	- ÷ -	- ÷ -	- ÷ -

→ 0

Ancora un passo. Un semitono contiene 3 commi più un resto non nullo X (chiamiamolo *biscomma*). Se poniamo $X = 0$, il comma diventa misura comune.

$$\text{VIII} = \text{V} + \text{IV} = 1(24\text{C}) + 17\text{C} = 41\text{C}$$

$$\text{V} = \text{IV} + \text{T} = 1(17\text{C}) + 7\text{C} = 24\text{C}$$

$$\text{IV} = 2\text{T} + \text{D} = 2(7\text{C}) + 3\text{C} = 17\text{C}$$

$$\text{T} = 2\text{D} + \text{C} = 7\text{C}$$

$$\text{D} = 3\text{C}$$

Nuova scala

$$\text{VIII} : \text{V} = 41 : 24$$

La quinta ridotta di $\log_2/\log(3/2)$ è $41/24$

X_i	Y_i	a_i	r_i
VIII	V	1	IV
V	IV	1	T
IV	T	2	D
T	D	2	C
D	C	3	X
C	X	1	Y
- ÷ -	- ÷ -	- ÷ -	- ÷ -

→ 0

Ancora un passo. Un comma contiene un biscomma più un resto Y (chiamiamolo *triscomma*). Se poniamo $Y = 0$, il biscomma X diventa misura comune.

$$\text{VIII} = \text{V} + \text{IV} = 1(31\text{X}) + 22\text{C} = 53\text{X}$$

$$\text{V} = \text{IV} + \text{T} = 1(22\text{X}) + 9\text{X} = 31\text{X}$$

$$\text{IV} = 2\text{T} + \text{D} = 2(9\text{X}) + 4\text{X} = 22\text{X}$$

$$\text{T} = 2\text{D} + \text{C} = 2(4\text{X}) + \text{X} = 9\text{X}$$

$$\text{D} = 3\text{C} + \text{X} = 4\text{X}$$

$$\text{C} = \text{X}$$

Nuova scala

$$\text{VIII} : \text{V} = 53 : 31$$

La sesta ridotta di $\log_2/\log(3/2)$ è $53/31$

Approssimazioni sempre migliori:

$$\log 2 / \log(3/2) = 1,7095\dots$$

$$12/7 = 1,7142\dots$$

$$41/24 = 1,7083\dots$$

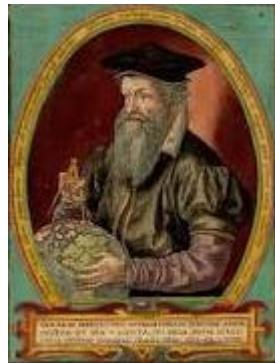
$$\textcircled{53/31} = 1,7097\dots$$

Solo numeri senza suoni?

→ La scala la cui ottava è divisa in 53 intervalli di cui la quinta ne comprende 31 è stata la Scala ufficiale cinese nel XVIII sec., ed è stata teorizzata da:



Jing Fang (I sec. a.C.)



Gerardo Mercatore (1620-1687)