

Pensare proiettivo

Ciro Ciliberto

LICEO MATEMATICO, 1 Ottobre 2020

Esistono davvero i “punti all’infinito”?

Lo **spazio proiettivo** si ottiene dallo **spazio euclideo** (cioè lo spazio in cui “viviamo”) con l’aggiunta dei **punti all’infinito**, che non sono altro che le **direzioni** delle rette dello spazio.

Nello spazio proiettivo due rette distinte che sono parallele nello spazio euclideo, si intersecano nel comune punto all’infinito.

Obiezione: ma se io percorro due rette parallele, non le vedrò intersecarsi **mai**, quindi i punti all’infinito sono una mera finzione matematica che non ha alcun riscontro nella realtà fisica!



Prima di rispondere a questa obiezione, conviene osservare che comunque i punti all’infinito e la geometria proiettiva hanno la loro radice in esigenze **ben concrete**, di natura **artistica** e **tecnica**.

La “nascita” della prospettiva

Alla base della **geometria proiettiva** vi è la **prospettiva**. Questa è un insieme di procedimenti di carattere geometrico che consentono di costruire l'immagine di una figura dello spazio su un piano detto **quadro**, proiettando la stessa da un centro di proiezione posto a distanza finita dal quadro.

Filippo di ser Brunellesco Lapi (Firenze, 1377–Firenze, 15 aprile 1446): illustrò il suo metodo prospettico in due tavolette andate perdute, raffiguranti il Battistero visto dalla porta di Santa Maria del Fiore e Piazza della Signoria con Palazzo Vecchio.

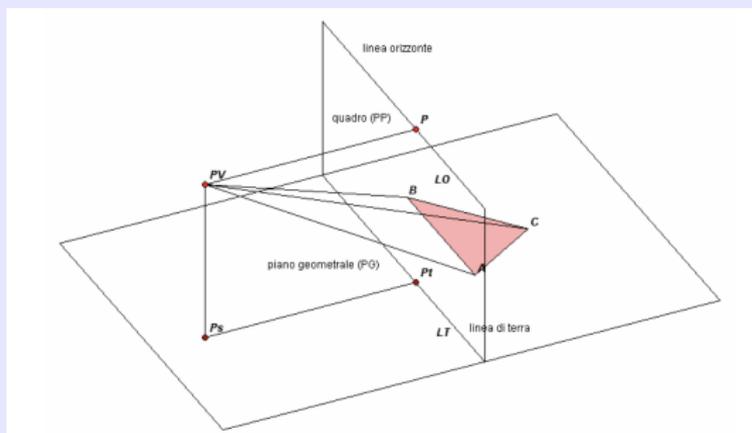
Leon Battista Alberti (Genova, 18 febbraio 1404–Roma, 20 aprile 1472): “De Pictura” (1434-1436) dedicato a Brunelleschi.

Piero della Francesca (Borgo Sansepolcro, 1416/1417 –Borgo Sansepolcro, 12 ottobre 1492): “De Perspectiva Pingendi”.

Leonardo di ser Piero da Vinci (Vinci, 15 aprile 1452–Amboise, 2 maggio 1519): “**prospettiva non è altro che sapere bene figurare lo ufizio dell'occhio**”.

La prospettiva

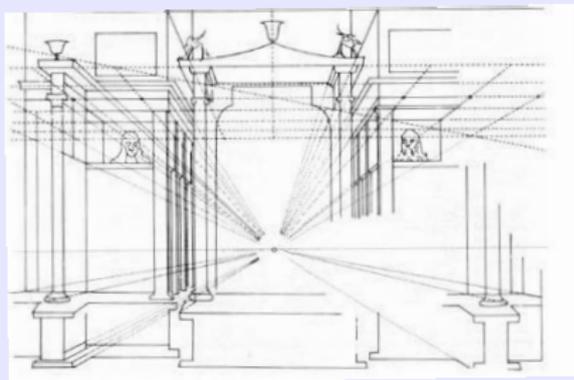
La prospettiva è la disciplina che consente di costruire l'immagine di una figura dello spazio su un piano (detto **quadro (PP)**), proiettando la stessa da un centro di proiezione (detto **punto di vista (PV)**) posto a distanza finita dal quadro.



Rette parallele al **piano geometrico (PG)** e parallele tra loro nella realtà, sul quadro si intersecano nel loro comune **punto all'infinito** che è proiettato sulla **linea dell'orizzonte (LO)**.

Stanza delle maschere, Casa di Augusto, Palatino, Roma, ritrovato nel 1961, datato 38 a.C.

I procedimenti prospettici sono ben precedenti il Rinascimento...



Da L. Catastini, F. Ghione, "Le Geometrie della Visione", Springer 2004.

Duccio di Buoninsegna (Siena, 1255 circa –1318 o 1319)

... e occorreranno molti secoli per recuperare queste conoscenze!



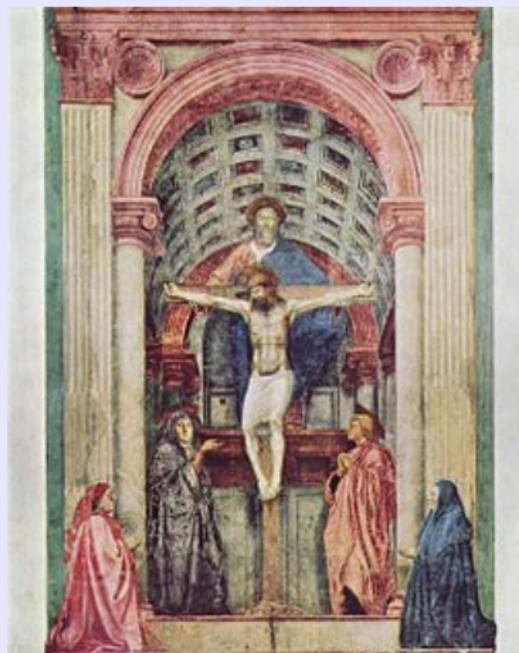
L'Annunzio della morte alla Vergine, Museo dell'Opera del Duomo, Siena

Ambrogio Lorenzetti (Siena, ca. 1290–Siena, 1348)



Annunciazione, Pinacoteca Nazionale di Siena

Tommaso di ser Giovanni di Mone Cassai, detto
Masaccio (Castel San Giovanni, 21 dicembre
1401–Roma, estate 1428)



Crocifissione, Museo di Capodimonte a Napoli

Piero della Francesca (Borgo Sansepolcro, 1416/1417 circa–Borgo Sansepolcro, 12 ottobre 1492)



Flagellazione (1470, ca.) e La città ideale, Galleria Nazionale delle Marche di Urbino

Gnomonica: orologio solare Piazza del Collegio Ghislieri, Pavia

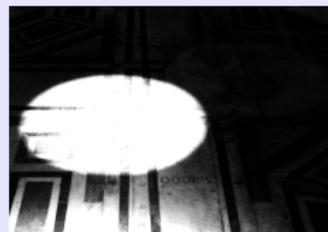
Gnomonica è un termine di origine greca derivante da "Gnomone": l'asta infissa su un quadrante di qualsiasi natura e specie, dalla cui ombra si deduce l'ora grazie al moto apparente del Sole che la fa continuamente muovere.

L'**Orologio Solare** (impropriamente detto "Meridiana") è di solito tracciato sulla parete di un edificio per indicare, oltre all'istante del Mezzogiorno, un numero più o meno ampio di ore. Lo Gnomone è un'asta infissa nel muro con un'inclinazione tale da trovarsi parallelo all'asse terrestre.

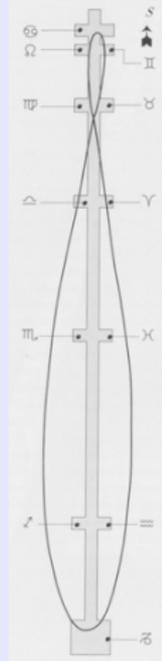


La meridiana del Brunelleschi in Santa Maria del Fiore

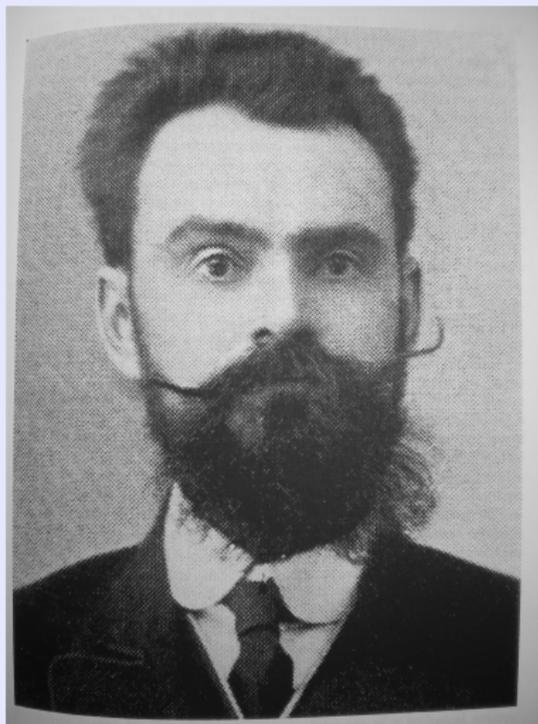
La **Meridiana**, strumento atto a fornire l'istante del Mezzogiorno, usa il principio della “camera Oscura”. All'interno di un edificio viene tracciata al suolo una curva (**lemniscata del tempo medio**) avente andamento Nord–Sud. Lo Gnomone è costituito da un foro praticato nel soffitto o in parete situato in direzione Sud. L'istante del Mezzogiorno avviene quando i raggi solari, proiettandosi dal foro all'interno e descrivendo al suolo l'immagine del Sole, centrano la lemniscata.



Un'altra meridiana: Bergamo, Palazzo della Ragione



Federigo Enriques (Livorno, 5 gennaio 1871– Roma,
14 giugno 1946)



Federigo Enriques: “Lezioni di Geometria Proiettiva” (1893–94)

Enriques distingue in geometria:

1. **proprietà grafiche**, relative alle nozioni di retta, piano, ecc.;
2. **proprietà metriche**, relative alla nozione di distanza.

Possiamo dire che queste due categorie di proprietà geometriche nascono da due forme dell'intuizione spaziale: *l'intuizione grafica* e *l'intuizione metrica* ...

Noi pensiamo ... che queste due forme dell'intuizione spaziale si riattichino nella psicogenesi a due gruppi diversi di sensazioni: le *sensazioni visive* da un lato, le *sensazioni tattili e di movimento* dall'altro...

L'approccio assiomatico: Hermann Wiener (1857–1939), David Hilbert (1862–1943), ...

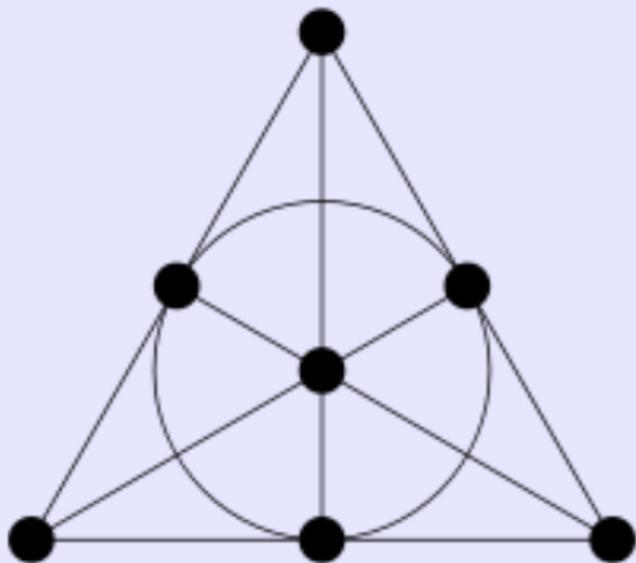
Gli assiomi della geometria proiettiva del piano P :

- (i) Per due punti distinti di P passa una e una sola retta.
- (ii) Ogni retta in P contiene almeno tre punti.
- (iii) Due rette distinte in P si incontrano in almeno un punto.
- (iv) In P ci sono quattro punti a tre a tre non allineati.

... e quelli dello spazio S :

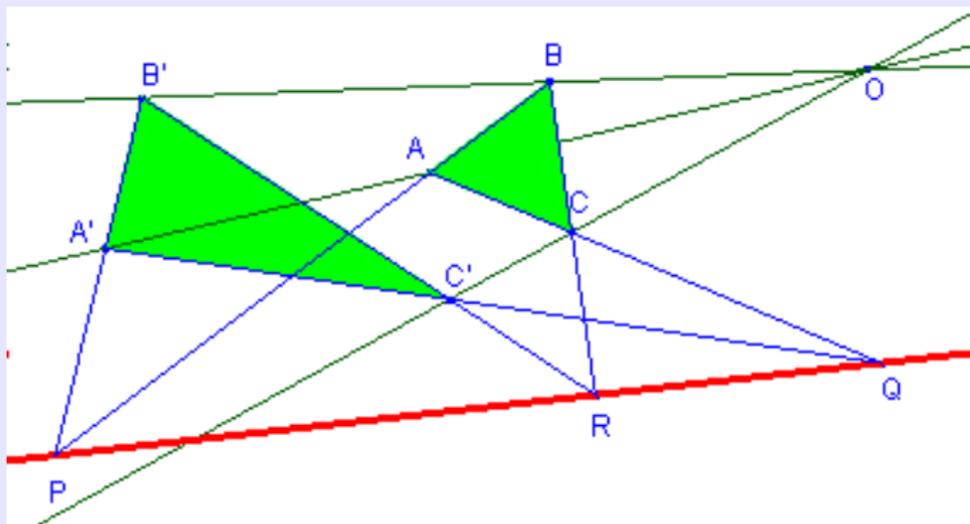
- (i) Per due punti distinti di S passa una e una sola retta.
- (ii) Per tre punti non allineati di S passa uno e un solo piano.
- (iii) Una retta e un piano in S si incontrano in almeno un punto.
- (iv) Due piani in S hanno almeno una retta in comune.
- (v) In S ci sono cinque punti, a quattro a quattro non complanari.
- (vi) Ogni retta in S contiene almeno tre punti.

Il piano di Fano



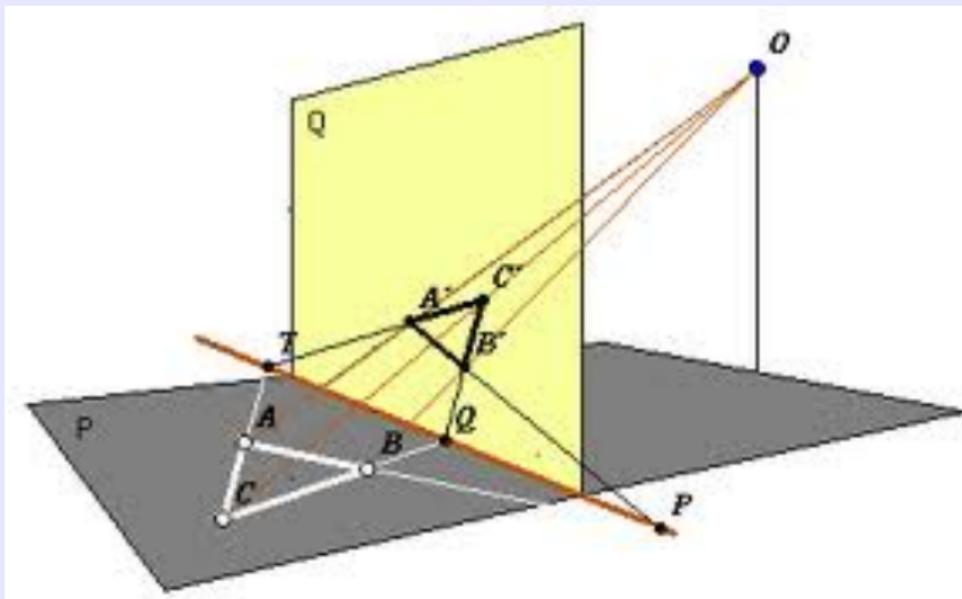
Gino Fano (1871–1952)

Il teorema di Desargues



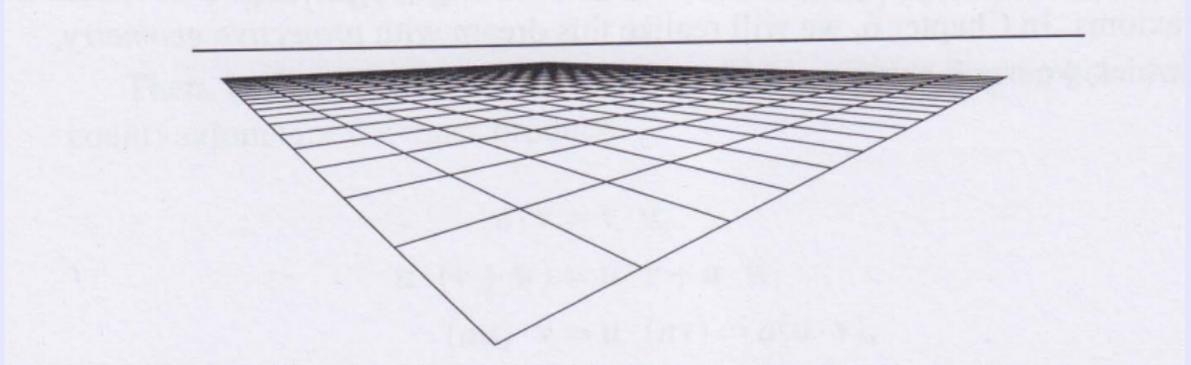
Due trilateri sono **prospettivi** da un punto O se e solo se i lati corrispondenti si intersecano in punti giacenti su una retta ℓ (la linea rossa in figura).

Il teorema di Desargues: “dimostrazione”

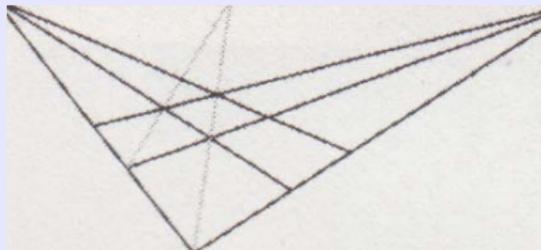
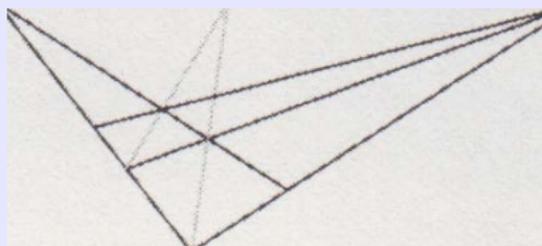
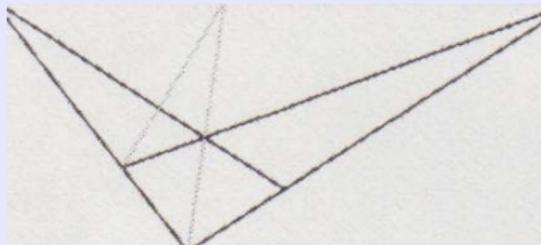
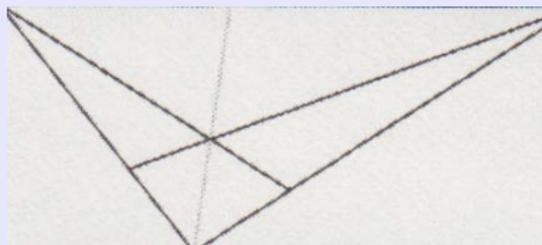


Una dimostrazione si ottiene facilmente se siamo nello spazio proiettivo di dimensione tre (o maggiore). Ma possiamo trovarne una che fa uso **solo** della geometria del piano? La risposta è **NO**, perché ci sono piani in cui **non vale** il teorema di Desargues. Ad esempio il cosiddetto **piano di Moulton**.

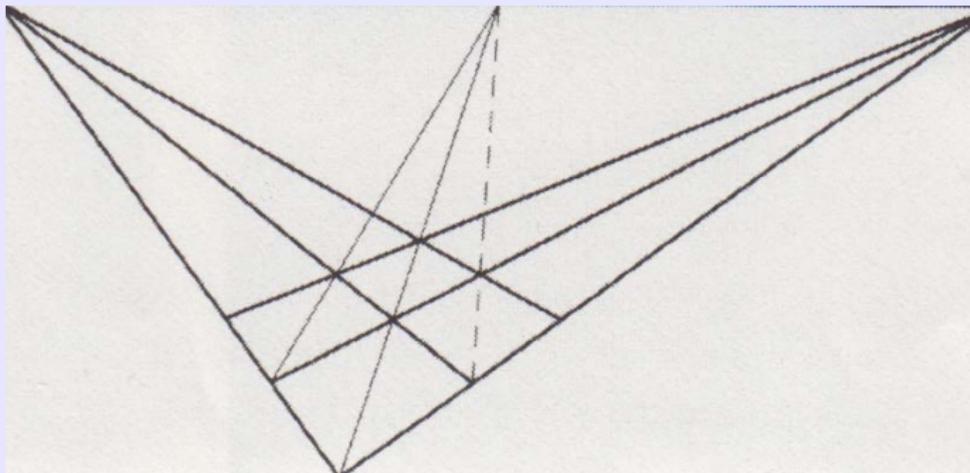
Come si disegna una pavimentazione?



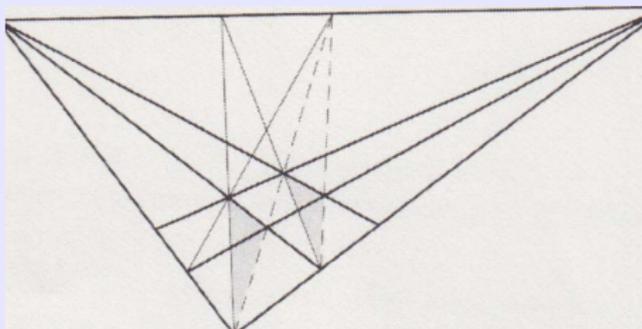
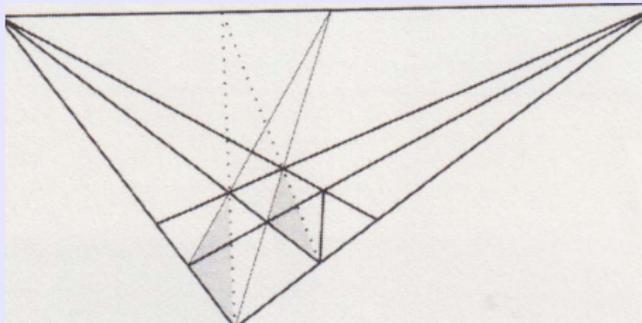
Ricetta: Metodo dei punti di distanza, da L. B. Alberti



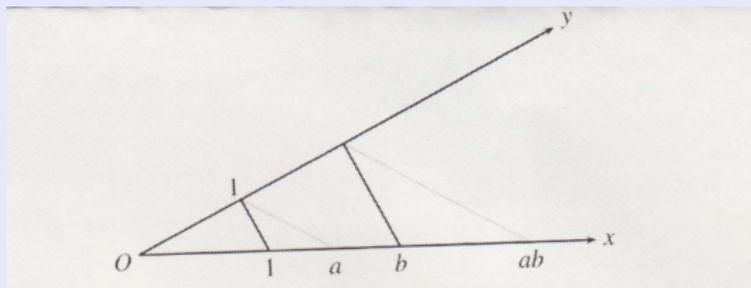
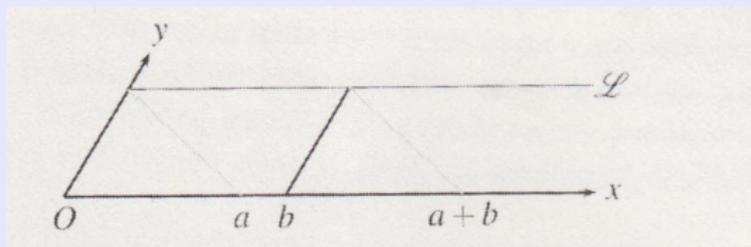
Una "coincidenza"...



... e il suo perché!

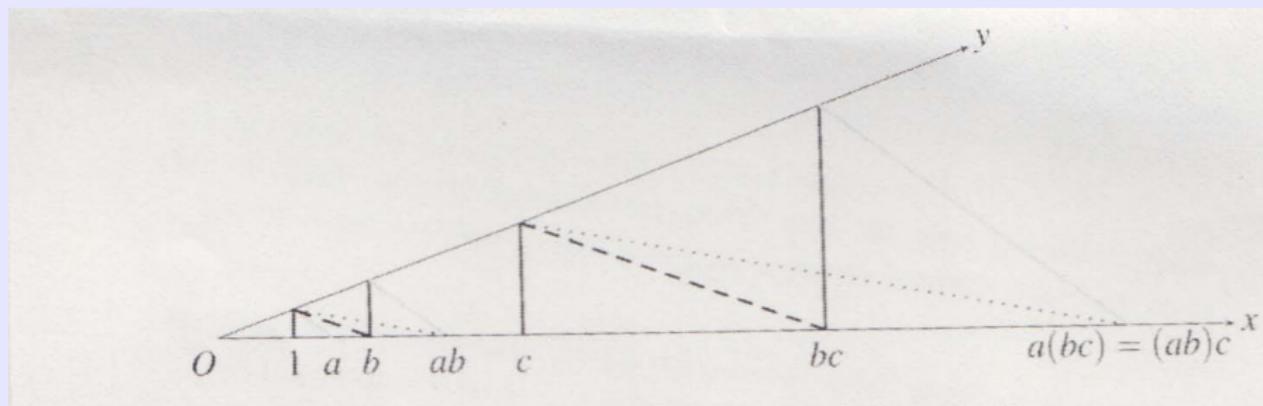


Algebra geometrica: somma e prodotto



Queste definizioni non dipendono dalle scelte arbitrarie di \mathcal{L} e del punto 1 su y : ciò segue dal teorema di Desargues e dal cosiddetto **teorema di Pappo**.

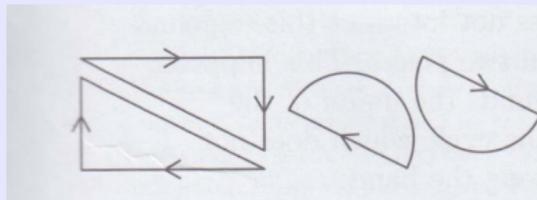
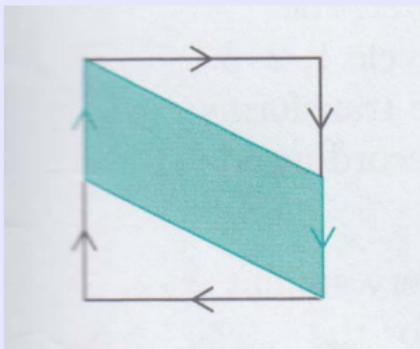
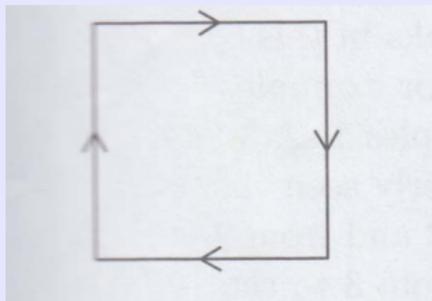
Desargues e la proprietà associativa



Una **coincidenza** (scoperta da Hilbert), proprio come quella della pavimentazione: la proprietà associativa **equivale** al teorema di Desargues.

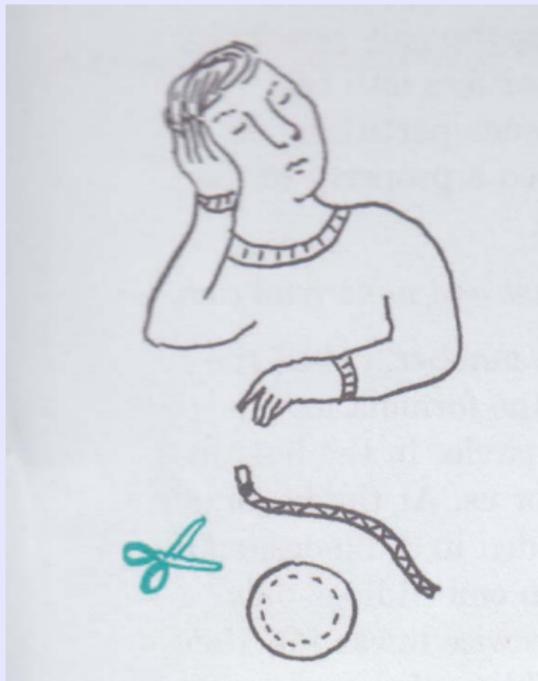
In un piano in cui vale il teorema di Desargues, detto **piano Desarguesiano**, si possono introdurre delle coordinate che somigliano a quelle cui siamo abituati perché hanno le stesse proprietà formali (ad esempio la proprietà associativa).

Possiamo “vedere” il piano proiettivo reale?

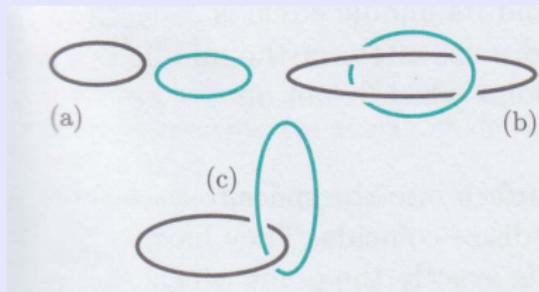


Il piano proiettivo reale è topologicamente un **nastro di Möbius** cui è attaccato un **disco**.

Un modello concreto con disco e striscia di stoffa



L'oscura presenza dei links



(a) e (b): Links banali

(c) Link non banale

Un link non banale nel nastro di Moebius: il segmento centrale e l'unione dei due lati orizzontali del rettangolo.

