Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Oggi, l´Ateneo del domani

Euclide e al-Khwārizmī

e la risoluzione geometrica delle equazioni di secondo grado

LICEO CLASSICO STATALE SPERIMENTALE BERTRAND RUSSELL

Federica Tommasi
Insegnante di matematica e fisica

Liceo Scientifico Statale Teresa Gullace

Stefano Volpe
Insegnante di matematica

IL PIANO COMPLESSIVO DELLA SPERIMENTAZIONE SVOLTA

1) Classe seconda – Presentazione di risoluzioni geometriche di equazioni di II grado presentate prima della introduzione della formula risolutiva:

a) Risoluzione dell'equazione del tipo $x^2 + px = q$ (con p e q positivi) col metodo del completamento del quadrato.

b) Risoluzione dell'equazione del tipo $x^2 + q = px$ (con p e q positivi) come descritto da al-Khwārizmī.

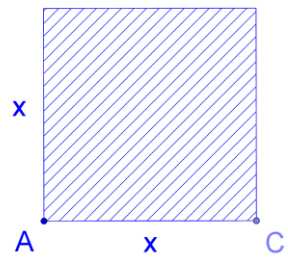
2) Classe terza – Costruzione geometrica delle soluzioni di equazioni di II grado presentate, mediante il metodo di Euclide, a partire dalla conoscenza della formula risolutiva.

Nell'intervento di oggi riporteremo solo alcuni spunti.

Risoluzione dell'equazione del tipo $x^2 + px = q$ (con p e q positivi) col metodo del completamento del quadrato

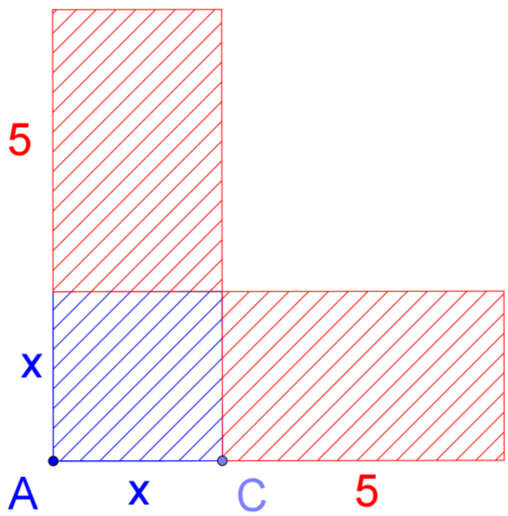
Consideriamo l'equazione $x^2 + 10x = 39$ (tratta dal *Kitāb al-jabr wa al-muqābala* di al-Khwārizmī):

Interpretiamo il primo membro dell'equazione come un quadrato incompleto e cominciamo con il costruire un quadrato di lato x:



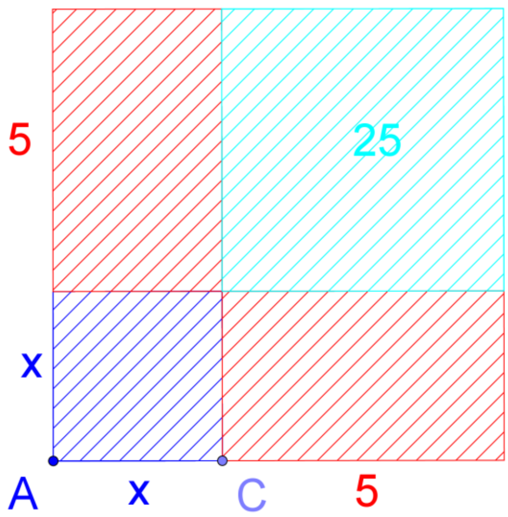
x^2

Aggiungiamo al quadrato iniziale due rettangoli aventi ciascuno area pari a 5x. In accordo con il testo dell'equazione, lo gnomone costruito ha area pari a 39.



$x^2 + 10x = 39$

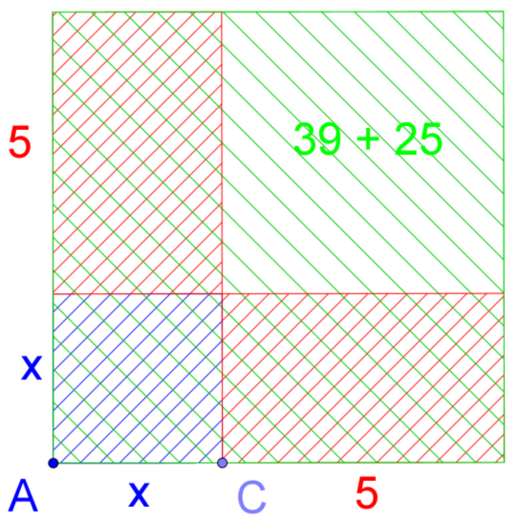
Completiamo il quadrato aggiungendo il quadrato mancante che avrà lato 5 e area 25:



Da un punto di vista algebrico completeremo il quadrato incompleto del primo membro aggiungendo 25 a entrambi i membri.

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

Il quadrato grande così ottenuto avrà area 64 pari alla somma dell'area dello gnomone (39) e dell'area del quadrato aggiunto (25).



$$x^2 + 10x + 25 = 64$$
$$(x + 5)^2 = 64$$

Il lato del quadrato di area 64 è pari a 8. Da ciò ricaviamo che:

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

L'unica soluzione positiva dell'equazione.

Risoluzione dell'equazione del tipo $x^2 + q = px$ (con p e q positivi) come descritto da al-Khwārizmī

Vediamo ora un esempio del tipo *"Quadrati e numeri uguali a radici"*, in particolare l'equazione:

Un quadrato e 21 unità uguali a 10 radici.

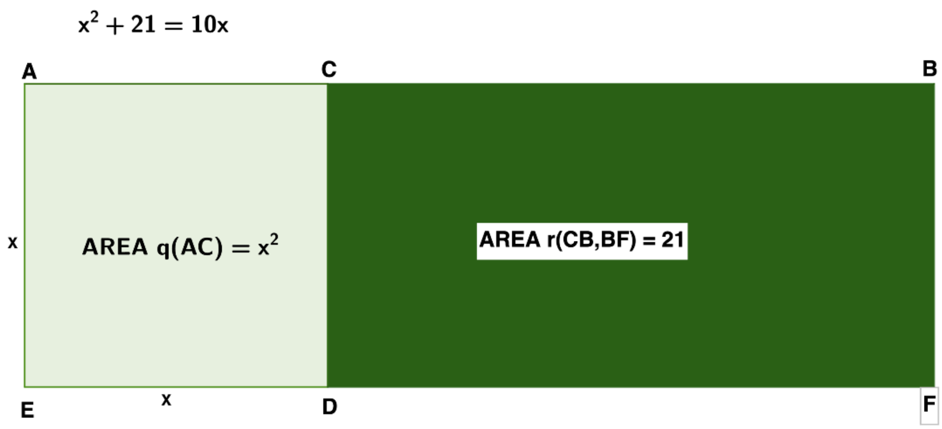
Scritta in notazione moderna:

$$x^2 + 21 = 10x$$

Al-Khwārizmī presenta le due soluzioni positive, che in notazione moderna sono:

$$x = 5 - \sqrt{25 - 21} = 3 \quad \text{e } x = 5 + \sqrt{25 - 21} = 7$$

Segue la giustificazione geometrica:



Sia **q(AC)** il quadrato **di lato x e area x^2.**

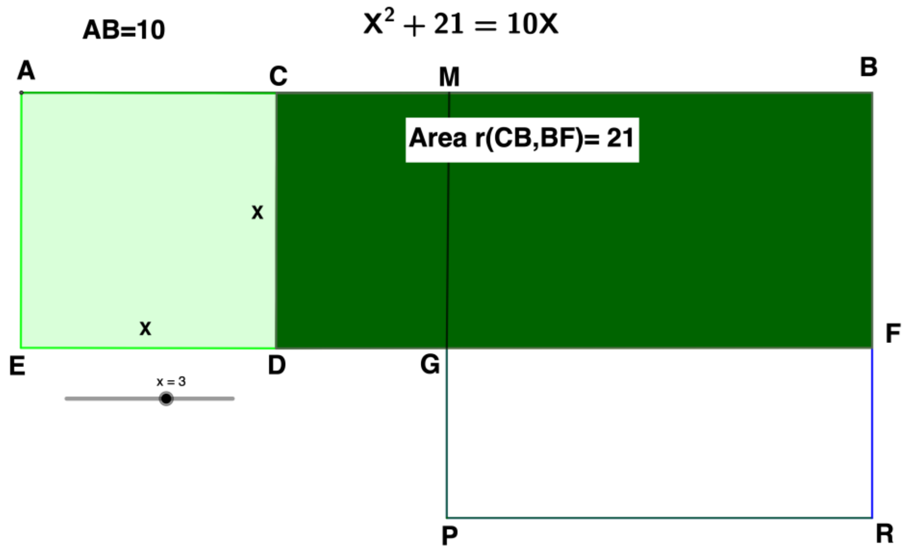
Sia **r(CB,BF)** il rettangolo di **lato x e area 21.**

Se x è una soluzione dell'equazione:

$$x^2 + 21 = 10x,$$

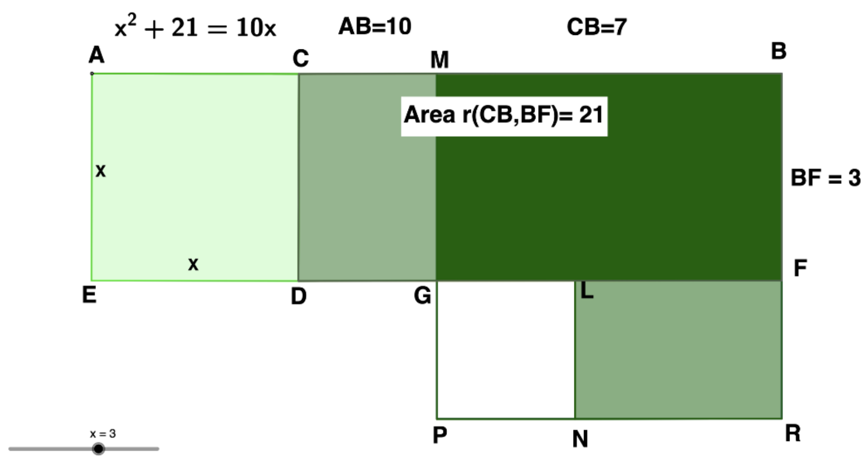
deve essere **Area r(AB, BF) = 10x** e quindi **AB = 10.**

Modificare figura



Sia **M** il punto medio di **AB**, quindi **AM=MB=5**.
Costruisco il quadrato **q(MB),** di lato MB.

Area q(MB) = 25



Costruisco il **quadrato q(GP)**.

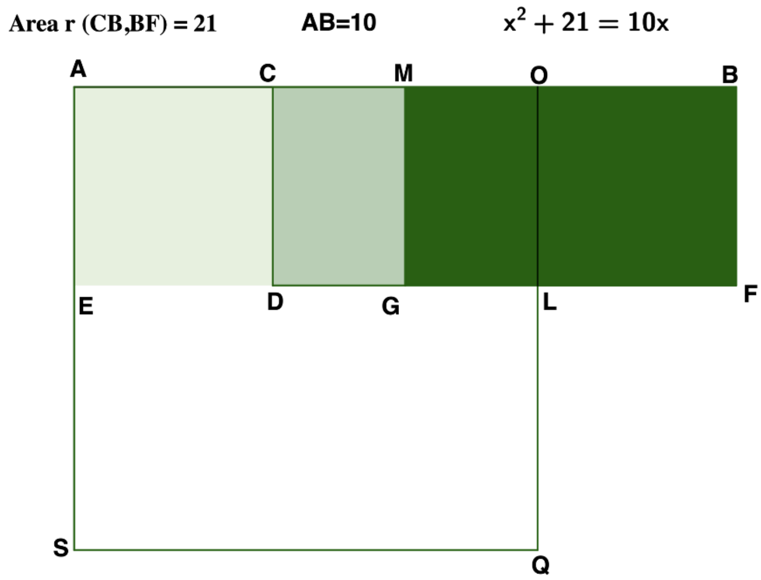
Risulta **GP = DG** e **LF = MG**

Quindi **r(CM,MG) = r(LF,FR)**

Area gnomone (MBRNLG) = 21 e **Area q(GP) = 25 – 21 = 4**

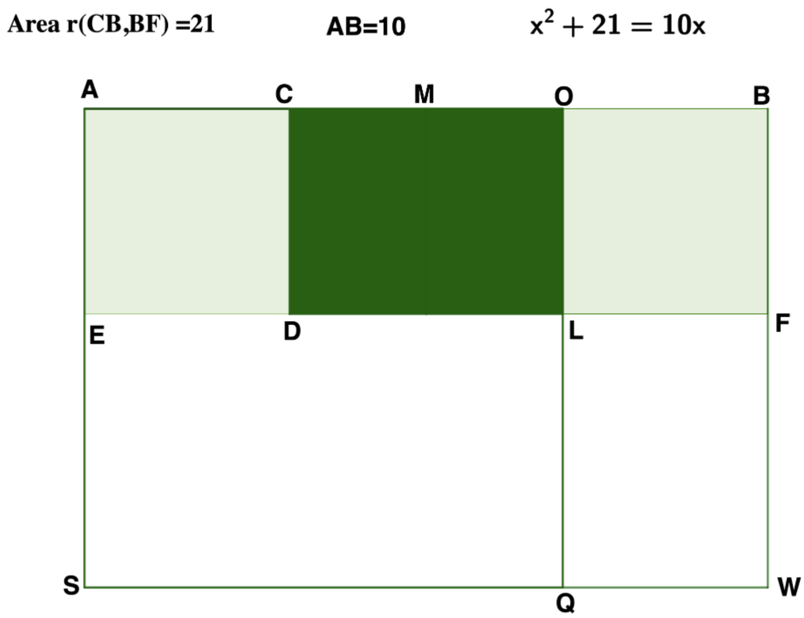
Ne segue **GP = DG = 2 e x = 5 – 2 = 3 è una soluzione.**

Se ora aggiungiamo **GL = 2 a EG = 5**, otteniamo **EL = 7** che è un'altra soluzione.
Infatti:



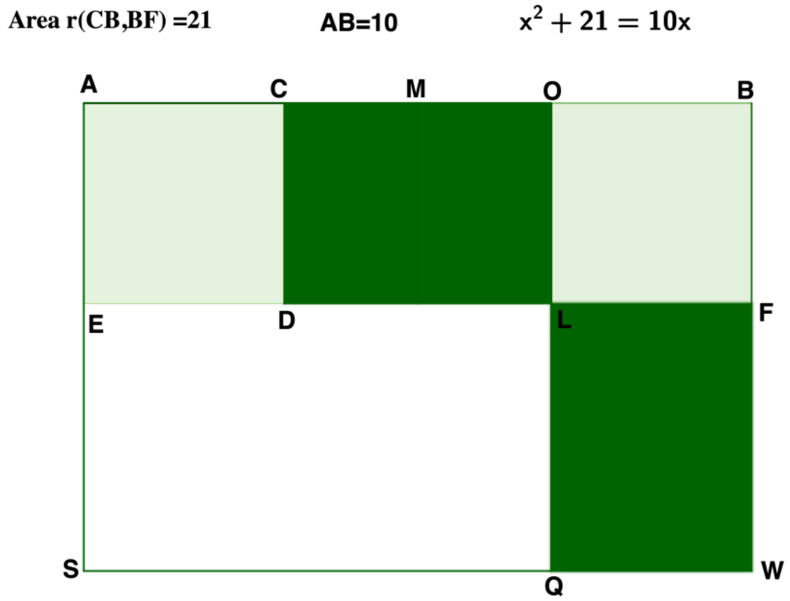
Costruisco il quadrato di lato **AO = 7**.

Area q(AO) = 7^2 = 49.



Costruisco il rettangolo di lati

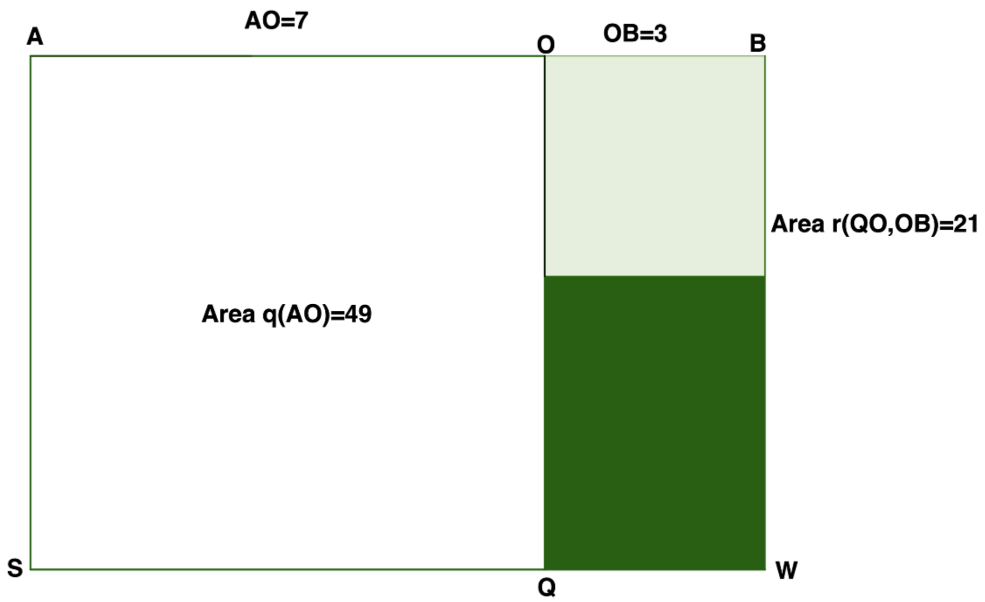
AB = 10 e AS = 7.



Risulta CO = LQ e AC = OB

Quindi r (CO, OL) = r (QL, LF)

Segue che **Area r (QO, OB) = 21**



Risulta quindi **$AO^2+21=10AO$.**

AO = 7 è quindi una soluzione dell'equazione **$x^2 + 21 = 10x$.**

Dal particolare al generale

In generale risolvere l'equazione $\mathbf{x^2 + q = px}$, con p e q positivi, equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x + y = p} \\ \mathbf{xy = q} \end{cases}$$

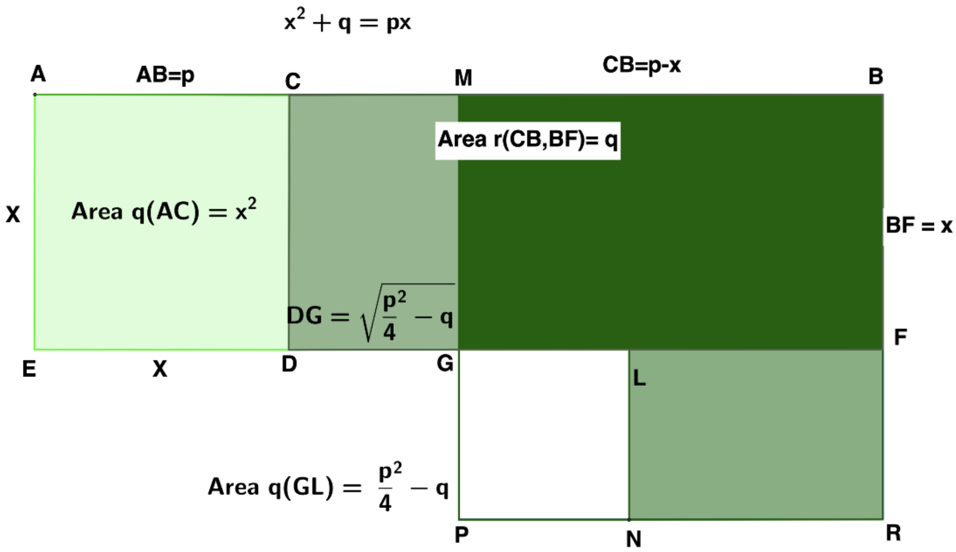
Cioè a trovare i lati di un rettangolo di **Semiperimetro p e di Area q.**

Il sistema diventa l'equazione

$$\mathbf{x\,(p - x) = q}$$

le cui soluzioni sono quindi i lati del rettangolo cercato.

Ricostruendo la figura nel caso generale, si ha:



Area r(AB, BF) = px

AE = x

AB = p

r (DC, CB) è il rettangolo cercato, di **Area q** e **Semiperimetro p**.

I lati del rettangolo risultano quindi:

$$DC = ED = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{e} \quad CB = DF = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Osserviamo che **Area r (DC, CB) = Area q(MB) – Area q(GL)**
(Euclide, Proposizione 5, Libro II)
Questa costruzione permette quindi di vedere anche che, tra tutti i rettangoli isoperimetrici r(CB,BF), quello di area massima si ottiene quando Area q(GP) = 0, ovvero quando C = M.
Il rettangolo di semiperimetro p e di area massima risulta quindi il quadrato q(MB) di lato $\frac{p}{2}$.

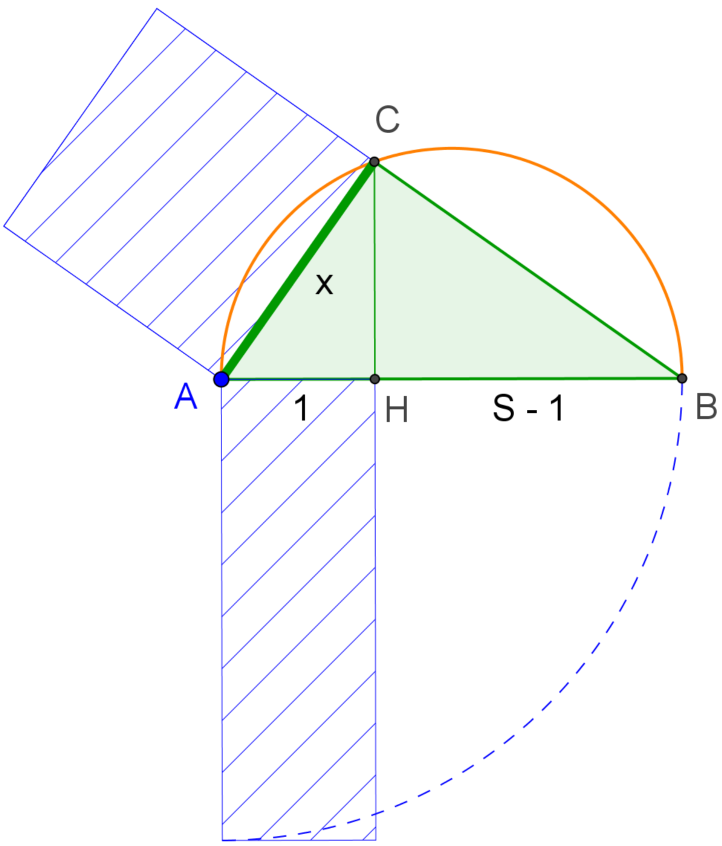
Costruzione geometrica delle soluzioni di equazioni di II grado presentate, mediante il metodo di Euclide, a partire dalla conoscenza della formula risolutiva

Parte prima

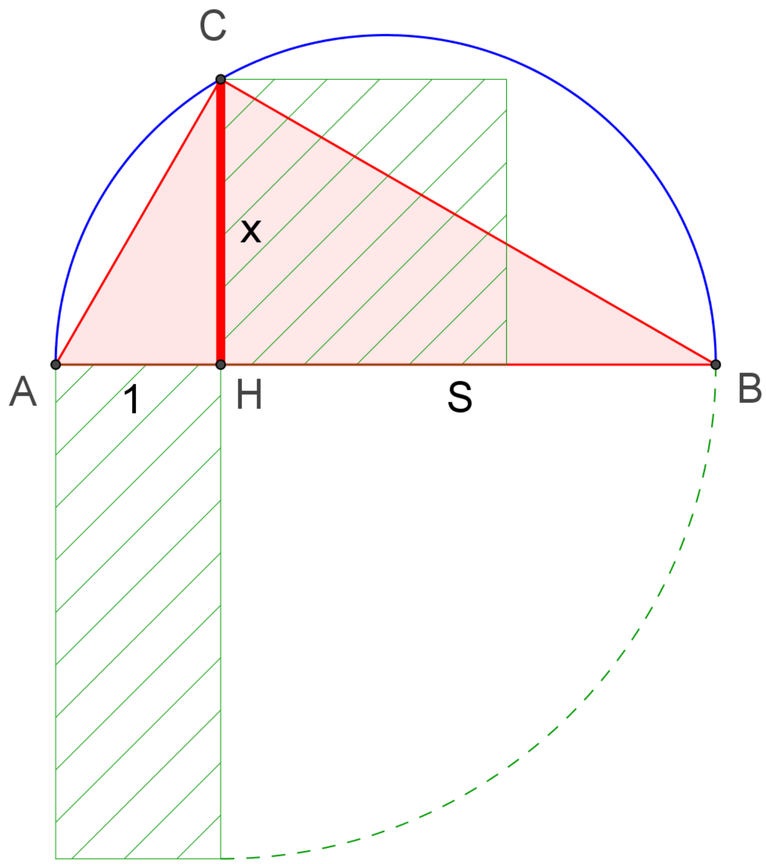
Il problema consiste nel costruire geometricamente il lato di un quadrato di area data *S*.
Il problema si traduce quindi nell'equazione di secondo grado:

$$x^2 = S \ (S > 0)$$

Risoluzione con il I teorema di Euclide
Sappiamo infatti che il quadrato costruito su AC è equiesteso al rettangolo aventi per lati AH e AB.



Risoluzione con il II teorema di Euclide
Sappiamo infatti che il quadrato costruito su CH è equiesteso al rettangolo aventi per lati AH e HB.



Parte seconda

Il problema consiste nel determinare i lati di un rettangolo conoscendo la differenza dei suoi lati e l'area.

Indicati con *d* la differenza dei due lati del rettangolo e con *A* la sua area, si ha l'equazione:

$$x\,(d + x) = A \quad \leftrightarrow \quad x^2 + dx - A = 0$$

Risolviamo l'equazione applicando la formula risolutiva.

Si ottiene:

$$x = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A}$$

Come costruire geometricamente la soluzione dell'equazione?

Cominciamo con il porre l'attenzione sull'espressione $\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A}$

Un segmento di lunghezza $\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A}$ si può pensare come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente cateti di lunghezza $\frac{d}{2}$ e $\sqrt{A}$.

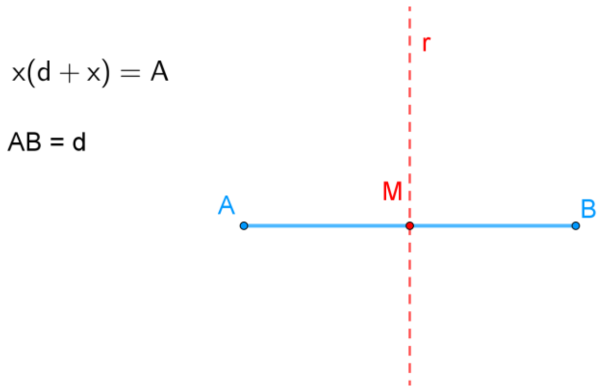
Un segmento di lunghezza $\sqrt{A}$ si può determinare applicando uno dei teoremi di Euclide.

Dunque per costruire il rettangolo cercato si può operare al modo seguente:

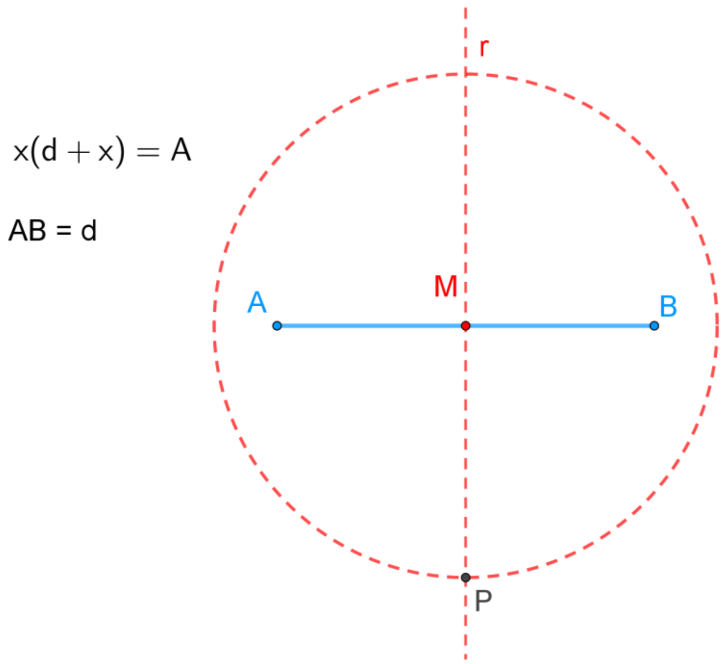
1. disegnare un segmento AB di lunghezza d

2. individuare il punto medio M del segmento AB

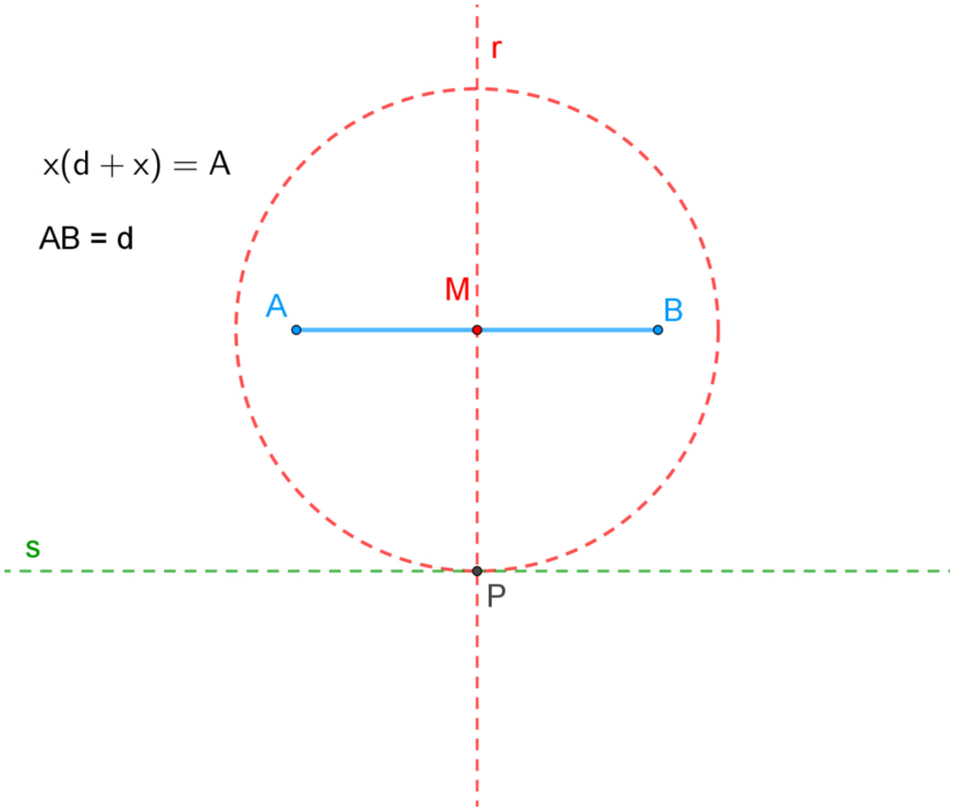
3. tracciare per M la perpendicolare *r* ad AB



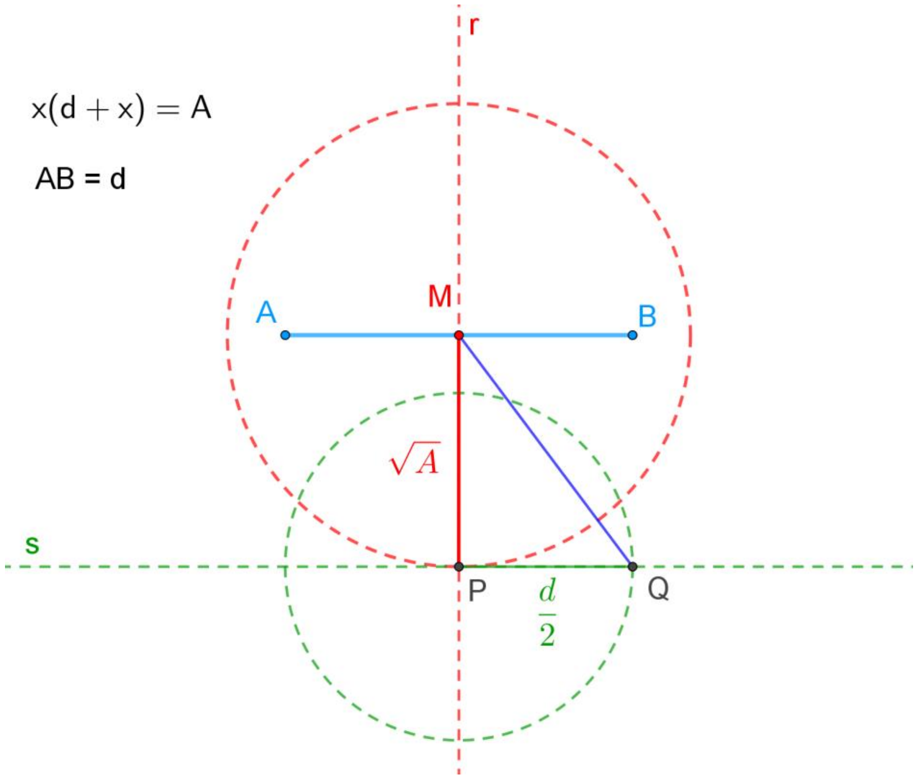
4. individuare un punto P su *r* che abbia distanza da M uguale a $\sqrt{A}$



5. tracciare la perpendicolare *s* a *r* passante per P

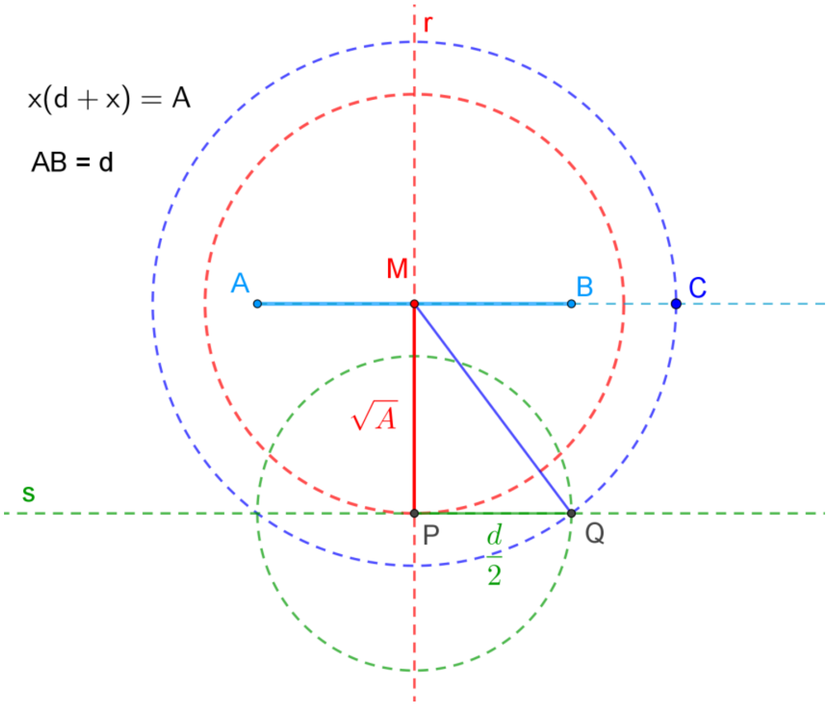


6. individuare un punto Q su *s* che abbia distanza da P uguale a $\frac{d}{2}$

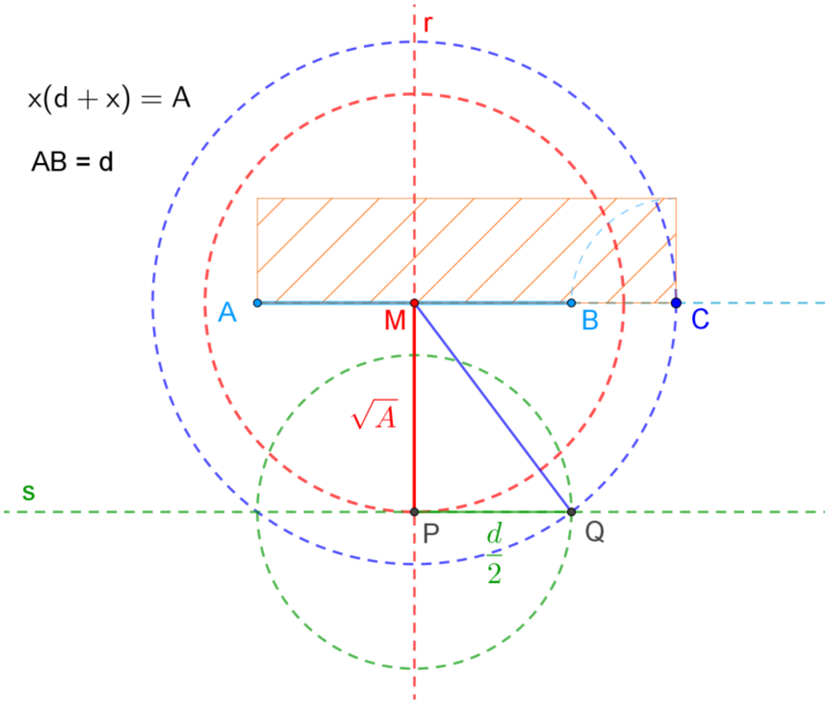


$$MQ = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A}$$

7. riportare il segmento MQ sulla retta AB

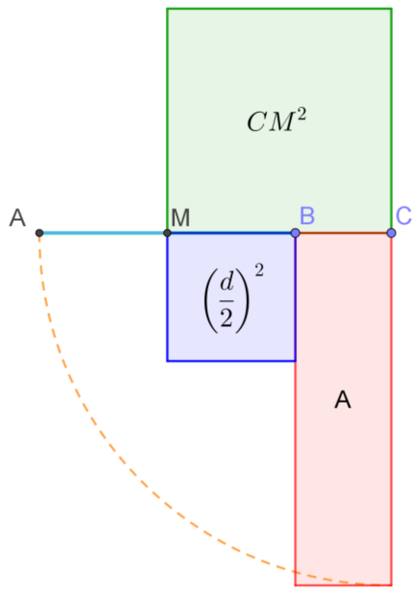


Il rettangolo cercato ha come lati i segmenti AC e BC.



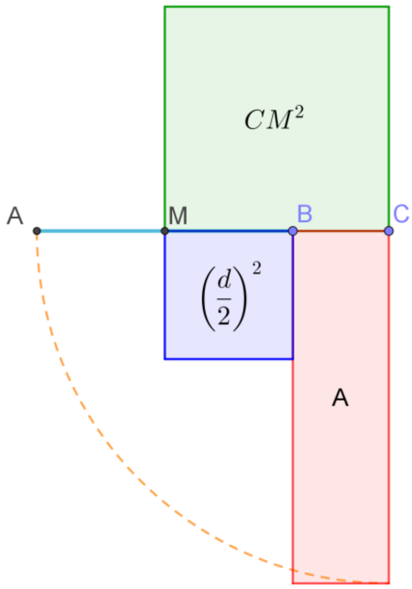
Determina geometricamente i lati di un rettangolo sapendo che la loro differenza è 24 cm e che l’area del rettangolo è 81 cm^2.

Dall'essere $CM = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A}$ si deduce che $CM^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + A$ che può essere visualizzato geometricamente al modo seguente:



La costruzione geometrica ben illustra l'enunciato della Proposizione n. 6 del secondo libro degli *Elementi* di Euclide:

Se si divide una retta, ed un'altra le è aggiunta per diritto, il rettangolo compreso da tutta la (prima) retta più quella aggiunta e dalla retta aggiunta, insieme col quadrato della metà (della prima), è uguale al quadrato della retta composta dalla metà (della prima) e dalla retta aggiunta.



Poniamo AM = MB = a e BC = b e riscriviamo la relazione tra le aree dei quadrilateri in figura.

Si avrà $CM = a + b$ e $AC = 2a + b$ e dunque la proposizione 6 afferma che:

$$(a + b)^2 = a^2 + b(2a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

CONCLUSIONE

Spesso quando risolviamo un'equazione di II grado nell'ambito di un problema geometrico, sembra che il procedimento risolutivo non abbia alcun collegamento con il problema di partenza.

Tale approccio permette di unificare molti concetti di algebra e geometria, superando anche quella trattazione separata della geometria euclidea, dell'algebra e della geometria cartesiana che dà luogo ad un'ingiustificata separazione delle conoscenze matematiche.