Introduzione alla Geometria Sferica

con la SFERA DI LENART

Percorsi didattici presso il liceo «A. Volta» di Colle Di Val D'Elsa

- classe 2°C Liceo matematico – a.s 2018/19 (10 incontri svolti in presenza)
- classe 3°C Liceo matematico – a.s 2020/21 (attività iniziate a fine Gennaio 2021, in parte in presenza, in parte a distanza, ancora in corso)

Docente: Barbara Bigi

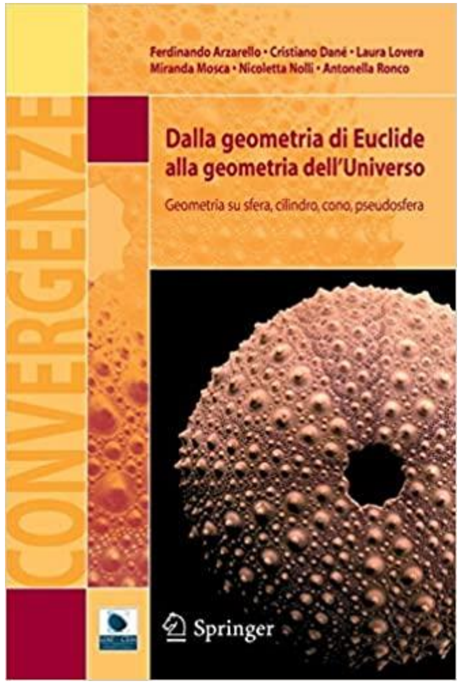
LE ATTIVITA’ PROPOSTE SONO STATE TRATTE DA

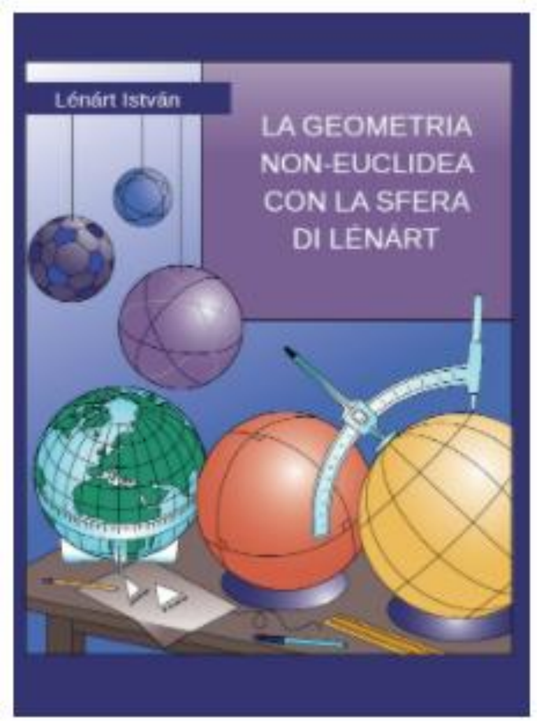
TEACHER TRAINING COURSE: «PLANE AND SPHERE COMPARATIVE GEOMETRY WITH THE LENART SPHERE»

TRAINER ISTVAN LENART – LENART EDUCATIONAL RESEARCH AND TECNOLOGY

http://lenartsphere.com/teacher-training-course/

https://www.formath.it/la-sfera-di-lenart/





“LA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA CON LA SFERA DI LENART” - I. LENART (traduzione a cura del prof. A. Gambini)

"DALLA GEOMETRIA DI EUCLIDE ALLA GEOMETRIA DELL'UNIVERSO. GEOMETRIA SU SFERA, CILINDRO, CONO, PSEUDOSFERA"

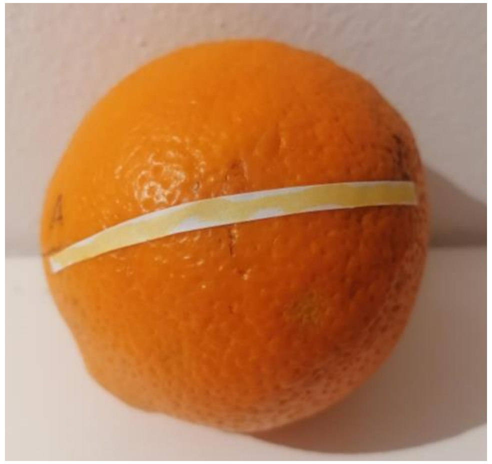
DI F. ARZARELLO, C. DANÉ , L. LOVERA, M. MOSCA, N. NOLLI, A. RONCO

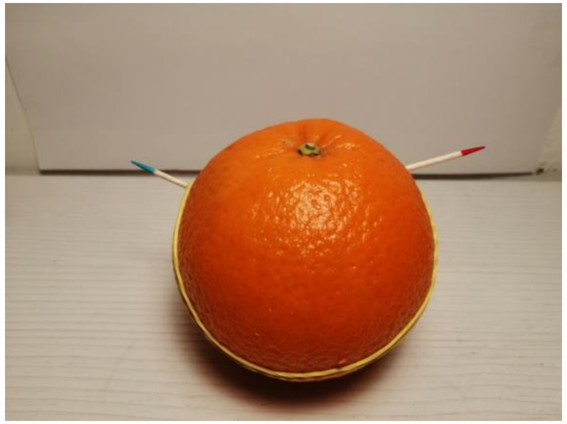
3C - PRIMA FASE (A DISTANZA)

SI POSSONO TRACCIARE CAMMINI DIRITTI SU UNA SUPERFICIE NON PIANA COME LA SUPERFICIE DI UNA SFERA O DI UN CILINDRO?

- QUALI CARATTERISTICHE DEVE AVERE UNO STRUMENTO CONCRETO AFFINCHÉ SIA POSSIBILE CON ESSO DISEGNARE PERCORSI DIRITTI?
- QUANTI CAMMINI DIRITTI SI POSSONO TRACCIARE CON ESTREMI FISSATI A E B ?
- IL PERCORSO AB PUÒ ESSERE PROLUNGATO INDEFINITAMENTE ? QUALE FORMA ASSUME?
- UN CAMMINO DIRITTO DA A A B COINCIDE CON LA VIA PIÙ BREVE?

SUPERFICIE SFERA





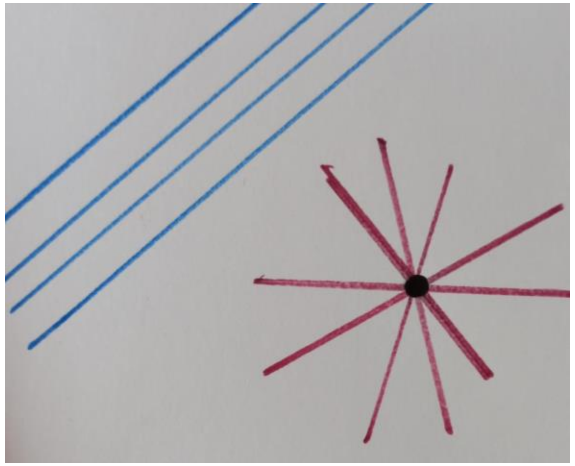
«Sulla superficie sferica otteniamo linee chiuse e limitate, che assomigliano al piano che le sottende»

«Su una superficie non piana andare dritti significa seguire una retta sdraiata sulla superficie»

«Sulla superficie sferica e su quella cilindrica
abbiamo più percorsi diritti.
Quello più corto è per forza diritto ma
non possiamo affermare il contrario.»

SUPERFICIE CILINDRO

CONFRONTO PIANO – SFERA – CILINDRO



- SIA SULLA SFERA CHE SUL CILINDRO IL **PRIMO POSTULATO DI EUCLIDE** NON E' VALIDO.
- SULLA SFERA NON ESISTONO LINEE RETTE PARALLELE, E NON VALE IL QUINTO POSTULATO.
- SUL CILINDRO ESITONO LINEE RETTE PARALLELE E IL QUINTO POSTULATO È VALIDO

PUNTO DI VISTA LOCALE

IL CILINDRO E’ SVILUPPABILE SU UN PIANO.

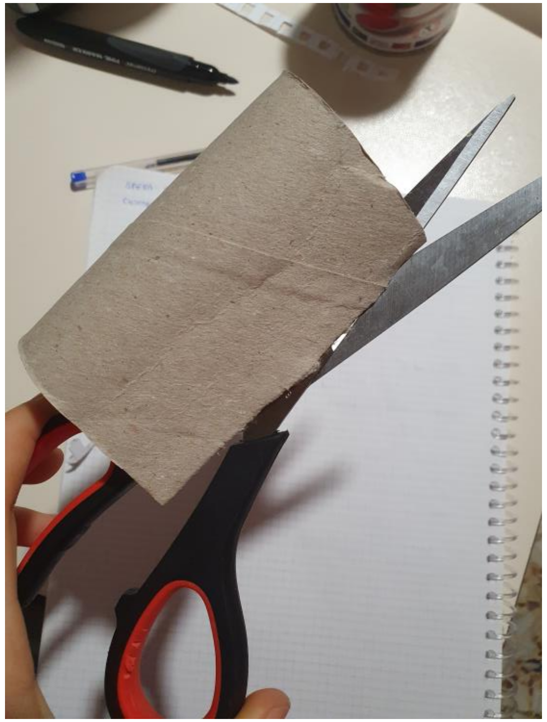
SE CI LIMITIAMO A PICCOLI INTORNI DI UN PUNTO,

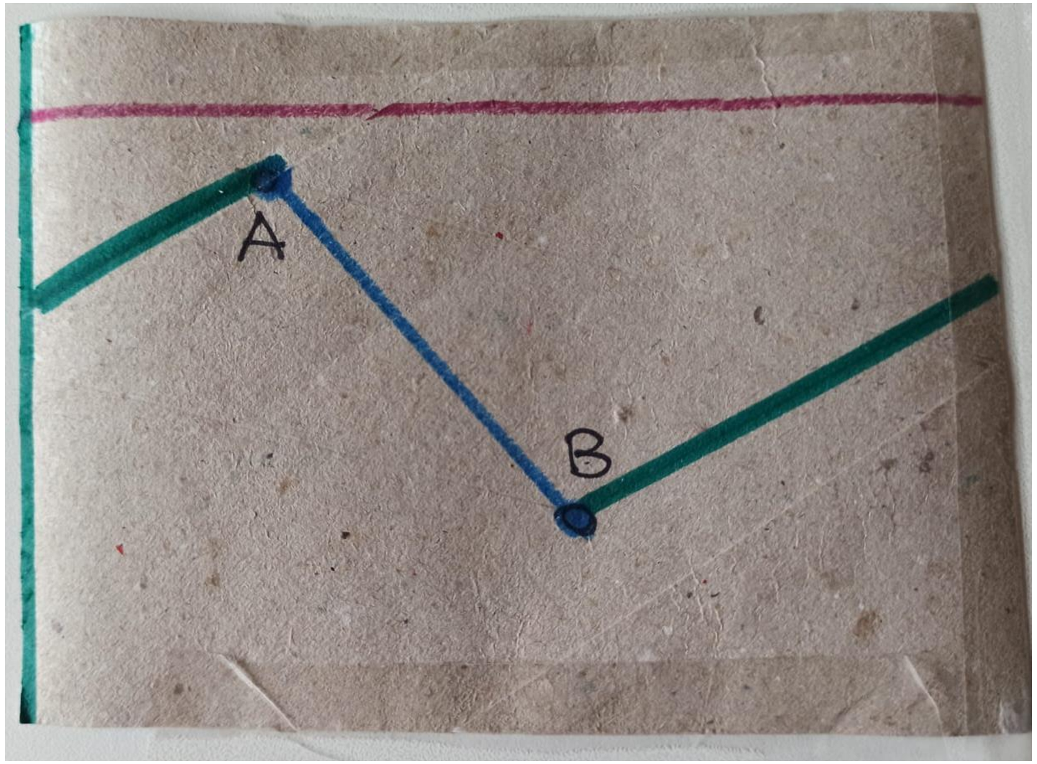
LA DISTANZA CHE MISURIAMO SUL CILINDRO È LA STESSA CHE MISURIAMO SUL SUO SVILUPPO PIANO.

LA GEOMETRIA SUL CILINDRO E’ LOCALMENTE EUCLIDEA

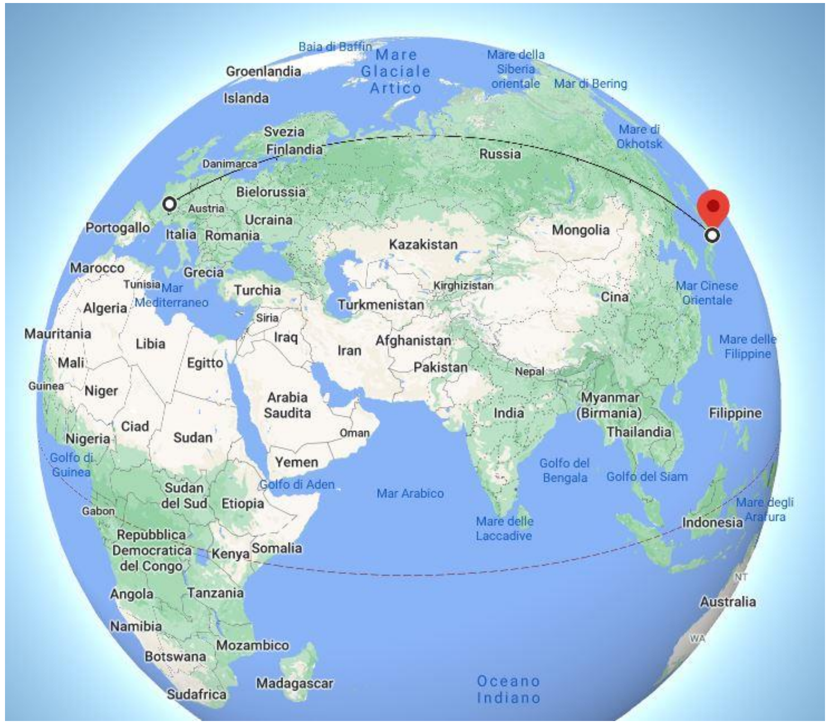
LA SFERA NON E’ SVILUPPABILE SU UN PIANO.

ANCHE UNA PICCOLA CALOTTA SFERICA NON PUO’ ESSERE SCHIACCIATA PERFETTAMENTE SU UN FOGLIO DI CARTA PIATTO SENZA STIRACCHIARLA, PIEGARLA O SPEZZARLA.

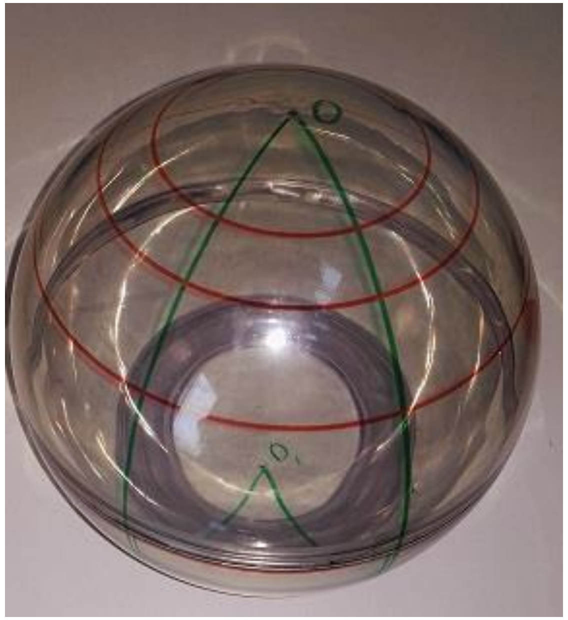




ESPERIENZE DI CONSOLIDAMENTO
sulla sfera



DEFINIZIONI DI SEGMENTO, CIRCONFERENZA, ANGOLO



UNITÀ DI MISURA SEGMENTI:

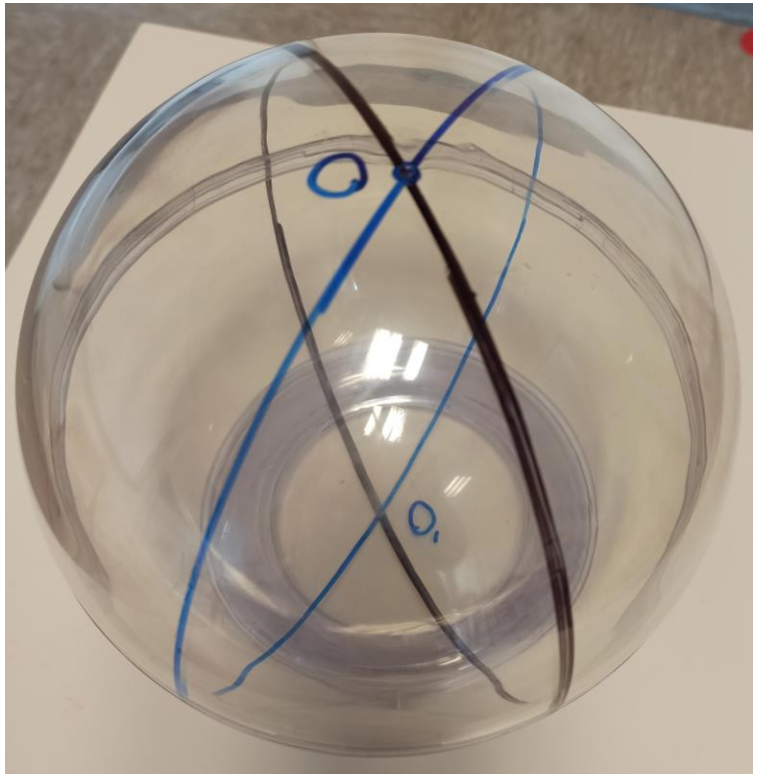
1/360 DI CIRCONFERENZA MASSIMA

UNITÀ DI MISURA ANGOLI:

1/360 DI ANGOLO GIRO

ATTIVITA' FONDAMENTALI - (UTILIZZO RIGHELLO SFERICO E COMPASSO SFERICO)

- DATO UN PUNTO O SULLA SFERA COSTRUISCI LA CIRCONFERENZA CHE HA O COME POLO/CENTRO
- DATO UN PUNTO O SULLA SFERA , COSTRUISCI IL POLO OPPOSTO AD O
- DATA UNA CIRCONFERENZA MASSIMA INDIVIDUA PROCEDURE PER COSTRUIRE I SUOI POLI/CENTRI



RELAZIONE DI POLARITA'

SE LA POLARE DI UN PUNTO P

PASSA PER Q ,

ALLORA LA POLARE DI Q PASSA

PER P

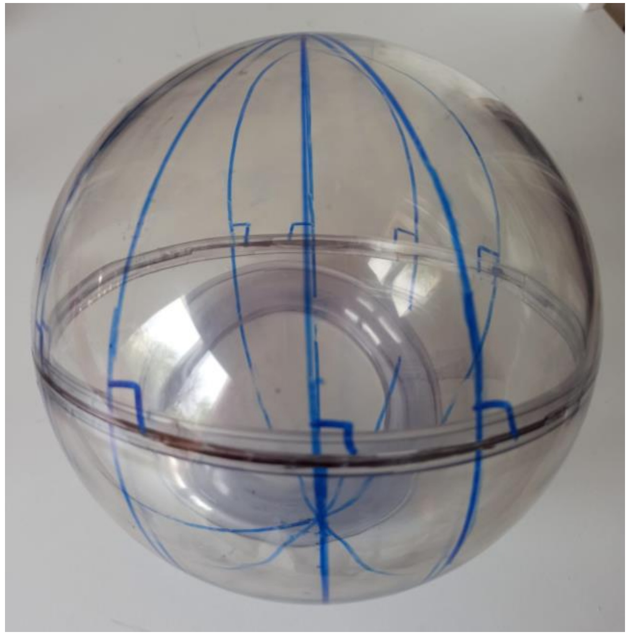
PERPENDICOLARITA’

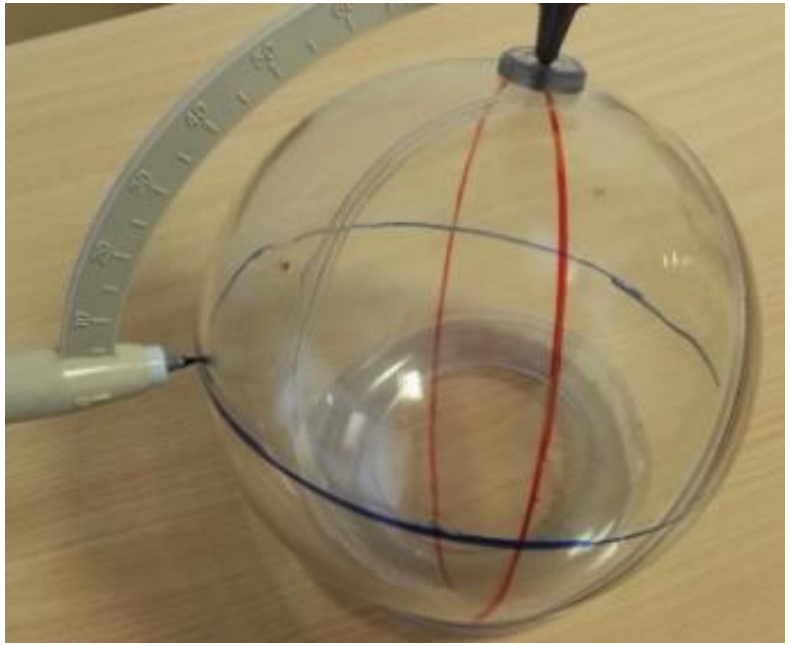
PER COSTRUIRE UNA CIRCONFERENZA MASSIMA

PERPENDICOLARE A C1 , BASTA TRACCIARE:

- **UNA CIRCONFERENZA MASSIMA PASSANTE PER I POLI DI C1**

- **UNA CIRCONFERENZA MASSIMA AVENTE I CENTRI SU C1**



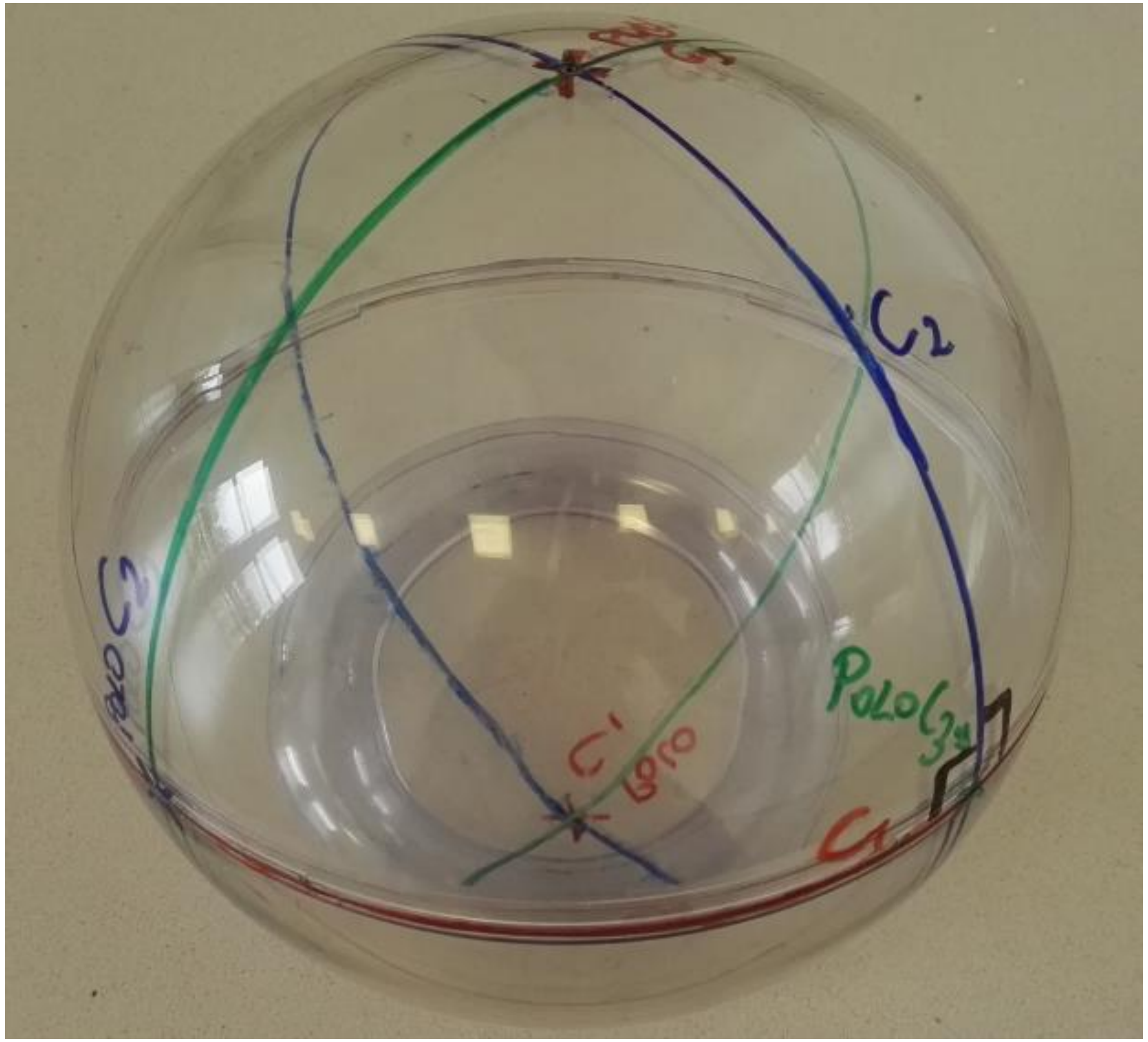


C2 È PERPENDICOLARE A C1

SE E SOLO SE

I POLI (CENTRI) DI C1 APPARTENGONO A C2

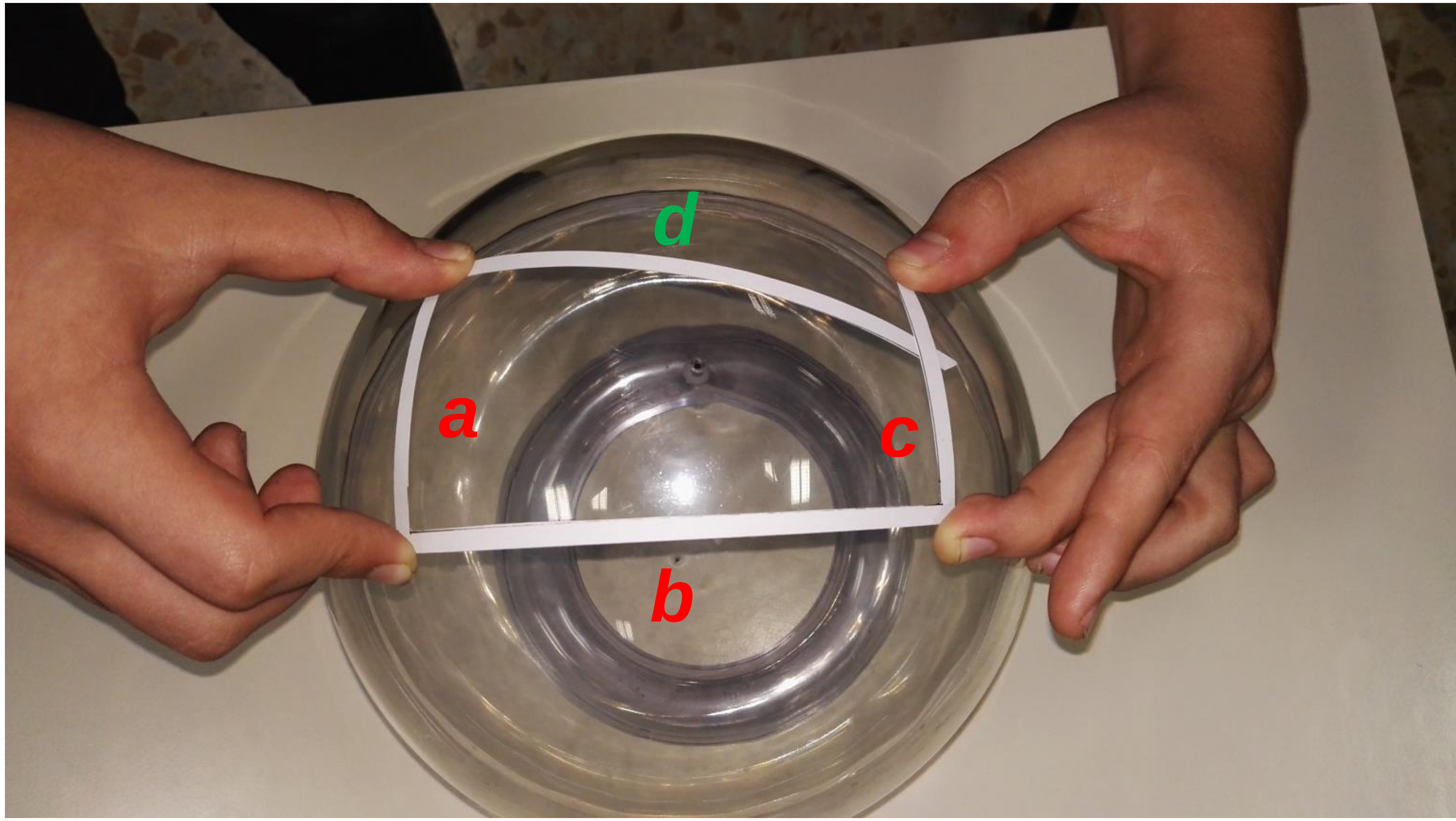
SULLA SFERA ESISTONO TRIANGOLI CON TRE ANGOLI RETTI



LA MISURA DI CIASCUNO DEGLI ANGOLI INDIVIDUATI DA C1 E C2
COINCIDE CON LA DISTANZA FRA UNO DEI POLI DI C1 E UNO DEI POLI DI C2, OVVERO 90°

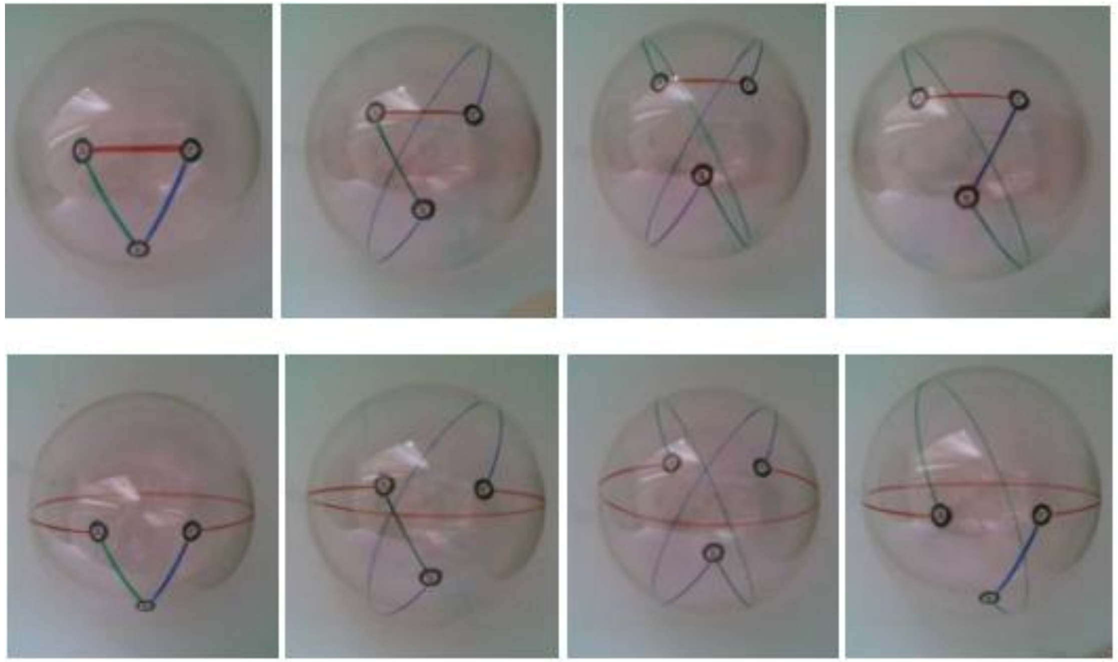
IL COLORADO HA FORMA RETTANGOLARE?

SULLA SFERA NON ESISTONO RETTANGOLI

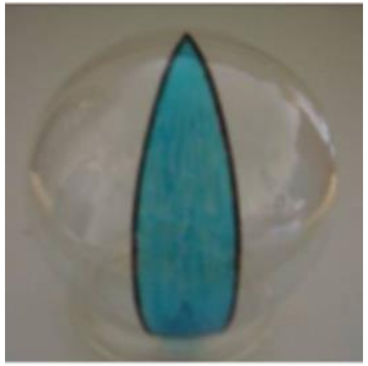


TRIANGOLI E POLIGONI

1) Dati 3 punti nel piano, quanti triangoli esistono con in vertici nei tre punti? Scrivi la definizione di triangolo nel piano.	1)Dati 3 punti sulla sfera, quanti triangoli esistono con in vertici nei tre punti? Prova a dare una definizione di triangolo sulla sfera.
2) Come è definito un poligono nel piano? Esistono nel piano poligoni con un solo lato o con due lati?	2) Come possiamo definire un poligono sulla sfera? Esistono nel piano poligoni con un solo lato o con due lati?



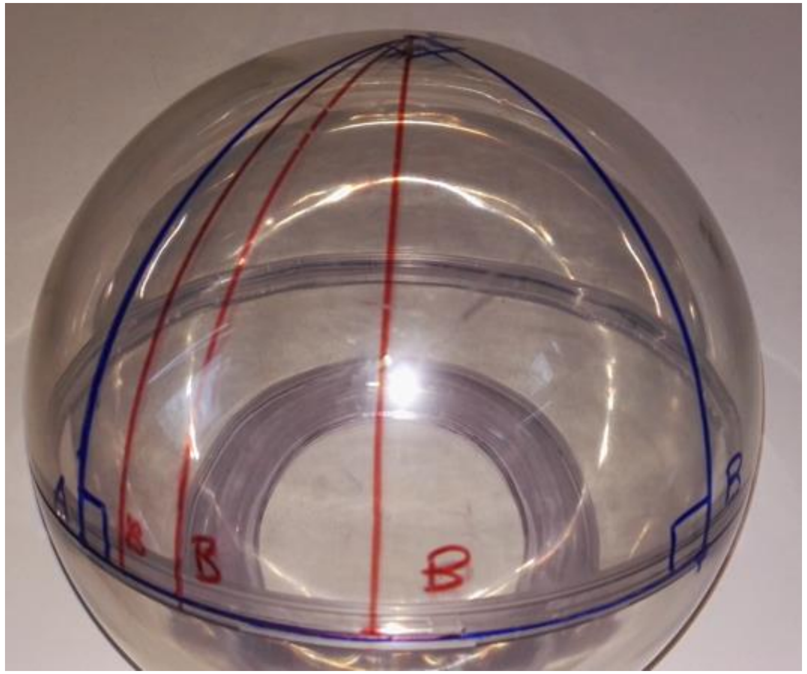
BIANGOLO
POLIGONO
CON 2 LATI E
DUE VERTICI

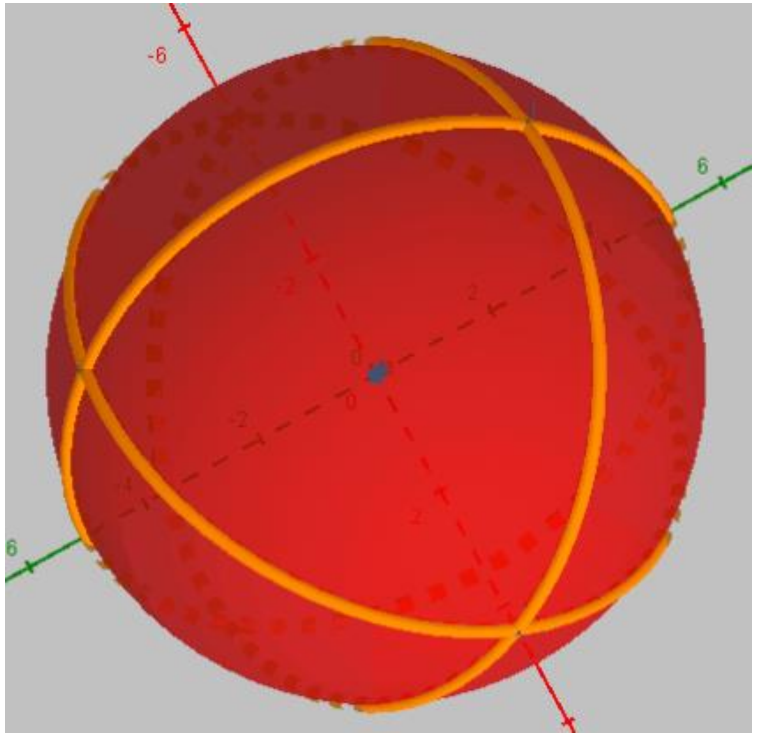


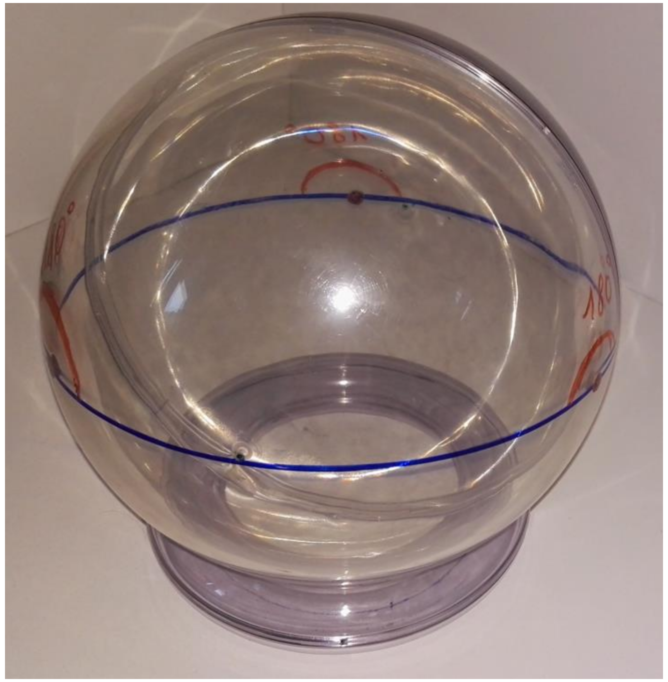
UNA **PROCEDURA** PER OTTENERE UN <u>TRIANGOLO CON TRE ANGOLI OTTUSI</u> È LA SEGUENTE:

- COSTRUIRE UN BIANGOLO AVENTE ANGOLI AI VERTICI OTTUSI
- TAGLIARE IL BIANGOLO CON UNA CIRCONFERENZA MASSIMA CHE FORMI CON I LATI DEL BIANGOLO, DALLA STESSA PARTE, DUE ANGOLI OTTUSI

LA **SOMMA DEGLI ANGOLI** DI UN TRIANGOLO NON E’ **COSTANTE**





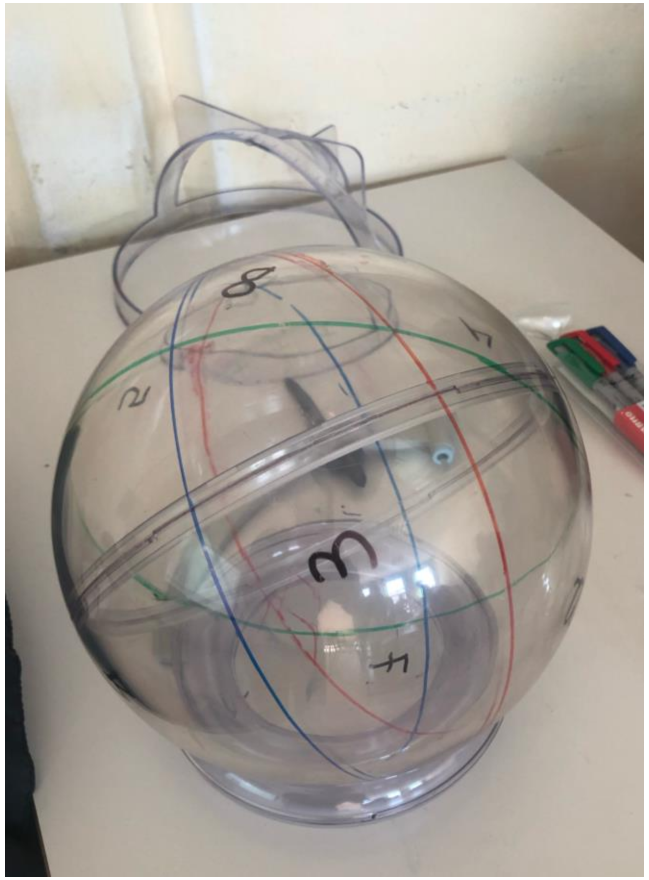


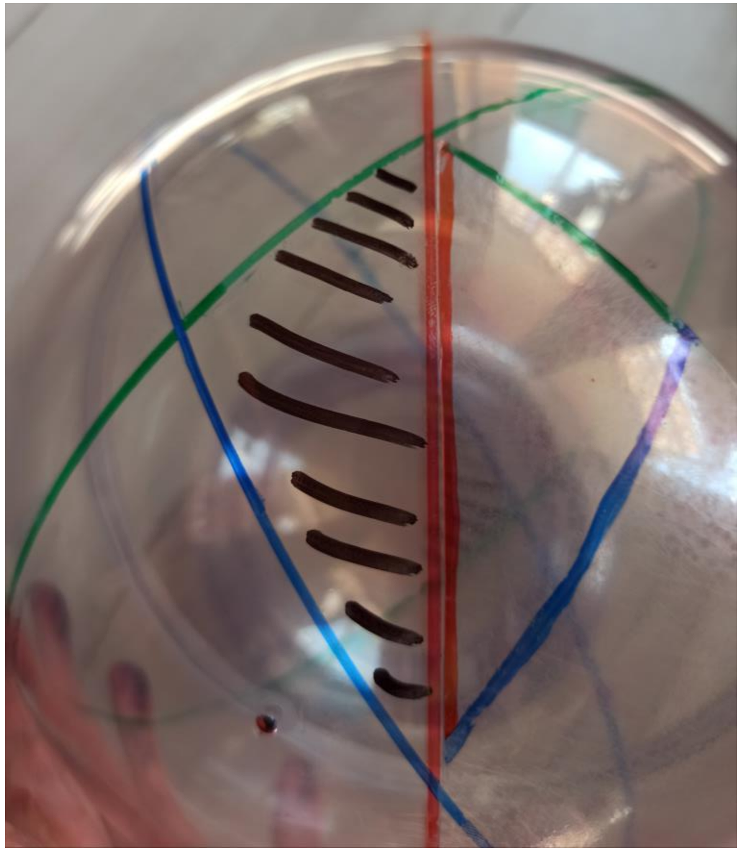
CONGETTURA: LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI CRESCE AL CRESCERE DELL’AREA DEL TRIANGOLO E VARIA DA 180° A 540°

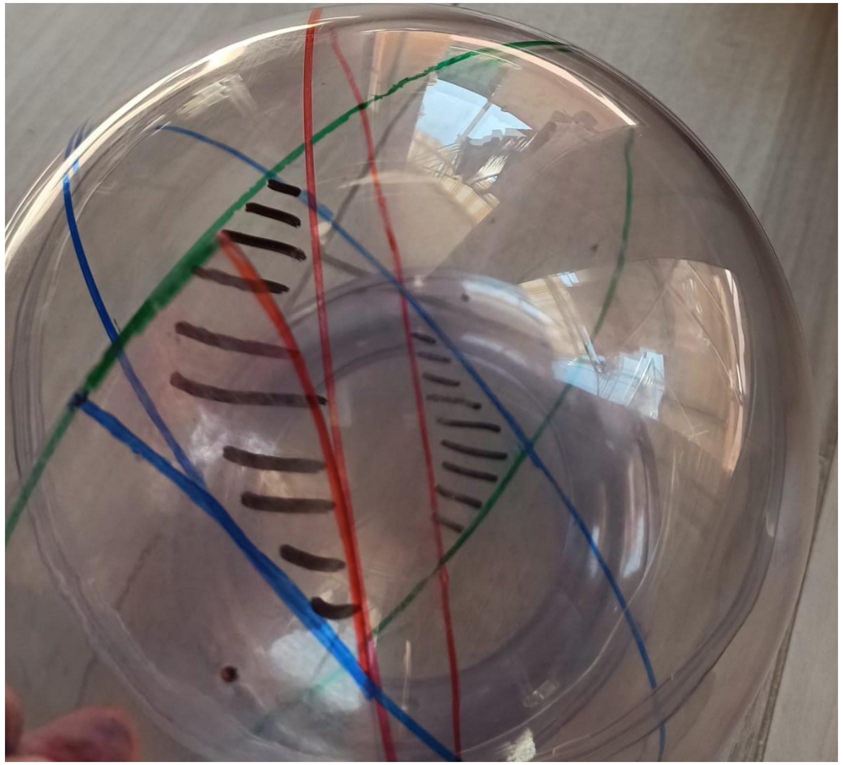
ATTIVITA' SUI TRIANGOLI - CONGRUENZA

DISEGNATE UN TRIANGOLO ABC SULLA SFERA E PROLUNGATE I LATI DISEGNANDO LE TRE CIRCONFERENZE MASSIME SU CUI GIACCIONO I LATI. CONSIDERATE POI IL TRIANGOLO **A'B'C' CHE HA COME VERTICI I PUNTI ANTIPODALI DI A,B E C** RISPETTIVAMENTE. **COME SONO I DUE TRIANGOLI ABC E A'B'C'?** COME HANNO I LATI E GLI ANGOLI?

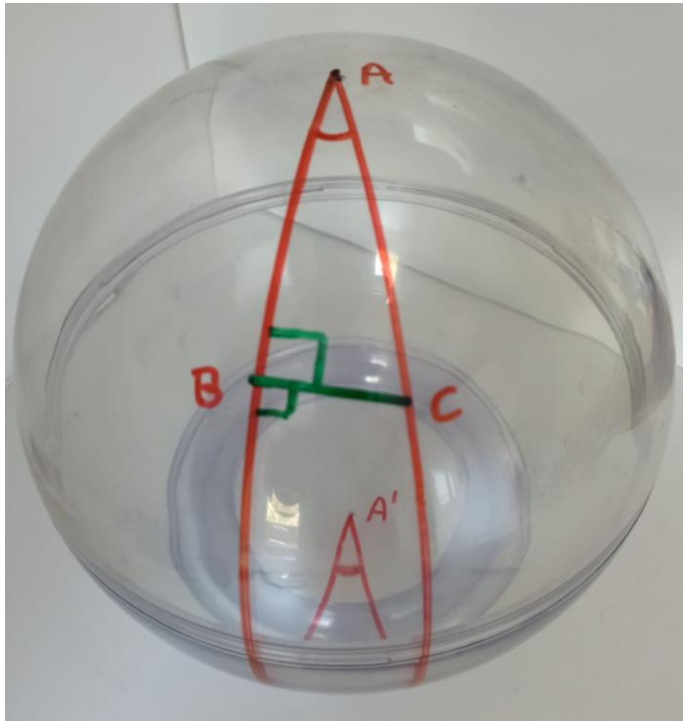
E' POSSIBILE, CON UN MOVIMENTO RIGIDO, FAR SOVRAPPORRE UN TRIANGOLO ALL'ALTRO?

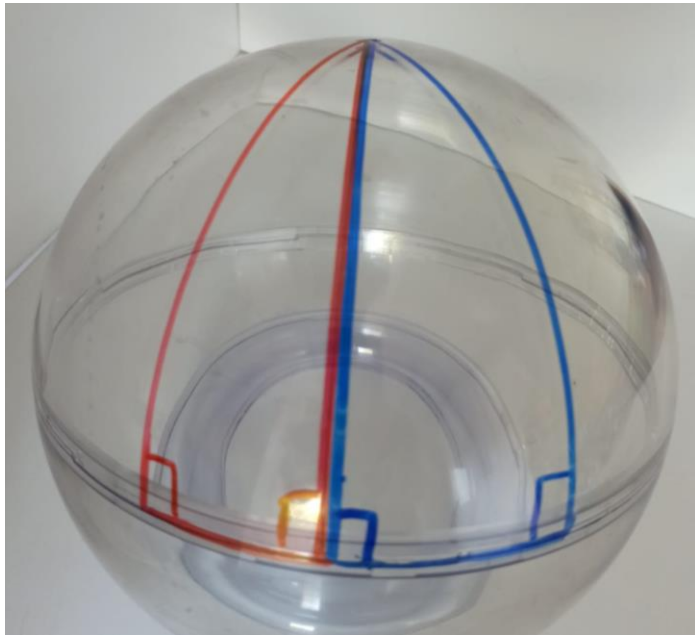


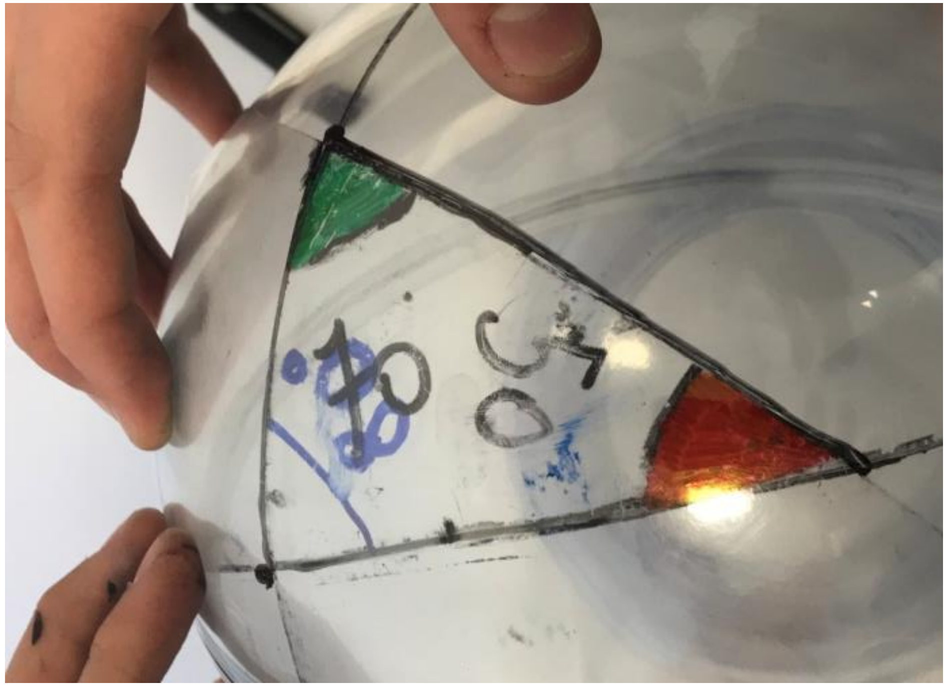




TRIANGOLI CON I LATI E GLI ANGOLI ORDINATAMENTE CONGRUENTI







SULLA SFERA SI POSSONO COSTRUIRE

TRIANGOLI AVENTI RISPETTIVAMENTE CONGRUENTI

UN LATO E DUE ANGOLI, UNO ADIACENTE E L'ALTRO OPPOSTO AL LATO,

MA NON CONGRUENTI

SULLA SFERA SI RIESCE A COSTRUIRE UN SOLO

TRIANGOLO (a meno di congruenze)

CHE ABBIA GLI ANGOLI RISPETTIVAMENTE

CONGRUENTI A TRE ANGOLI ASSEGNATI

SULLA SFERA NON ESISTONO

TRIANGOLI SIMILI

NON CONGRUENTI

AREA DI UN TRIANGOLO E SOMMA ANGOLI INTERNI

UNITA' DI MISURA DELLE AREE

UN TRIANGOLO BIRETTANGOLO

CON ANGOLO AL VERTICE DI 1°

X = AREA DEL TRIANGOLO

α , β , γ MISURA ANGOLI INTERNI DEL TRIANGOLO

SOMMA DELLE AREE DEI TRE BIANGOLI

$$\boxed{2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360 + 2X}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180 + X}$$

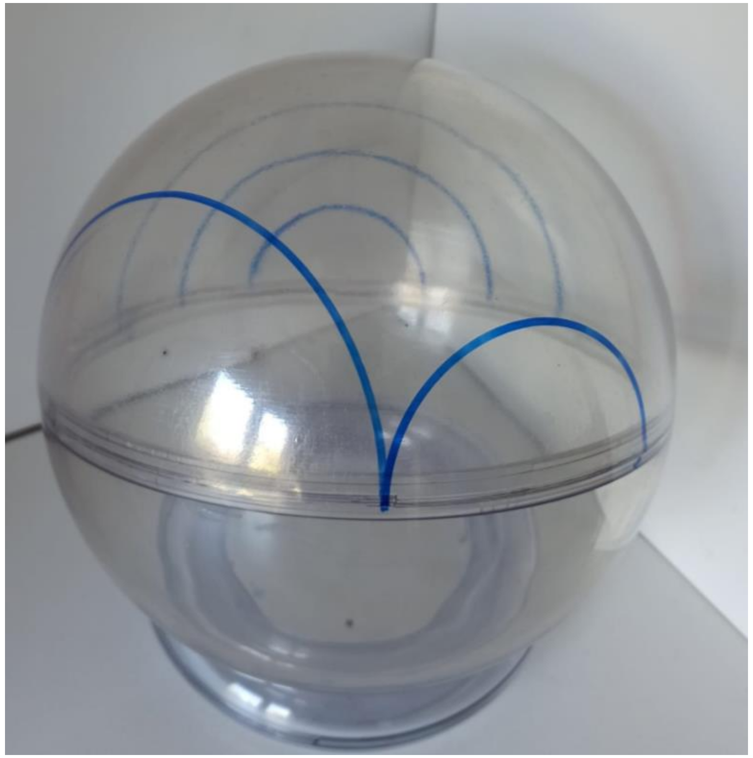
POSSIBILI SVILUPPI DEL PERCORSO

SEMISFERA DI LENART

(PRIVATA DEL BORDO)

MODELLO GEOMETRIA

IPERBOLICA



LE RETTE SONO

SEMICIRCONFERENZE

PRIVATE DEI PUNTI ESTREMI

PERPENDICOLARI AL BORDO

RAPPORTO TRA LA LUNGHEZZA DI UNA CIRCONFERENZA ED IL SUO DIAMETRO (IN PRESENZA)

Qual è il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro? Tale rapporto è costante come nel piano? Prova a disegnare sulla sfera circonferenze concentriche e a misurare perimetri e diametri utilizzando uno spago.

MISURA DIAMETRO	RAPPORTO CIRCONFERENZA DIAMETRO
180 SPHERICAL STEPS	2
120 SPHERICAL STEPS	CIRCA 2,5 (MISURATO UTILIZZANDO SPAGO)
60 SPHERICAL STEPS	CIRCA 3 (MISURATO UTILIZZANDO SPAGO)

studentessa:

«se il diametro è molto piccolo il rapporto tra circonferenza e diametro sarà vicino a pi greco».

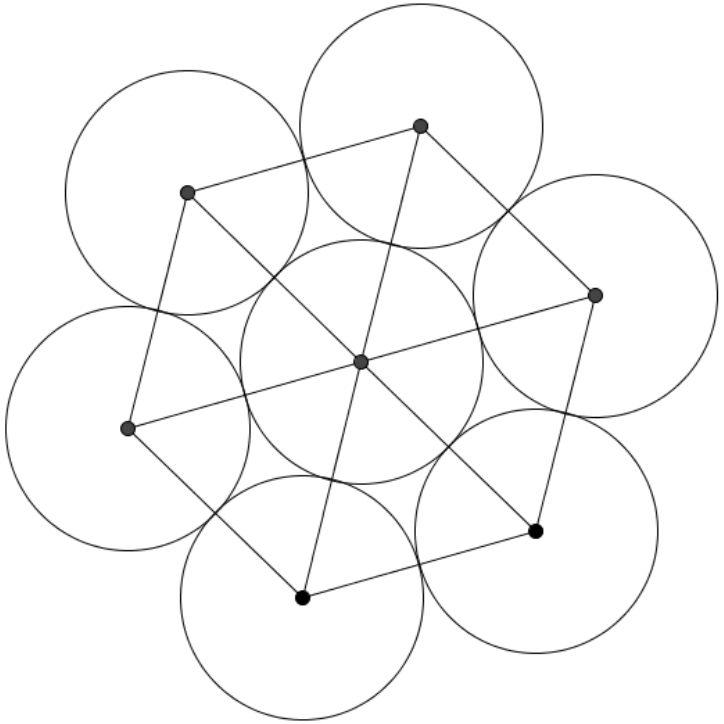
PROBLEMA (soluzione di Gabriele Benucci - 2°C – a.s 2018/19)

NEL PIANO, DATA UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R, SI POSSONO COSTRUIRE (IN ORDINE)

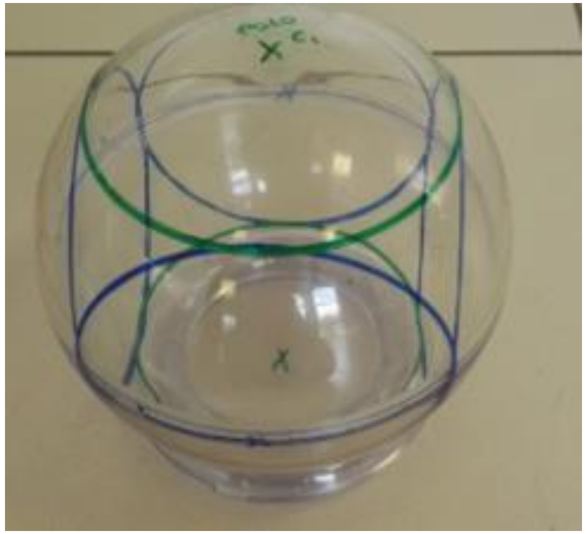
6 CIRCONFERENZE DI RAGGIO R , CIASCUNA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA DATA

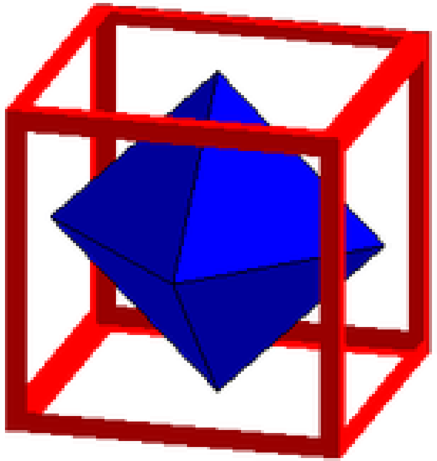
E TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA CHE LA PRECEDE.

SULLA SFERA È POSSIBILE QUESTA COSTRUZIONE?



SULLA SFERA, SE IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA C1 INIZIALE E’ 45°, SI POSSONO TRACCIARE 4 CIRCONFERENZE. TRACCIANDO ANCHE LA CIRCONFERENZA ANTIPODALE A C1, SI HANNO **6 CIRCONFERENZE CHE RICOPRONO LA SFERA**, **I SEGMENTI CHE CONGIUNGONO I 6 CENTRI** INDIVIDUANO UN **OTTAEDRO INSCRITTO NELLA SFERA.** MENTRE SE PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE **I PIANI TANGENTI ALLA SFERA NEI CENTRI DELLE 6 CIRCONFERENZE**, SI FORMA **UN CUBO CIRCOSCRITTO ALLA SFERA.**





POSSIAMO AFFRONTARE IL PROBLEMA DATO USANDO QUESTA PARTICOLARITÀ E PENSANDO AI POLIEDRI REGOLARI CON FACCE TRIANGOLARI INSCRIVIBILI NELLA SFERA.

SE INSCRIVIAMO NELLA CIRCONFERENZA UN ICOSAEDRO, ABBIAMO 12 VERTICI SULLA SUPERFICE DELLA SFERA,

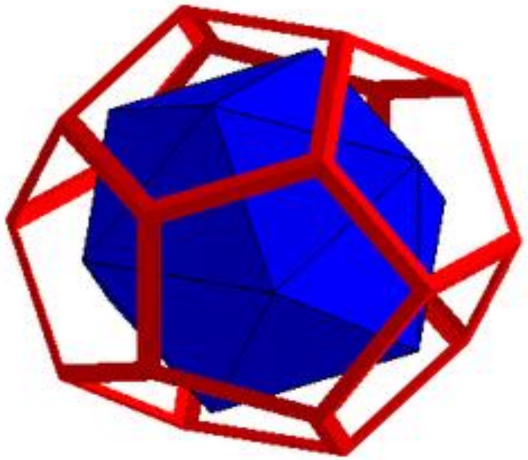
CHE RAPPRESENTANO I **CENTRI DELLE CIRCONFERENZE TANGENTI TRA DI LORO.**

DATA UNA QUALUNQUE DELLE 12 CIRCONFERENZE, ESSA È TANGENTE AD ALTRE 5 CIRCONFERENZE

E LE 12 CIRCONFERENZE RICOPRONO LA SFERA.

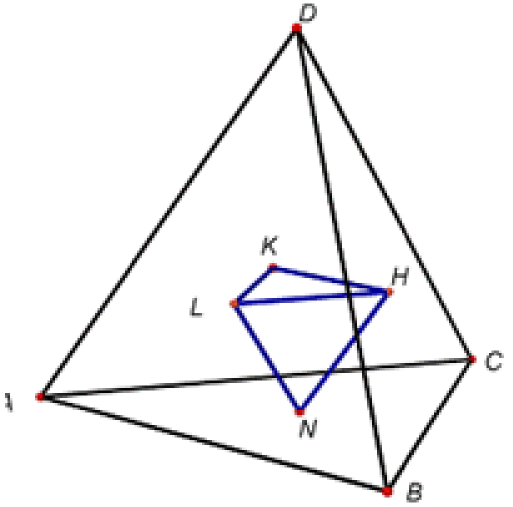
SE CONSIDERIAMO **I PIANI TANGENTI AI CENTRI DELLE CIRCONFERENZE,**

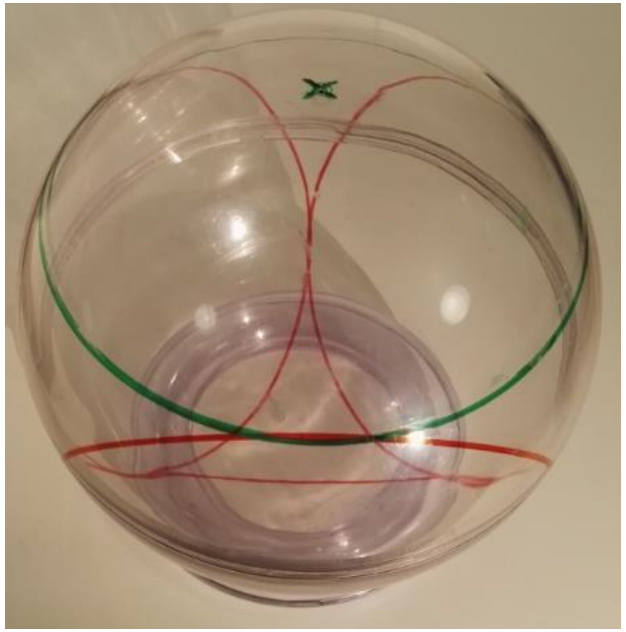
SI OTTIENE UN DODECAEDRO CIRCOSCRITTO ALLA SFERA.



SE INVECE NOI CONSIDERIAMO UN TETRAEDRO INSCRITTO NELLA SFERA; OTTENIAMO 4 PUNTI SULLA SUPERFICE DELLA SFERA, I QUALI SONO I CENTRI DI 4 CIRCONFERENZE.

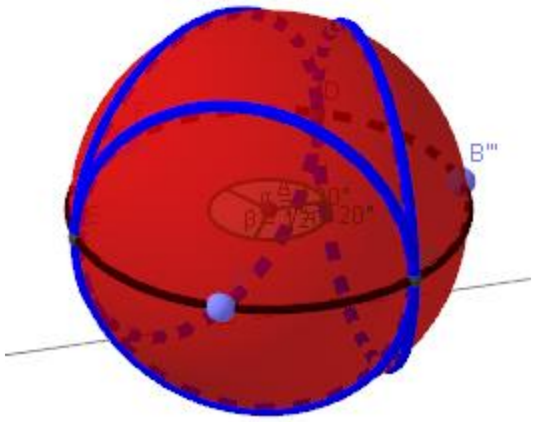
DATA UNA QUALUNQUE DELLE 4 CIRCONFERENZE, ESSA HA 3 CIRCONFERENZE TANGENTI AD ESSA E TANGENTI TRA DI LORO. I 4 PIANI TANGENTI ALLA SFERA NEI 4 VERTICI DEL TETRAEDO FORMANO ANCORA UN TETRAEDRO CIRCOSCRITTO ALLA SFERA.





INFINE SI PUO' CONSIDERARE IL CASO PARTICOLARE IN CUI SI HANNO 3 PUNTI (O1, O2, O3) SU UNO STESSO GREAT CIRCLE A DISTANZA 120° UNO DALL'ALTRO.

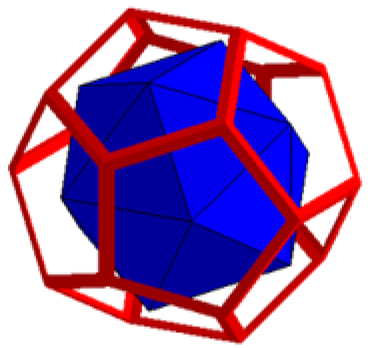
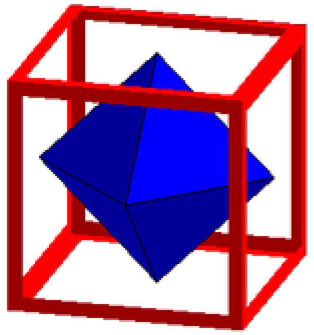
SE TRACCIAMO TRE CIRCONFERENZE CON CENTRI RISPETTIVAMENTE O1, O2 E O3 E RAGGIO 60 SI OTTENGONO TRE CIRCONFERENZE TANGENTI UNA ALL'ALTRA (LA DISTANZA TRA I CENTRI È UGUALE ALLA SOMMA DEI RAGGI)

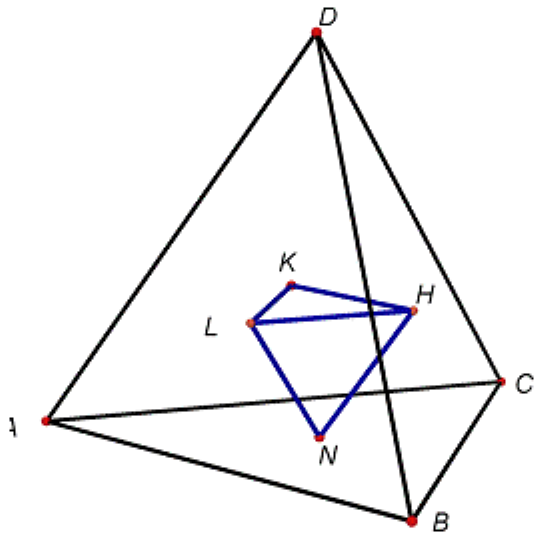
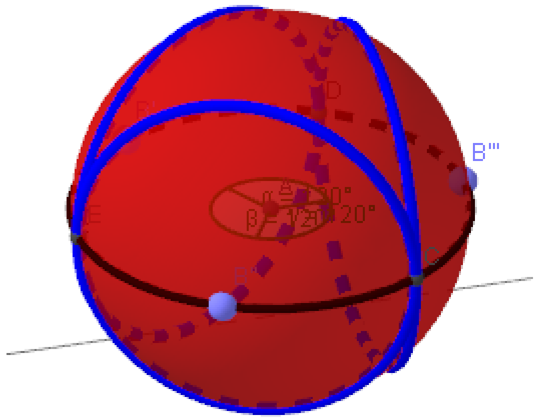


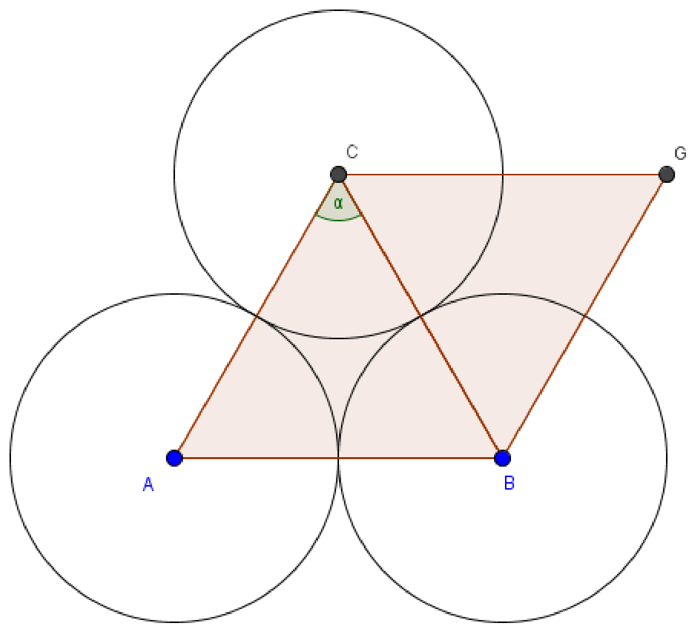
CONGIUNGENDO CON DEI SEGMENTI I CENTRI DELLE TRE CIRCONFERENZE OTTENIAMO,

A DIFFERENZA DEI CASI PRECEDENTI, UN TRIANGOLO EQUILATERO

E SE INVECE CONSIDERIAMO I PIANI TANGENTI OTTENIAMO 3 DIEDRI.

NUMERO DI CIRCONFERENZE TANGENTI ALLA CIRCONFERENZA INIZIALE	NUMERO TOTALE CIRCONFERENZE CHE RICOPRONO A SFERA	I CENTRI DELLE CORCONFERENZE SONO VERTICI DI UN	I PIANI TANGENTI ALLA SFERA NEI VERTICI DELLE CIRCONFERENZE FORMANO	
5	12	ICOSAEDRO	DODECAEDRO	
4	6	OTTAEDRO INSCRITTO ALLA SFERA	UN CUBO CIRCOSCRITTO	

3	**4**	**TETRAEDRO INSCRITTO**	**TETRAEDRO CIRCOSCRITTO**	
2	**3**	**TRIANGOLO EQUILATERO**	**TRE DIEDRI**	



IN ALTRO MODO

$$60° < \alpha \leq 180° \qquad n \cdot \alpha = 360°$$

$$60° < \frac{360°}{n} \leq 180° \Rightarrow n = 2, 3, 4, 5$$

$n = 2$ ⇒ 2 TRIANGOLI EQUILATERI CON ANGOLI DI 180°, 3 CIRCONFERENZE CHE RICOPRONO LA SFERA (CENTRI VERTICI DI TR. EQ.)

$n = 3$ ⇒ 3 TRIANGOLI EQUILATERI CON ANGOLI DI 120°, 4 CIRCONFERENZE CHE RICOPRONO LA SFERA (TETRAEDRO INSCRITTO)

$n = 4$ ⇒ 4 TRIANGOLI EQUILATERI CON ANGOLI DI 90°, 6 CIRCONFERENZE CHE RICOPRONO LA SFERA (OTTAEDRO INSCRITTO)

$n = 5$ ⇒ 5 TRIANGOLI EQUILATERI CON ANGOLI DI 72°, 12 CIRCONFERENZE CHE RICOPRONO LA SFERA (ICOSAEDRO INSCRITTO)