LICEO MATEMATICO

Un'esperienza

Simona Pieri, Liceo Scientifico Assisi

ANNO SCOLASTICO 2019/2020

- La sezione D del nostro liceo, grazie ad un protocollo di intesa con il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Perugia, diventa liceo Matematico.
- L'intento è quello di presentare la matematica come strumento per osservare il mondo, come stimolo della curiosità cognitiva e della voglia di sapere e scoprire.
- La matematica che nasce dalla necessità di dare risposte certe a domande che per qualche motivo ci siamo posti è quella più apprezzata dagli studenti.

L'IMPORTANZA DEL LABORATORIO E DEL TEMPO

- «Ma perché non vogliamo dare alla gente la possibilità di aspirare ad arrampicarsi sulle alture a ad immergersi in profondità, fino a dove sono capaci di arrivare?» (H.FREUDENTHAL)
- Quello che noi docenti dovremmo fare è stimolare i nostri allievi affinché siano incuriositi da un qualche problema al punto tale che sentano la necessità di doverlo risolvere ma per fare questo occorre TEMPO
- Il LICEO MATEMATICO dà agli allievi questa possibilità: reinventare i contenuti matematici

LA STORIA DELLA MATEMATICA IN CLASSE LABORATORI DI MATEMATICA E STORIA

- La storia della matematica può essere opportunamente ripercorsa in laboratori in cui esplorare itinerari ed intuizioni alla base delle scoperte, come strumento didattico per favorire apprendimento efficace, come prodotto a cui si perviene mediante un duplice approccio: operativo e strutturale

LABORATORI DI MATEMATICA E STORIA

- Uno dei limiti nell'apprendimento della matematica insegnata in classe sembra essere il suo presunto carattere di impersonalità ed atemporalità; allo studente solitamente vengono mostrati solo i risultati finali di lunghi processi a lui preclusi ed è quindi indotto ad una predisposizione negativa nei confronti della disciplina credendo ad una sua perfezione innata senza margine di errori.
- i tempi più "rilassati" della classe dei licei matematici ci permettono riflessioni, approfondimenti, digressioni…
- Anche le Indicazioni Nazionali suggeriscono l'utilizzo della Storia della matematica in classe, anche in modalità laboratoriale

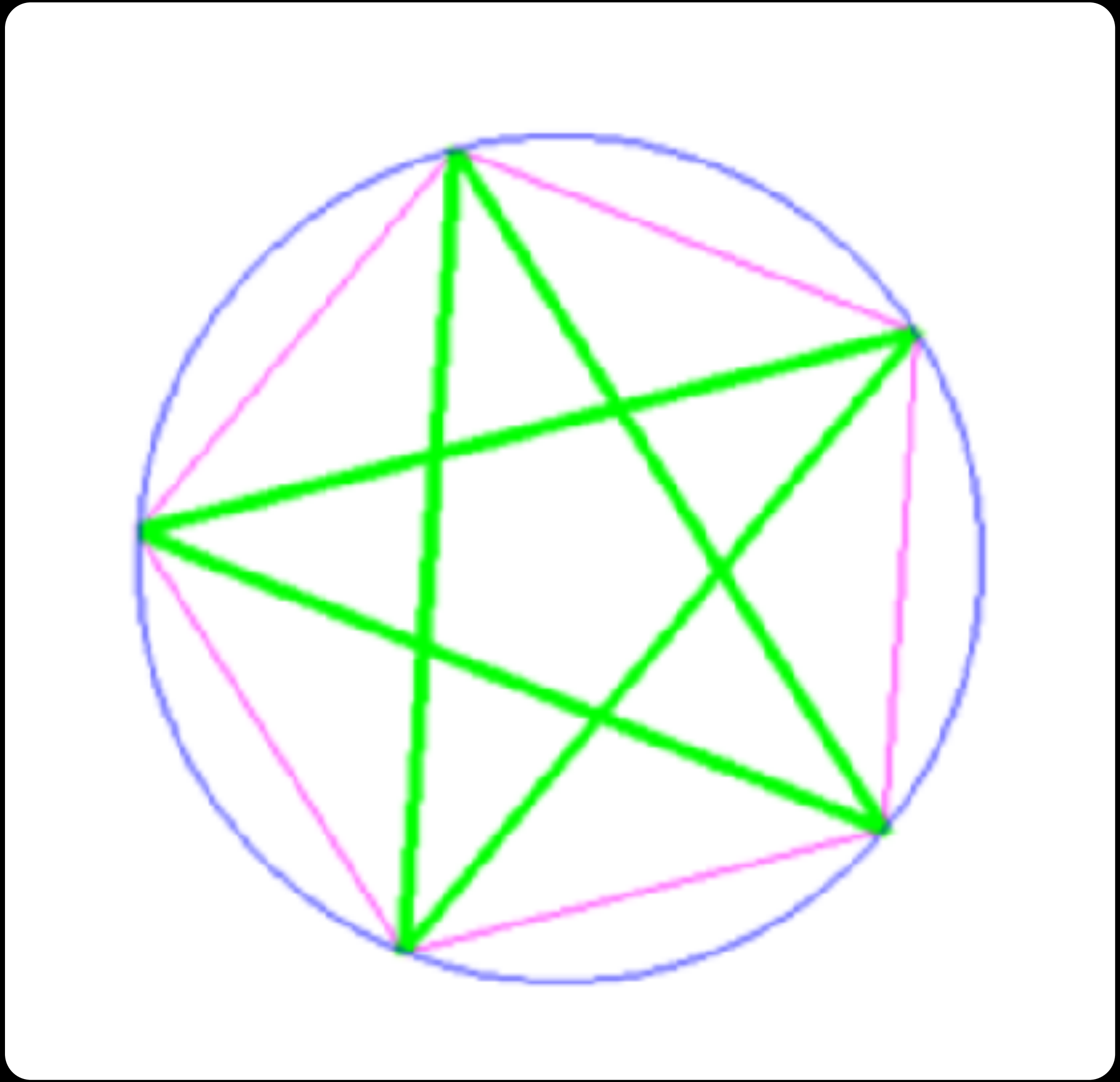
«Lo studente [...] saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico.» [Miur 2010, p.22]

LABORATORIO SUI POLIGONI STELLATI

Diversi sono i percorsi ad impronta laboratoriale costruiti tenendo presente queste premesse. Nell’ambito della geometria piana, lo scorso anno, uno dei laboratorio partito da ricerche storiche relative alla scoperta, ha avuto come oggetto i POLIGONI STELLATI

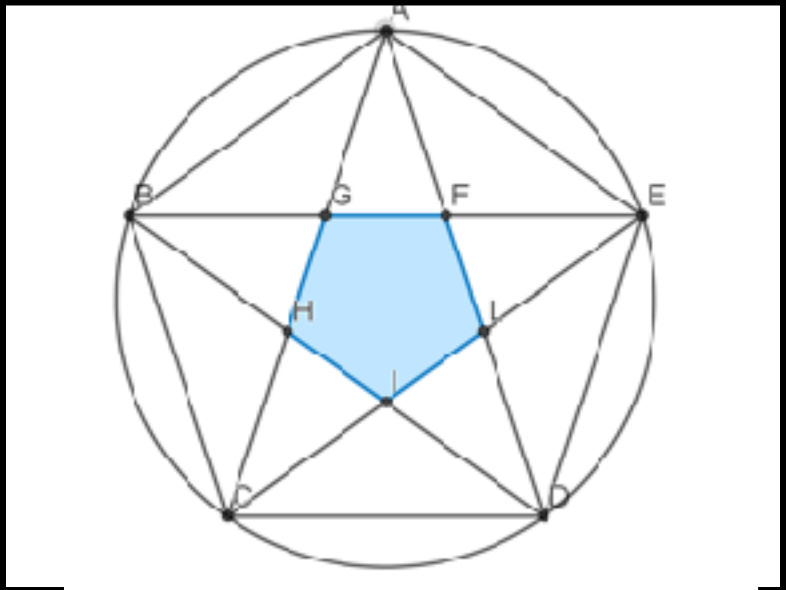
I POLIGONI STELLATI (laboratorio proposto alla classe 1D a.s. 2019/2020)

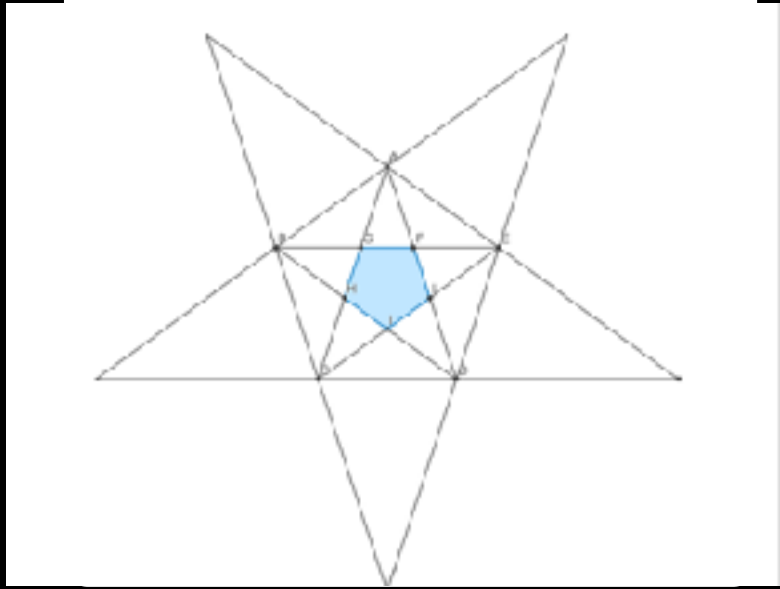
- Siamo partiti da un pentagono regolare e abbiamo tracciato le sue diagonali: abbiamo trovato una stella

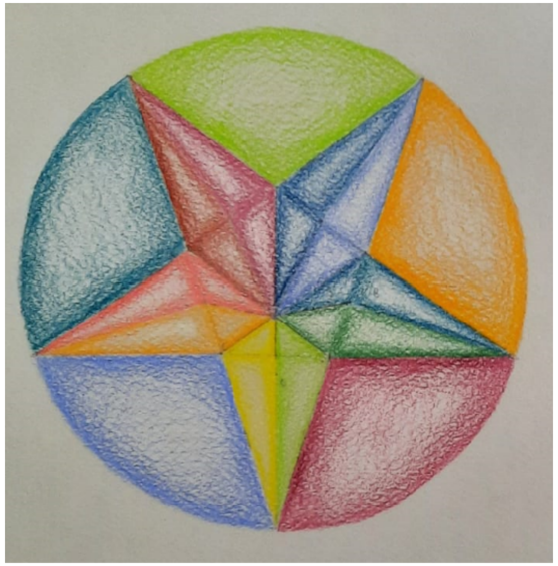
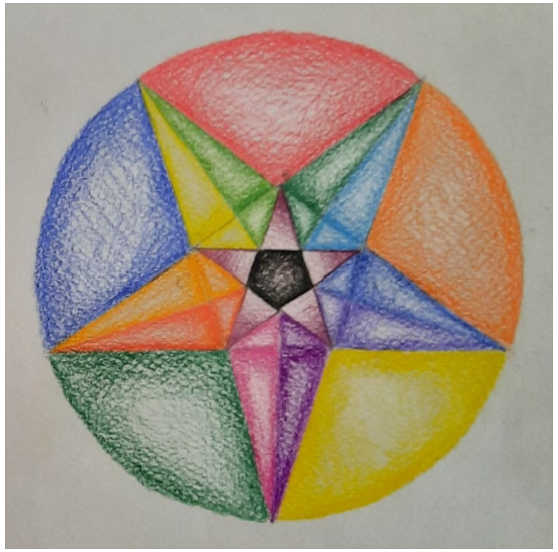
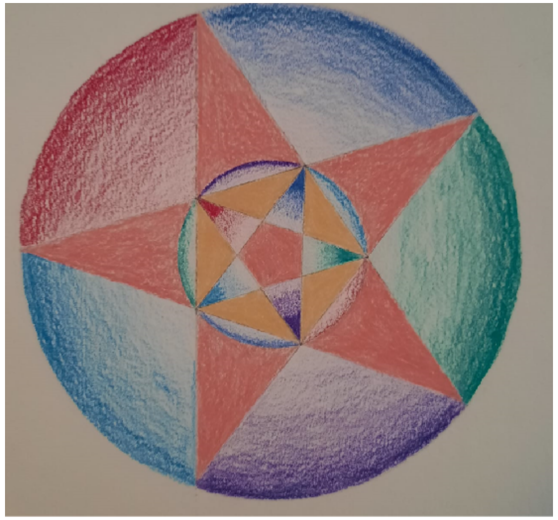


Unendo i punti di intersezione delle diagonali troviamo il pentagono regolare FGHIL

D’altra parte se prolunghiamo i lati di un pentagono regolare, otteniamo un poligono stellato





ELABORATI GRAFICI REALIZZATI DAGLI ALLIEVI

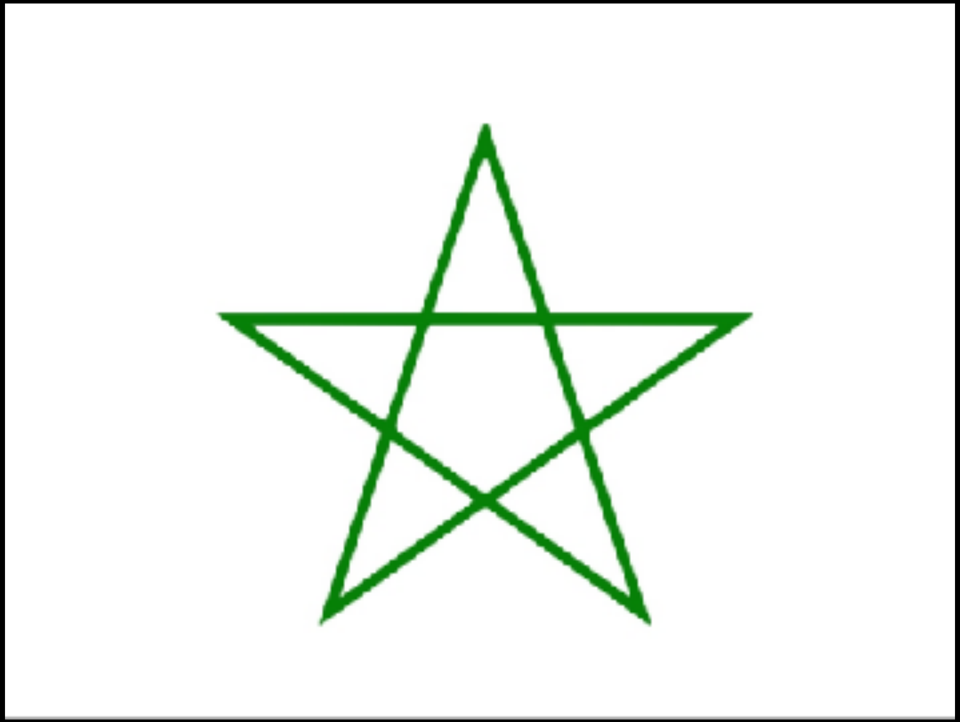
Grazie al prof. Della Bina Federico

MA QUESTA NUOVA FIGURA È UN POLIGONO?

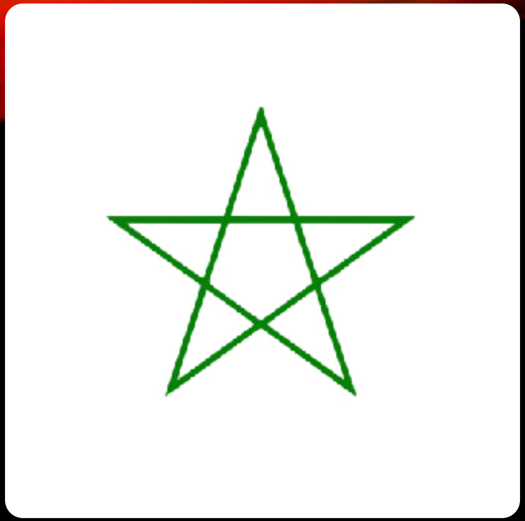
- Abbiamo ricontrollato la definizione di poligono, definizione che prevede che la spezzata che lo delimita sia «non intrecciata»
- Secondo questa definizione la stella non è un poligono
- E se togliessimo l'aggettivo «non intrecciata» ?

NUOVA DEFINIZIONE

Si dice poligono la parte di piano delimitata da una spezzata chiusa



PENTAGRAMMA E DECAGONO EQUILATERO CONCAVO A CONFRONTO



- I ragazzi sono stati invitati a considerare la somma degli angoli interni, la diagonali, l'inscrittibilità e la circoscrittibilità dell'uno e dell'altro…

E sono nate… risposte interessanti!

RIFLESSIONI E PROBLEMI

A fianco parte del test proposto

1. Osserva le due figure, sono dei poligoni?

Fig. 1 Fig. 2

Contrassegna solo un ovale.

- la prima sì, la seconda no
- la prima no, la seconda sì
- Sì, entrambe

2. Considera ora la figura 1. Quanti vertici e quanti angoli (interni) ha?

3. Considera ancora la figura 1. Riesci a calcolare la somma degli angoli interni? Spiega come

4. Considera ora la figura 2. Quanti vertici e quanti angoli (interni) ha?

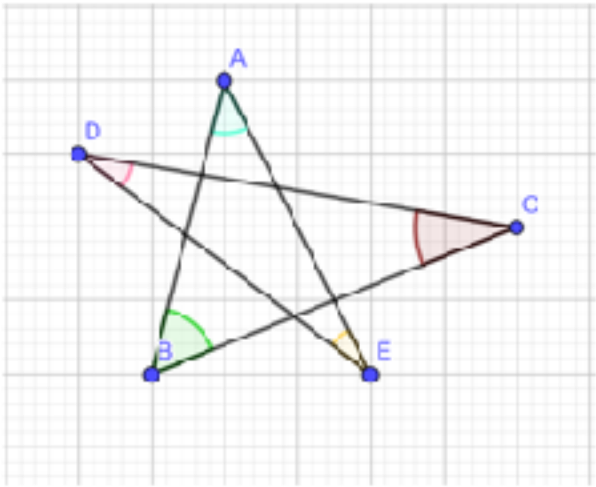
5. Considera ancora la figura 2. Riesci a calcolare la somma degli angoli interni? Spiega come

6. C'è una formula che ti permette di calcolare la somma degli angoli interni della prima? E della seconda? Spiega

SOMMA ANGOLI INTERNI DI UN POLIGONO STELLATO A 5 PUNTE

- Lavoro di un'allieva della 1D (a.s.2019/2020)

Per calcolare la somma degli angoli interni della stella ABCDE, si può calcolare la somma degli angoli interni ed esterni e sottrargli la somma degli angoli esterni.



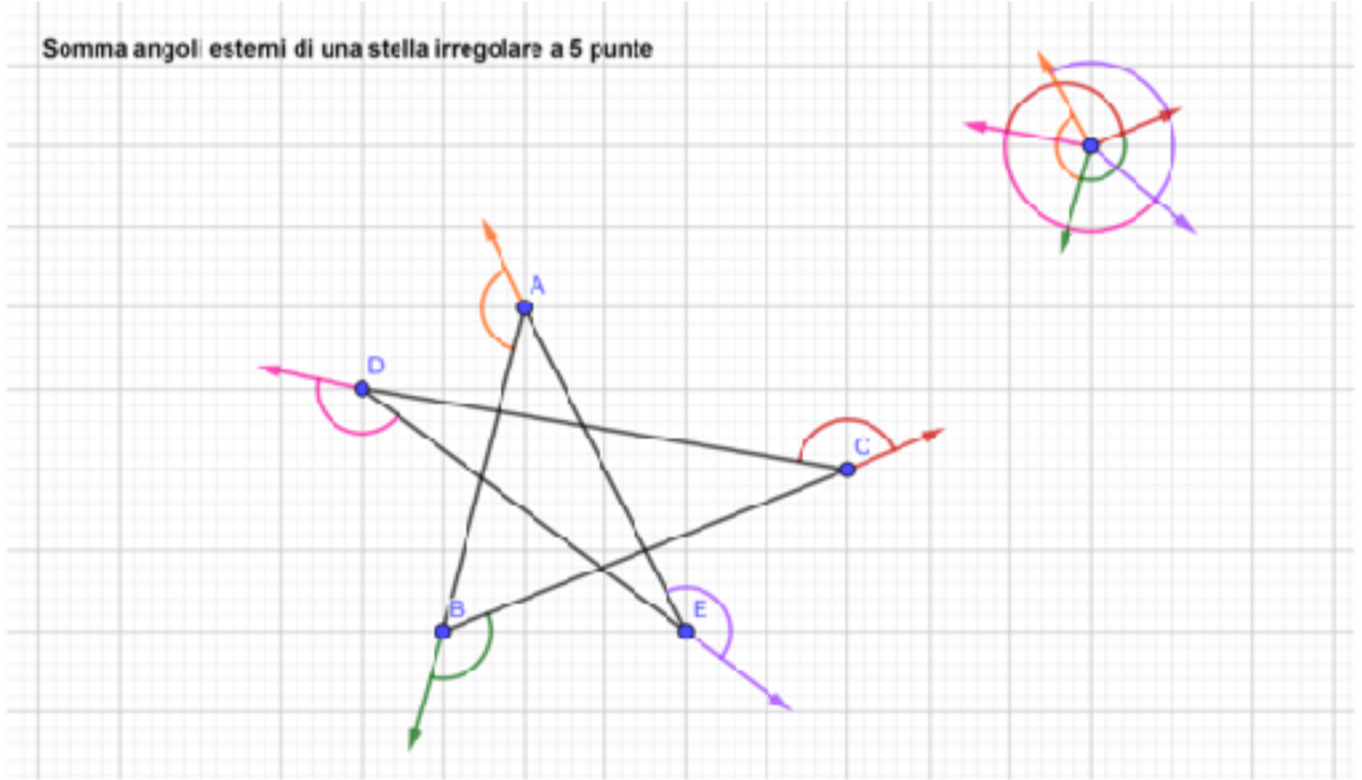
Per calcolare la somma degli angoli interni ed esterni del poligono bisogna considerare che ogni angolo esterno è il supplementare del corrispondente angolo interno.

Quindi la somma degli angoli interni ed esterni di un poligono è 180° * n

Considerando il poligono ABCDE la somma degli angoli interni ed esterni è 900°.

SOMMA ANGOLI INTERNI DI UN POLIGONO STELLATO A 5 PUNTE

- Metodo tratto da un video del prof. Emanuele Callegari (Università di Roma "Tor Vergata") https://youtu.be/q6GCn8wz-Fg



Per calcolare la somma degli angoli esterni dobbiamo prolungare i lati e fare la costruzione in alto a destra, che è composta dai vettori paralleli (ai lati) e concordi con i relativi prolungamenti.

Quindi si riportano sullo schema gli angoli esterni del poligono e si nota che sommandoli tutti si ottengono due "giri", che corrispondono a 2 angoli giro.

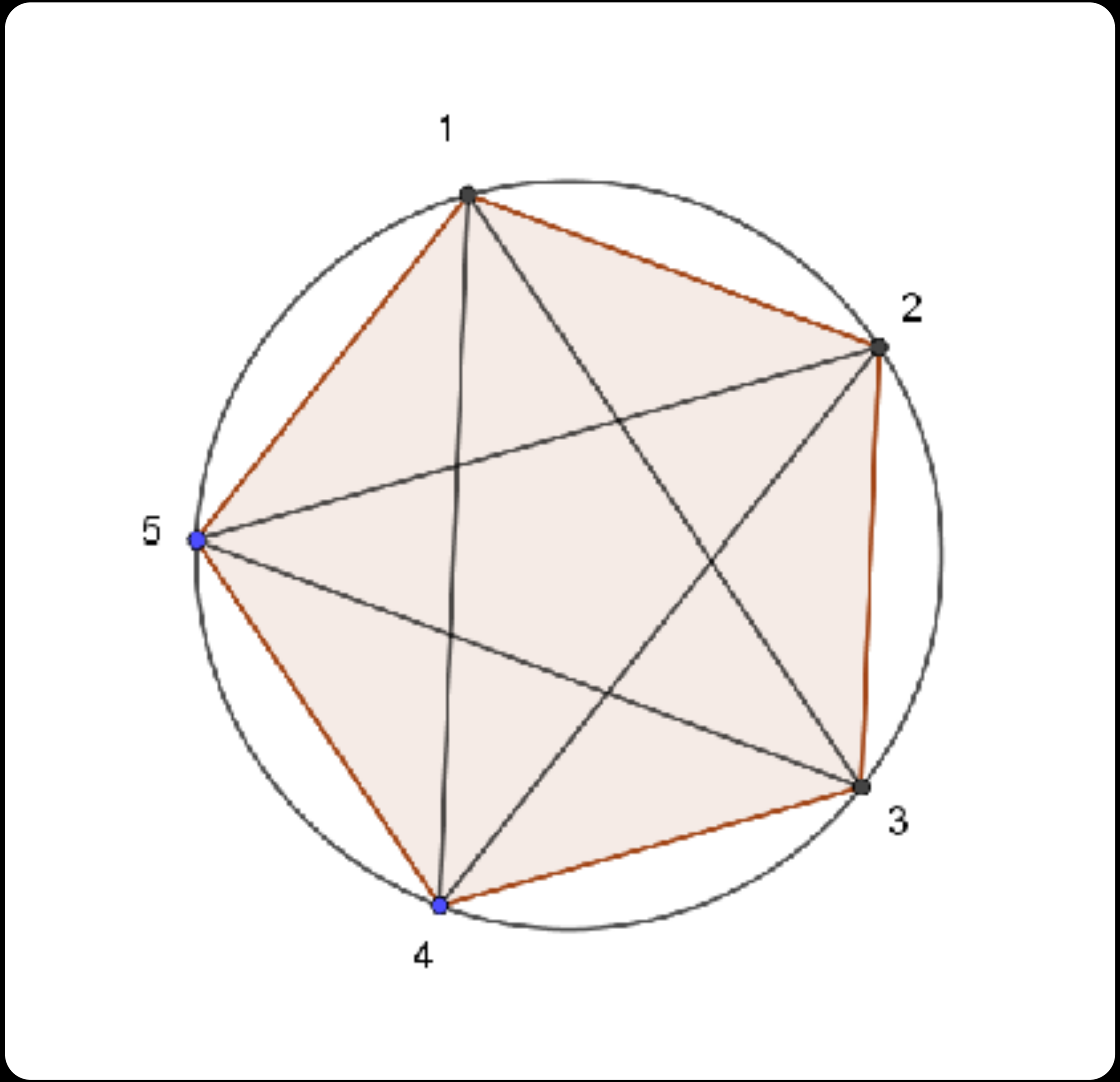
Somma angoli esterni del poligono: 2 * 360° = 720°

Ma allora la somma degli angoli interni sarà data dalla differenza tra la somma di entrambi e quella degli angoli esterni.

Somma angoli interni: 900° - 720° = 180°

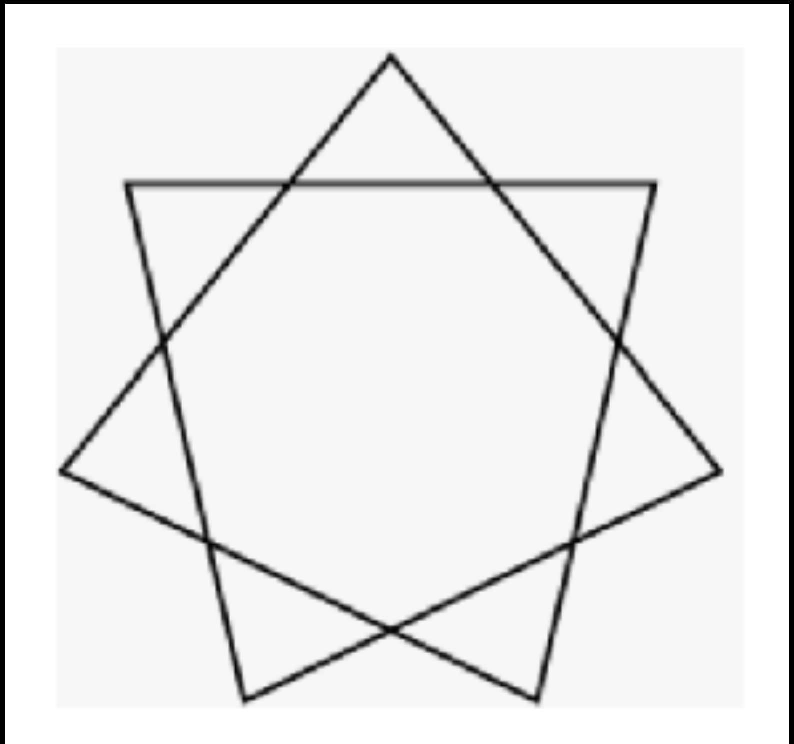
RELAZIONE TRA IL NUMERO n DI PUNTI DISTINTI SU UNA CIRCONFERENZA E IL NUMERO DI STELLE SEMPLICI COSTRUIBILI

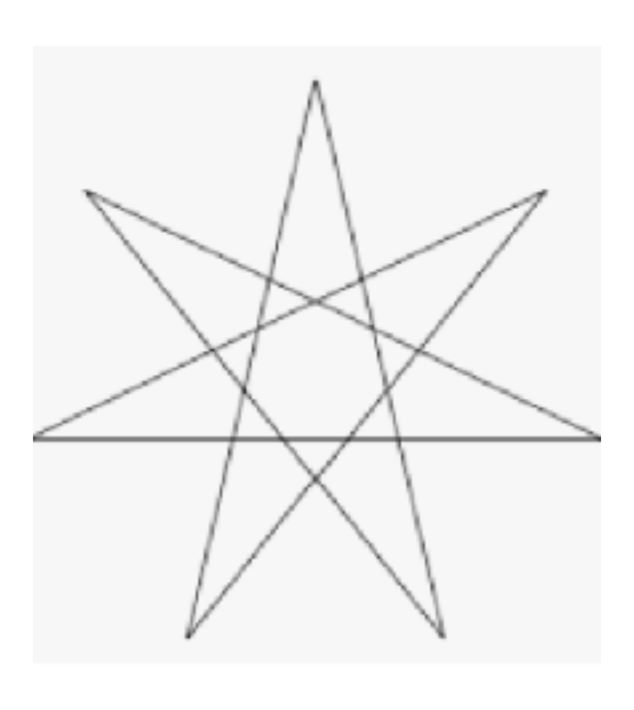
- Se n=5, possiamo costruire una stella senza «staccare la penna dal foglio» considerando la sequenza 1-3-5-2-4-1



RELAZIONE TRA IL NUMERO N DI PUNTI DISTINTI SU UNA CIRCONFERENZA E IL NUMERO DI STELLE SEMPLICI COSTRUIBILI

Se n=6… possiamo ancora farlo?



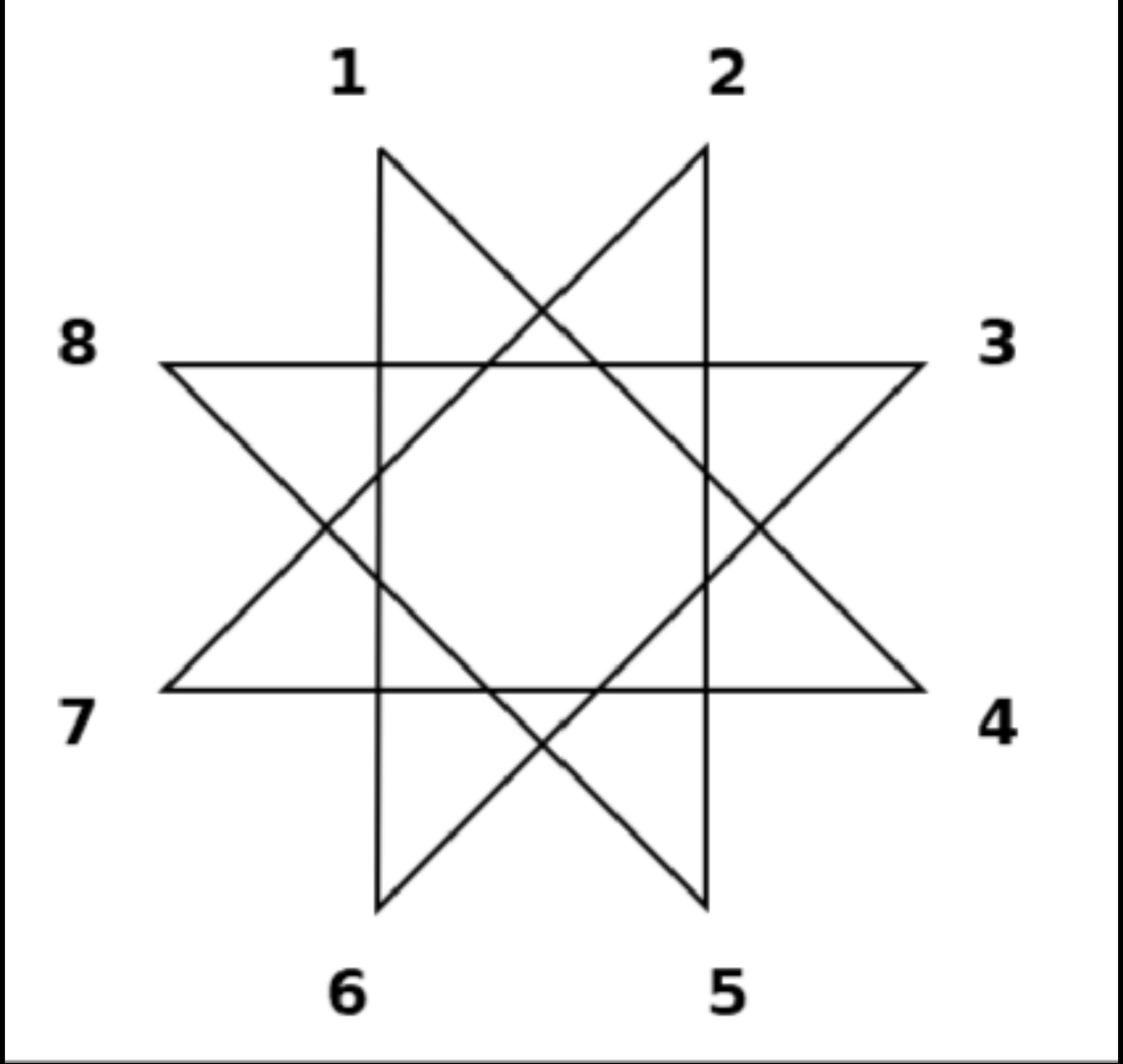


Se n=7, le possibili stelle sono 2

IDEA:
possiamo costruire stelle senza staccare la penna dal foglio se n è dispari…
Anzi no, se è primo…

MA POI PER n=8…

Basta considerare la sequenza 1-4-7-2-5-8-3-6-1 e otteniamo una stella

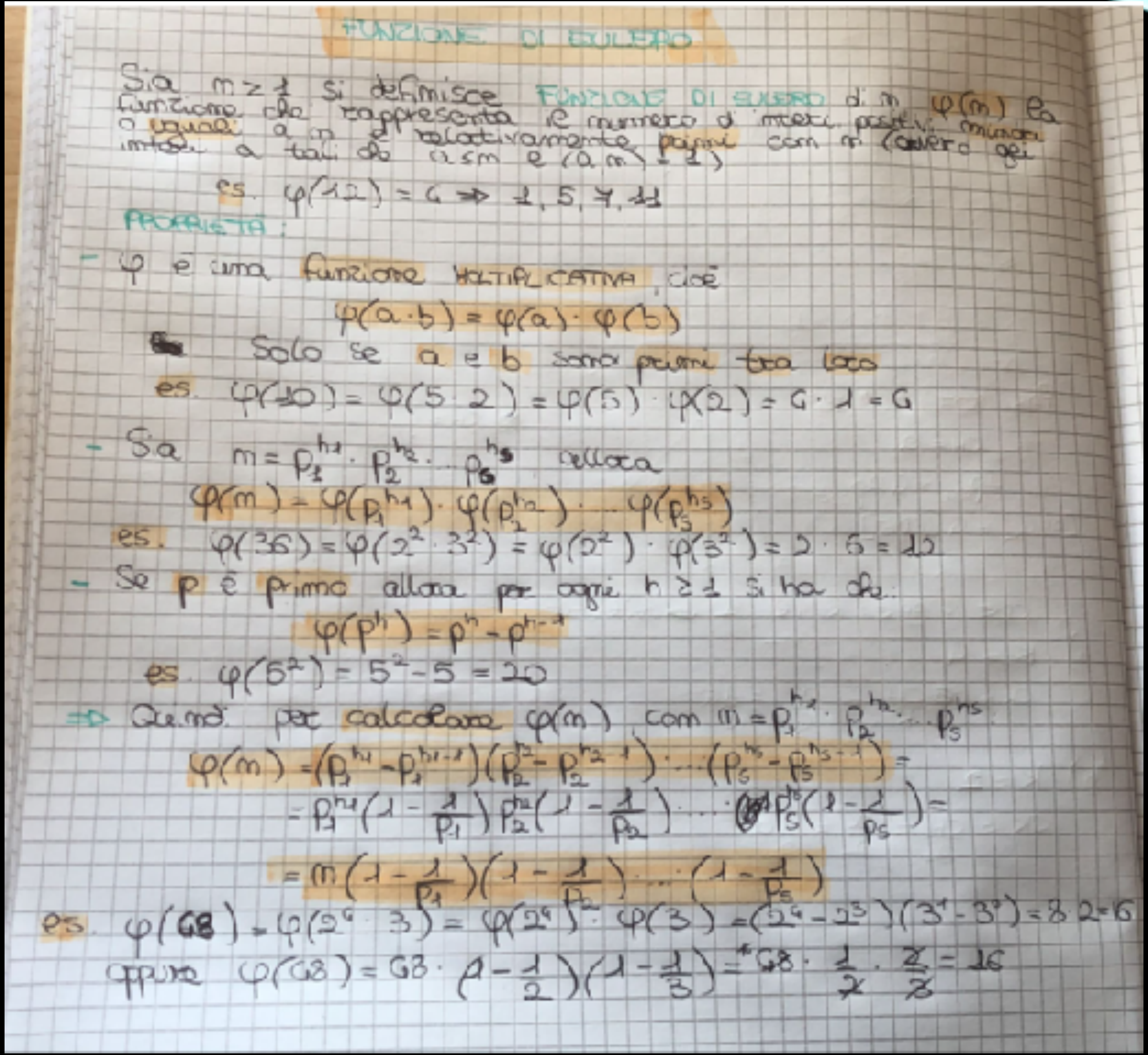


ALTRA IDEA!

Poiché saltando da un vertice all'altro a distanza *k* bisogna tornare al punto di partenza, *k* ed *n* dovranno essere coprimi… e la funzione che rappresenta il numero di interi positivi minori o uguali a *n* e relativamente primi con *n* si chiama *FUNZIONE DI EULERO… magari un collegamento c'è!*

LA FUNZIONE DI EULERO

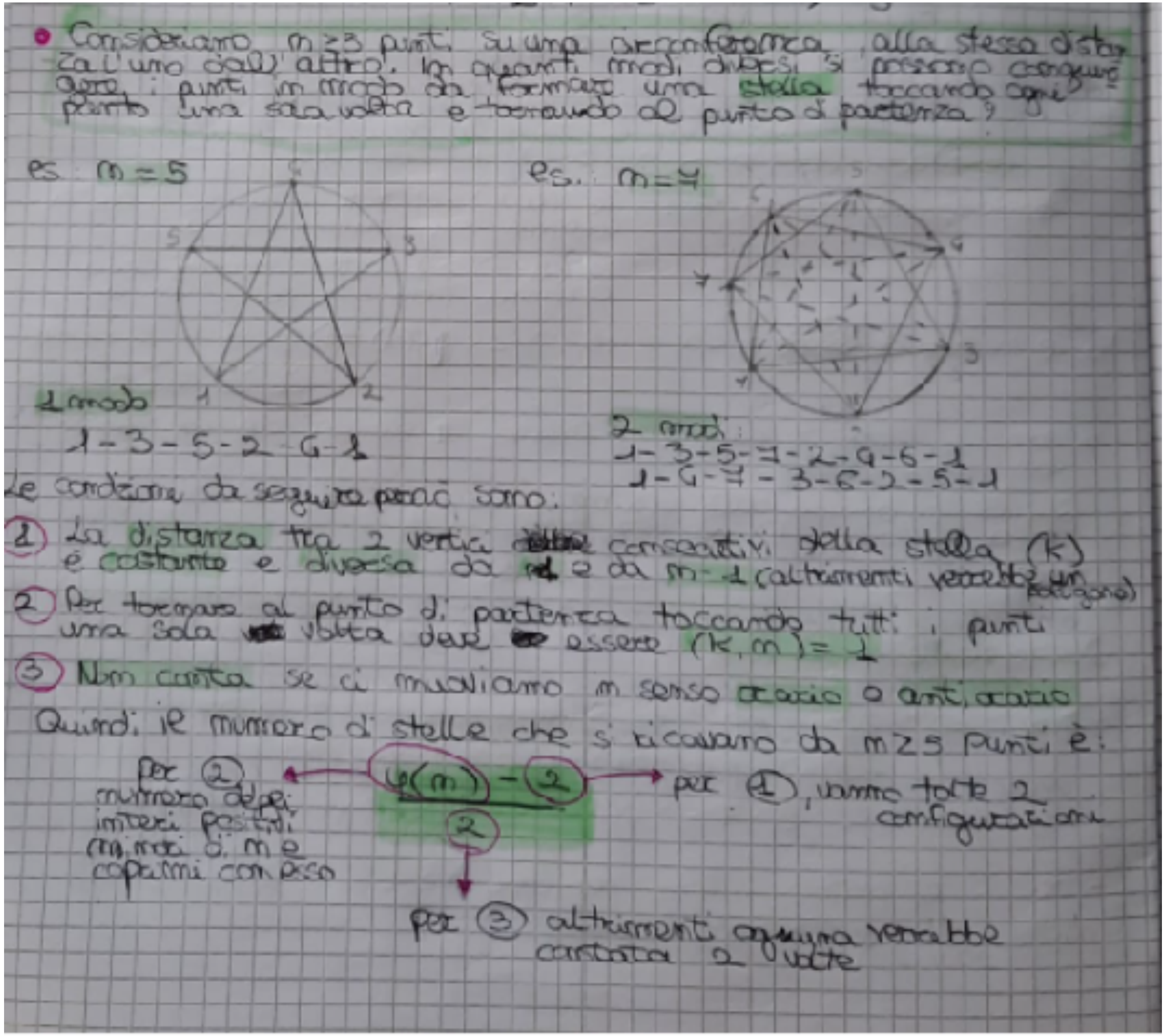
- Lavoro di un'allieva della 1D (a.s.2019/2020)



RELAZIONE TRA IL NUMERO *n* DI PUNTI DISTINTI SU UNA CIRCONFERENZA E IL NUMERO DI STELLE SEMPLICI COSTRUIBILI

Lavoro di un'allieva della 1D (a.s.2019/2020)

(tratto da Aritmetica modulare di Salvatore Damantino, Emanuele Campeotto, Collana U Math)



Consideriamo $n \geq 3$ punti su una circonferenza, alla stessa distanza l'uno dall'altro. In quanti modi diversi si possono congiungere i punti in modo da formare una stella toccando ogni punto una sola volta e tornando al punto di partenza?

es. $n = 5$

1 modo
1-3-5-2-4-1

es. $n = 7$

2 modi
1-3-5-7-2-4-6-1
1-4-7-3-6-2-5-1

Le condizioni da seguire perciò sono:

1) La distanza tra 2 vertici consecutivi della stella (k) è costante e diversa da 1 e da $n-1$ (altrimenti verrebbe un poligono)
2) Per tornare al punto di partenza toccando tutti i punti una sola volta deve essere $(k, n) = 1$
3) Non conta se ci muoviamo in senso orario o antiorario

Quindi il numero di stelle che si ricavano da $n \geq 5$ punti è:

$$\frac{\varphi(n) - 2}{2}$$

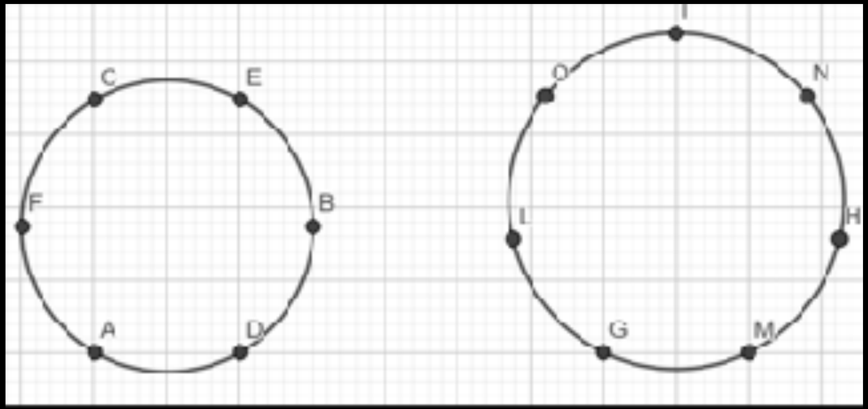
per 2 numero degli interi positivi minori di n e coprimi con esso

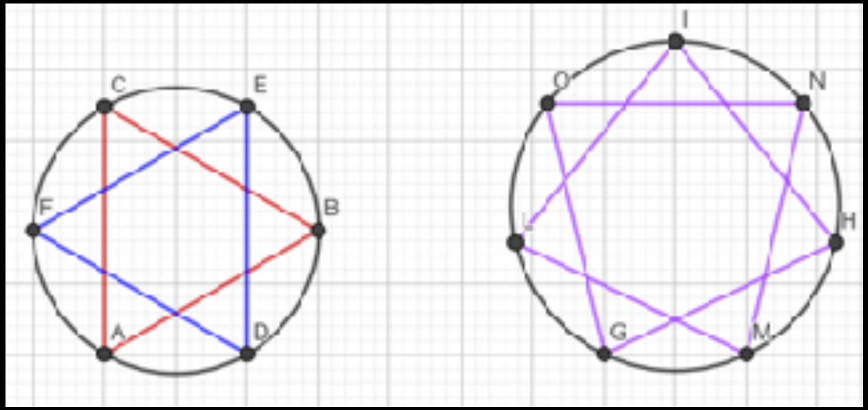
per 1, vanno tolte 2 configurazioni

per 3 altrimenti ognuna verrebbe contata 2 volte

POLIGONI STELLATI SEMPLICI E COMPLESSI
(TRATTO DAL PPT DI UN'ALLIEVA DELLA 1D)

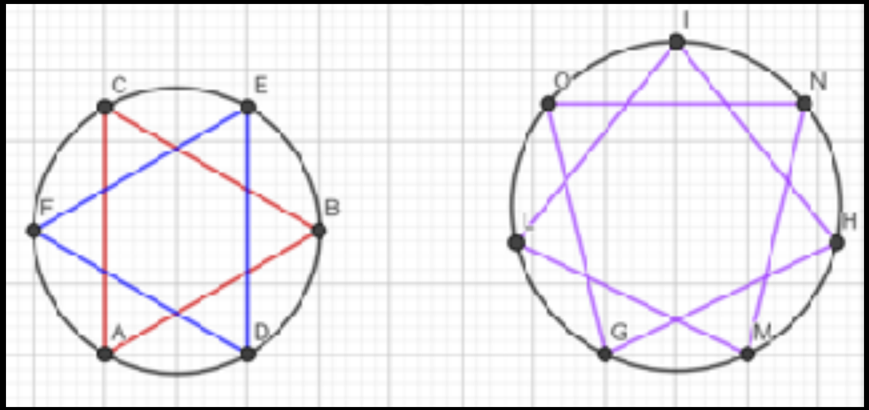
- Consideriamo una circonferenza, e n punti equidistanti tra loro, appartenenti ad essa. Ad esempio consideriamo le due raffigurate con 6 e 7 punti equidistanti.
- Immaginiamo di dover congiungere tutti i punti in modo da formare una stella semplice rispettivamente a 6 e 7 punte.
- In quanti modi è possibile farlo?

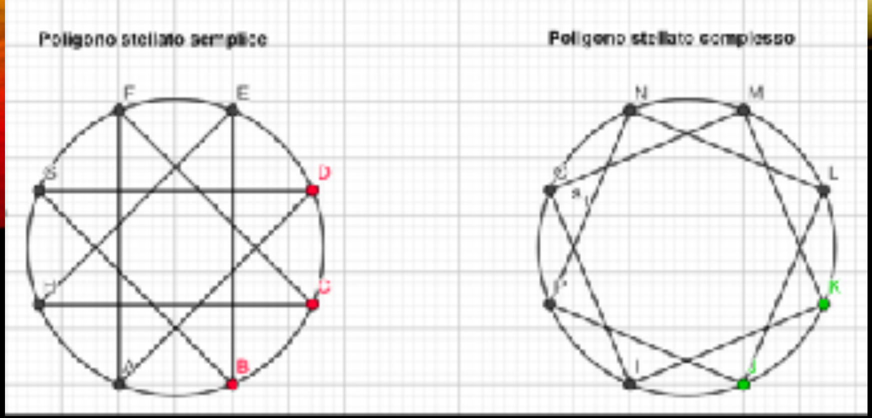


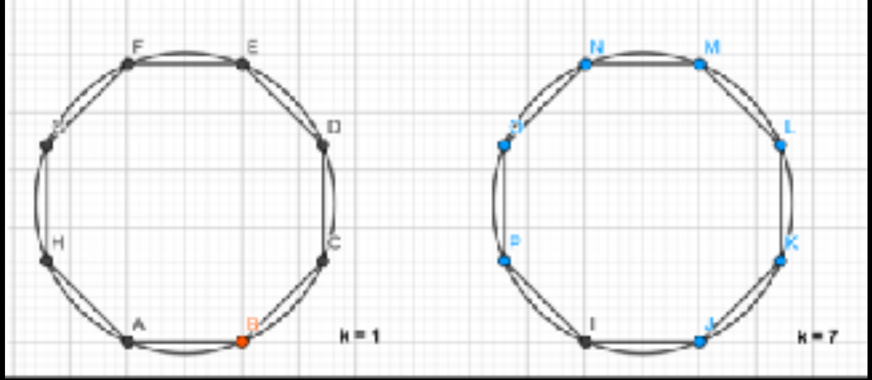


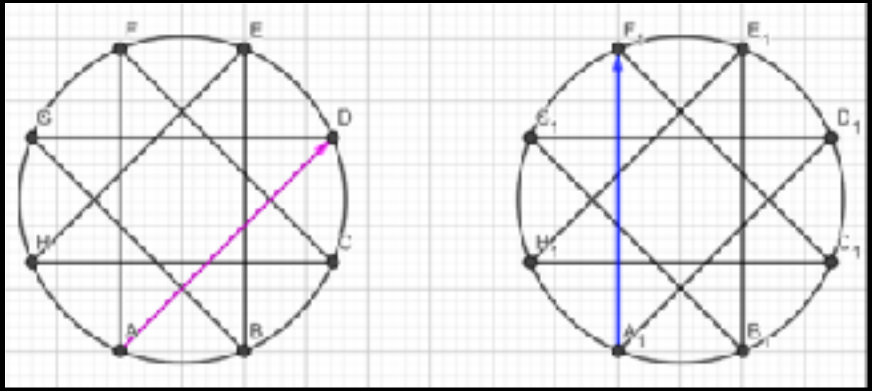
POLIGONI STELLATI SEMPLICI E COMPLESSI (TRATTO DAL PPT DI UN'ALLIEVA DELLA 1D)

- Nel primo esempio, considerati i 6 punti, non è stato possibile formare una stella semplice (la spezzata è stata interrotta e si sono formati due triangoli sovrapposti).
- Nel secondo esempio, è stato possibile creare una stella semplice a 7 punte, toccando ogni punto una sola volta e tornando a quello di partenza.
- Possiamo vedere che non è sempre possibile creare una stella semplice dati i punti di essa.
- <u>Perciò quali sono le condizioni da seguire ?</u>









POLIGONI STELLATI SEMPLICI E COMPLESSI
(TRATTO DAL PPT DI UN'ALLIEVA DELLA 1D)

1. Per tornare al punto di partenza, toccando tutti i punti una sola volta è necessario la distanza tra i vertici (k, che è costante) non abbia divisori in comune con il numero di vertici (n). Quindi possiamo scrivere: $(k, n) = 1$
2. Il numero di vertici saltati non può essere ne 1 ne n-1, altrimenti si formerebbe un poligono regolare convesso. Ovvero: $k \neq 1$ e $k \neq n-1$
3. Non conta se si procede in senso orario o antiorario.

CONCLUDIAMO CON LA FORMULA CHE CI PERMETTE DI CALCOLARE A PRIORI IL NUMERO DI POLIGONI STELLATI SEMPLICI CHE SI POSSONO COSTRUIRE A PARTIRE DA n PUNTI

(TRATTO DAL PPT DI UN’ALLIEVA DELLA 1D)

- $\varphi(n)$ rappresenta la funzione di Eulero, che associa a ogni n i numeri minori o uguali ad esso e primi con n:

  , con A =

- Si sottrae 2, poiché per e , si ottiene un poligono regolare convesso.
- Si divide per 2, altrimenti ogni configurazione verrebbe contata 2 volte (sia quando ci si muove in senso orario che quando ci si muove in senso antiorario)

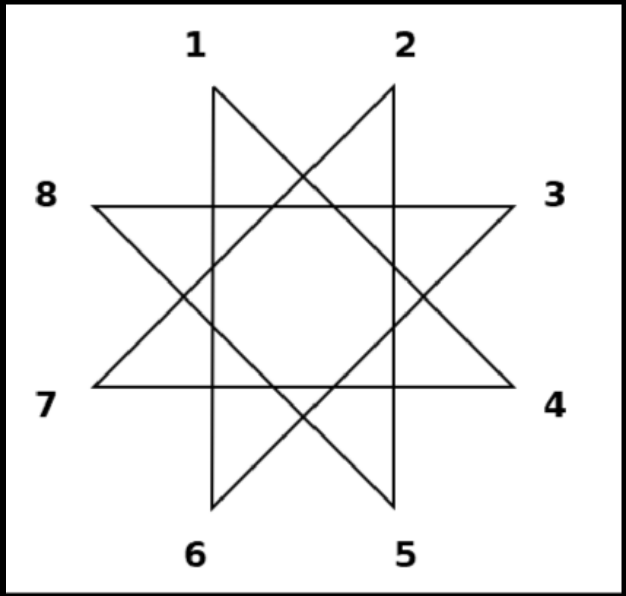
$$\frac{(\varphi(n)-2)}{2}$$

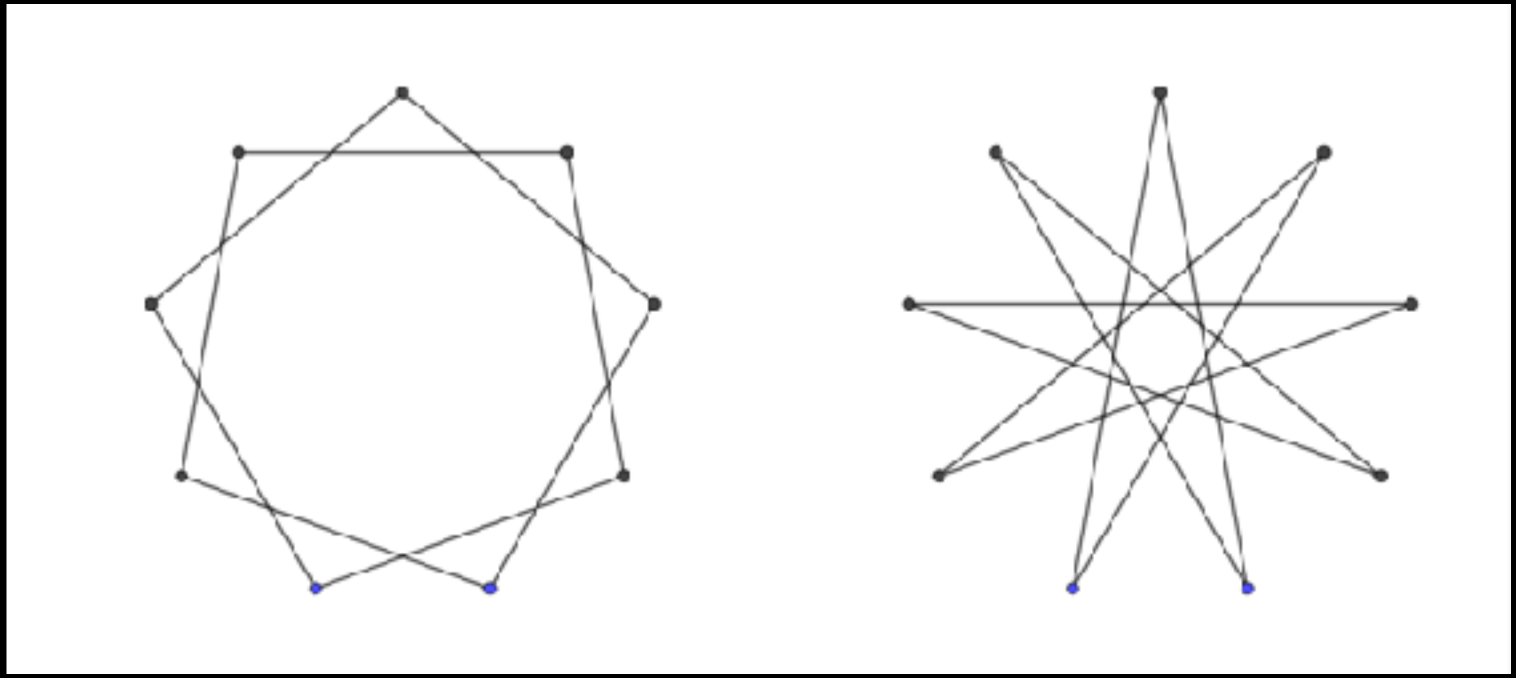
IL NUMERO DI STELLE DISTINTE A PUNTE È DUNQUE DATO DA

Esistono quindi, ad esempio

- 1 stella a 8 punte poiché =1
- 2 stelle a 9 punte poiché =2

mentre non è possibile formare stelle a 6 punte (non senza «staccare la penna dal foglio» almeno)





ALLA RICERCA DI STELLE NELLE OPERE D'ARTE

Assisi, Basilica di San Francesco

CONCLUSIONI

- Conoscenze e abilità matematiche, se acquisite con attività di tipo laboratoriale e dunque personale, si dimenticano meno facilmente, anzi forse non si dimenticano affatto e vengono indubbiamente utilizzate con maggiore facilità di quelle imposte da altri.

Emma Castelnuovo:

- «.... Il punto di partenza dell'apprendimento deve essere il problema, non la teoria bella e fatta, e la prima soluzione deve essere escogitata costruttivamente … »

RINGRAZIAMENTI

- Al prof. Antonio Fanelli (Liceo Scientifico “Plinio Seniore” di Roma) che è stato il primo a parlarmi del Liceo Matematico durante gli «Incontri Olimpici» (ottobre 2018) e che mi ha messo in contatto con il prof. Claudio Bernardi
- Al prof. Claudio Bernardi (Università "La Sapienza" di Roma) che, non appena contattato, mi ha dato le indicazioni operative per attivare il Liceo Matematico presso il mio Istituto
- Al prof. Gianluca Vinti (direttore, nel 2019, del dipartimento di Matematica ed Informatica dell’Università di Perugia) per aver, in tempi rapidissimi, stilato e firmato il Protocollo di Intesa necessario all’attivazione del Liceo Matematico
- Alla prof.ssa Nicla Palladino (Università di Perugia) che si occupa dell’organizzazione dei corsi universitari relativi al progetto
- Al Rettore, Dirigente Scolastico, prof.ssa Annalisa Boni (Convitto Nazionale Assisi) che sostiene sempre le mie… iniziative

Bibliografia:

N. Palladino. From the fourteenth century to Cabrì: convuleted constructions of star polygons. “EP*Magazine* European Pupils Magazine - History Of Science And Technology”, n. 35, 2-2014, pp. 13-17.

N. Palladino. I poligoni stellati da Broscius a Cabrì: spunti didattici e costruzioni geometriche. PROGETTO ALICE 2014 – II, vol. XV, n° 44, pp. 313-326

A. Brigaglia, N. Palladino, M.A. Vaccaro. Historical notes on star geometries in mathematics, art and nature. In “Imagine Math 6 Between Culture and Mathematics” Editors: Emmer Michele, Abate Marco (Eds.), Springer International Publishing 2018. pp. 197-211

N. Palladino, G. Tini, M.A. Vaccaro. I poligoni stellati: origini storiche ed implicazioni didattiche. In “Matematica, Architettura, Fisica e Natura” a cura di F. Casolaro e S. Sessa, Aracne, Napoli 2019; pp. 239-248.