Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Oggi, l´Ateneo del domani

Liceo Matematico

Dalla geometria sferica ai limiti notevoli di tipo goniometrico

Liceo Scientifico Statale
Teresa Gullace

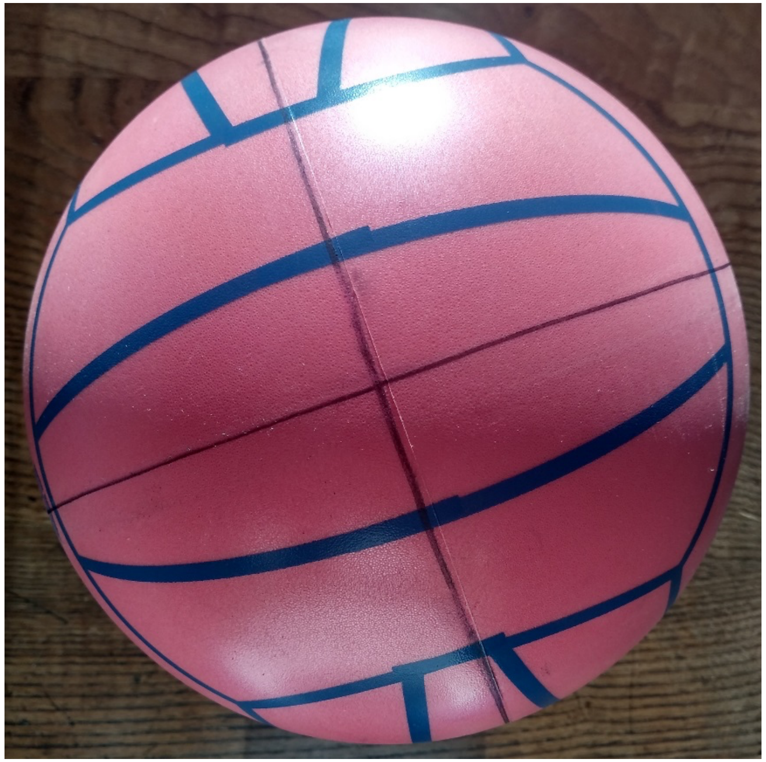
Georgia Conti
Insegnante di matematica e fisica
Daniele Scopetti
Insegnante di matematica e fisica
Stefano Volpe
Insegnante di matematica

Introduzione

http://crf.uniroma2.it/?p=7967

Il laboratorio di oggi prende spunto da una esperienza svolta alcuni anni fa con una classe seconda di liceo scientifico con la quale è stato realizzato un percorso sulle geometrie non euclidee con particolare riguardo alla geometria sferica (percorso che è stato presentato al *Primo Seminario Nazionale dei Licei Matematici* nel settembre 2017).

All'interno del percorso era stato osservato che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato sferico non è costante e può assumere tutti i valori reali compresi tra $\sqrt{2}$ e 2 (se consideriamo soltanto la semisfera, oppure tra $\sqrt{2}$ e $+\infty$ se consideriamo la sfera intera), segnando un'altra significativa differenza tra la geometria del piano e quella della sfera.



Due anni più tardi, quando gli studenti erano ormai al quarto anno, si è osservato come neanche il rapporto tra la circonferenza sferica e il suo diametro sferico fosse costante e come potesse assumere tutti i valori reali compresi tra 2 e π (se si considera soltanto la semisfera, oppure tra 0 e π se si considera la sfera intera).

Il lavoro svolto ha condotto gli studenti in modo "naturale" al limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (nel caso in cui gli angoli siano misurati in radianti).

Ciò ha permesso agli alunni di conoscere il limite notevole prima di incontrarlo nello studio dell'analisi e di poter arrivare a intrecciare rami diversi della disciplina.

La prima parte del laboratorio vuole riproporre l'attività svolta con gli studenti della quarta.

La seconda parte del laboratorio si interroga sulla possibilità di interpretare nella geometria della sfera anche il limite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$.

I due limiti saranno sufficienti per procedere alla dimostrazione delle derivate delle funzioni seno e coseno:

Derivata della funzione seno

La funzione **seno** $f(x) = \sin x$ è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la sua derivata è la funzione $f'(x) = \cos x$.

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$ Definizione di derivata

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$ Formula di addizione del seno

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} =$$ Raccogliendo parzialmente $\sin x$

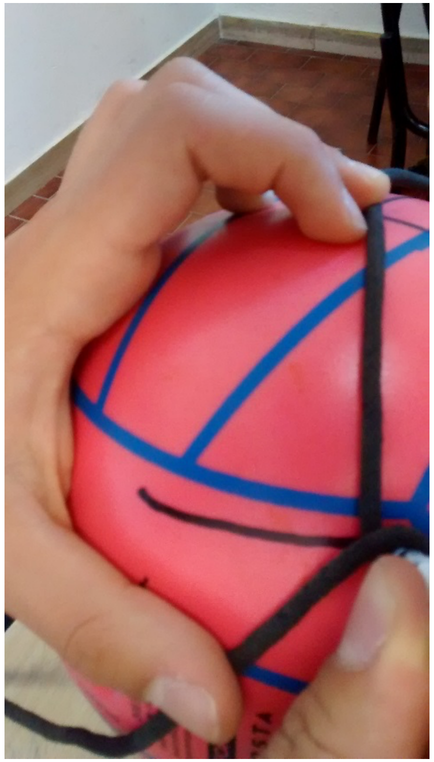
$$= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right) =$$ Ricorda i limiti notevoli del teorema 2.10

$$= \cos x$$

(v. Sasso, *La matematica a colori*, vol. 5, Petrini)

Primo parte del laboratorio

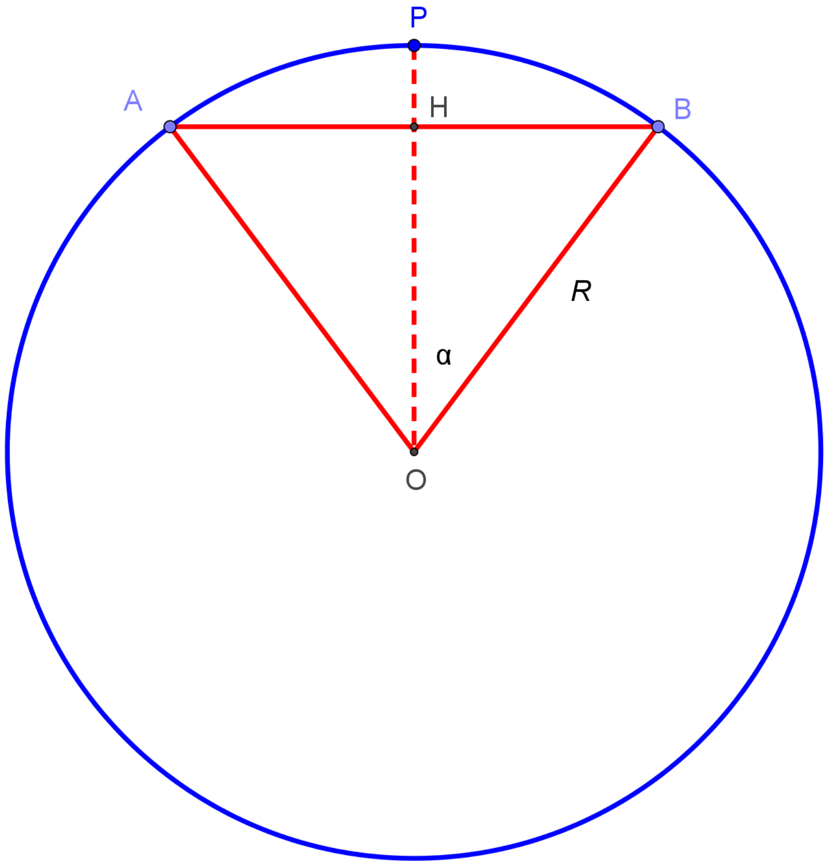
Nella geometria della sfera la definizione di circonferenza è la stessa di quella nel piano, cioè il luogo geometrico dei punti della superficie sferica equidistanti da un punto fisso che prende il nome di centro della circonferenza.



Detto "**raggio sferico**" il segmento sferico che unisce il centro della circonferenza con uno qualsiasi dei suoi punti, si chiede di compilare una prima scheda di lavoro:

Abbiamo tracciato la circonferenza (parallelo) avente centro nel punto P (Polo Nord) e raggio pari all'arco di circonferenza PB.

In figura è rappresentata l'intersezione della superficie sferica con un piano passante per P e per il centro della sfera.



Determina, giustificando le tue risposte:

1. il raggio "euclideo" del parallelo (BH)

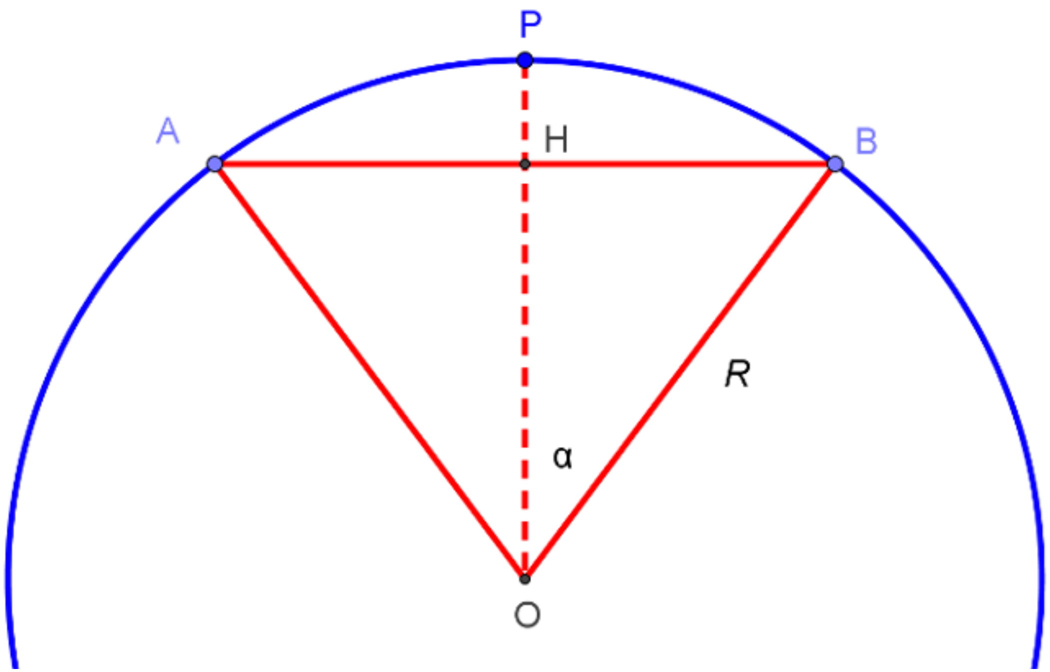
____

2. la lunghezza del parallelo

____

3. il diametro "sferico" del parallelo (arco AB)

____



Risposta attesa

Determina, giustificando le tue risposte:

1. il raggio euclideo del parallelo

Il raggio è $\overline{HB}$ ossia la proiezione del raggio sferico sul piano AB,

considerato il triangolo rettangolo HBO. $HB = \sin\alpha \cdot R$ (il raggio della circonferenza)

2. la lunghezza del parallelo

Usando il raggio euclideo, la circonferenza è ~~...~~ $2\pi R$.

$2\pi R \rightarrow 2\cdot(\sin\alpha R)\pi$

3. il diametro sferico del parallelo

$\widehat{AB}$ è il diametro sferico, cioè il doppio del raggio sferico $PB = R\cdot\alpha$ (rad)

quindi $\widehat{AB} = 2R\cdot\alpha$ rad

Seconda scheda di lavoro:

Compila la seguente tabella:

		Lunghezza della circonferenza	Lunghezza del diametro sferico	C/d	C/d
$\alpha°$	α (in radianti)	$C =$	$d =$	Valore esatto	Valore approssimato a meno di 10^{-4}
0°					
30°					
45°					
60°					
90°					

Qual è l'espressione analitica del rapporto C/d?

		Lunghezza della circonferenza	Lunghezza del diametro sferico	C/d	C/d
$\alpha°$	α (in radianti)	$C = 2\pi \sin\alpha\, R$	$d = 2\alpha R$	Valore esatto	Valore approssimato a meno di 10^{-4}
30°	$\frac{\pi}{6}$	$C = R\pi$	$d = 2\frac{\pi}{6}R$	3	3

		Lunghezza della circonferenza	Lunghezza del diametro sferico	C/d	C/d
$\alpha°$	α (in radianti)	$C = 2\pi \sin \alpha\, R$	$d = 2\alpha R$	Valore esatto	Valore approssimato a meno di 10^{-4}
0°	0	0	0	ind	ind
30°	$\frac{\pi}{6}$	$C = R\pi$	$d = 2\frac{\pi}{6}R$	3	3,0000
60°	$\frac{\pi}{3}$	$C = \sqrt{3}\, R\, \pi$	$d = 2\frac{\pi}{3}R$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	2,5981

Risposta attesa

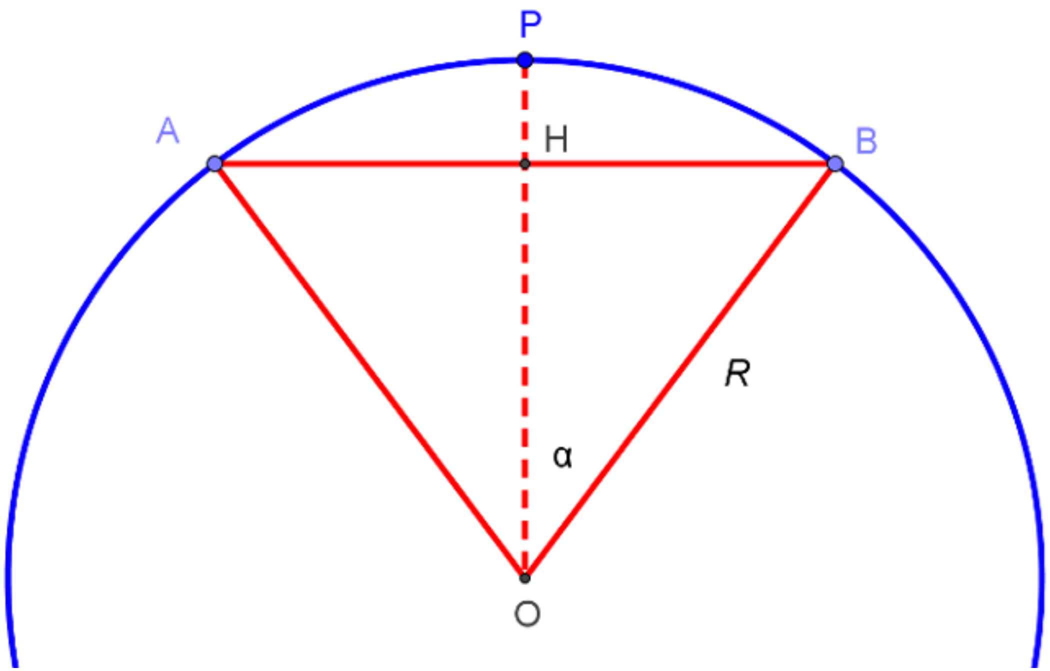
		Lunghezza della circonferenza	Lunghezza del diametro sferico	C/d	C/d
α°	α (in radianti)	$C = 2\pi \sin\alpha\, R$	$d = 2\alpha \cdot R$	Valore esatto	Valore approssimato a meno di 10^{-4}
0°	0	0	0	indeterminato	indeterminato
30°	$\frac{\pi}{6}$	$C = R\pi$	$d = 2\,\frac{\pi}{6}\,R = \frac{\pi}{3}R$	3	3,0000
45°	$\frac{\pi}{4}$	$C = \sqrt{2}R\pi$	$d = 2\cdot\frac{\pi}{4}R = \frac{\pi}{2}R$	$2\sqrt{2}$	2,8284
60°	$\frac{\pi}{3}$	$C = \sqrt{3}R\pi$	$d = \frac{2}{3}\pi R$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	2,5981
90°	$\frac{\pi}{2}$	$C = 2R\pi$	$d = \pi R$	2	2,0000
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$C = \sqrt{3}R\pi$	$d = \frac{4}{3}\pi R$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1,2990
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$C = \sqrt{2}\,R\pi$	$d = \frac{3}{2}\pi R$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	0,9428
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$C = R\pi$	$d = \frac{5}{3}\pi R$	$\frac{3}{5}$	0,6
180°	π	0	$d = 2\pi R$	0	0

Qual è l'espressione analitica del rapporto C/d? $\frac{C}{d} = \pi \cdot \frac{2R\sin\alpha}{2R\alpha} = \pi \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

Considerazioni al termine della prima attività

Quindi nella geometria della sfera il rapporto tra la circonferenza e il suo "diametro sferico" non è costante e varia con continuità tra 0 e π. Dal momento che tra questi valori sono compresi infiniti numeri razionali (ad esempio 3 per $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 2 per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3}{5}$ per $\alpha = \frac{5}{6}\pi$), si può concludere che nella geometria della sfera che tale rapporto non è sempre irrazionale.

L'espressione analitica del rapporto C/d è data da $\frac{2\pi \sin\alpha \cdot R}{2\alpha \cdot R}$ che, dividendo per R e isolando π, si può riscrivere $\pi \cdot \frac{2\sin\alpha}{2\alpha}$. Assegnato un angolo al centro di ampiezza 2α (espressa in radianti), il rapporto $\frac{2\sin\alpha}{2\alpha}$ può essere facilmente interpretato come il rapporto tra una corda e l'arco corrispondente. Si ha quindi che il rapporto tra una circonferenza sferica e il suo diametro "sferico" è pari al prodotto di π per il rapporto tra il suo diametro "euclideo" e il suo diametro "sferico".



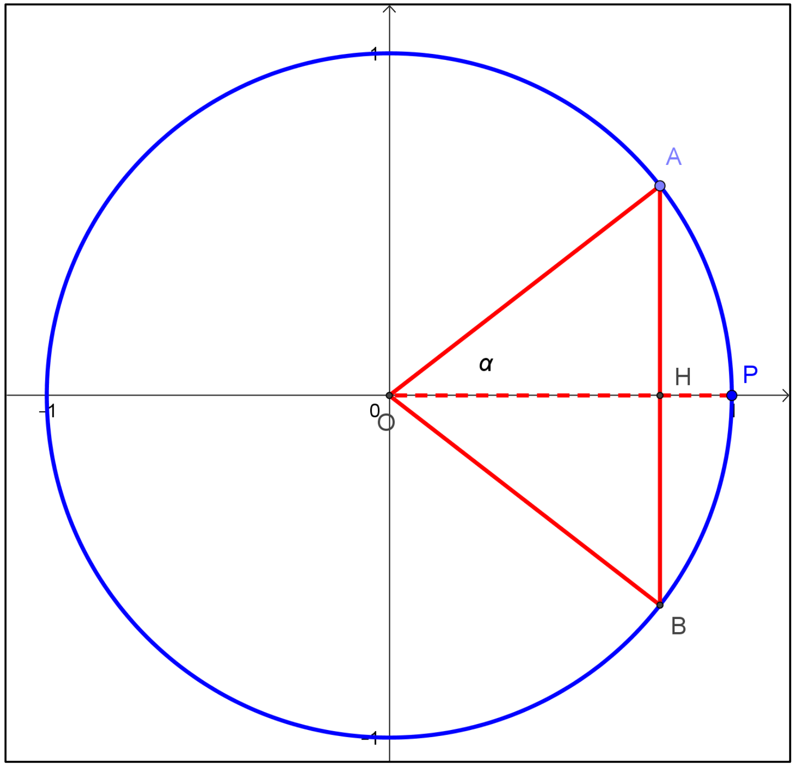
Il valore che tale funzione assume per x che tende a zero lo si può intuire immaginando che tanto più il raggio è piccolo quanto più la situazione è riconducibile al caso euclideo dove, com'è noto, il rapporto tra una circonferenza e il suo diametro è uguale a π…

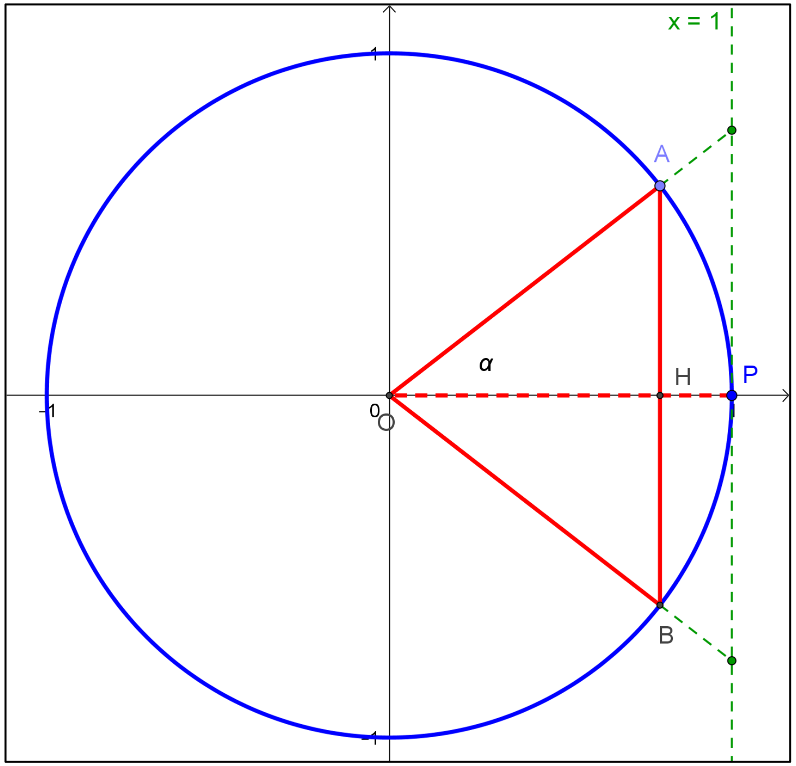
… e cioè che al tendere di x a zero il raggio euclideo e il raggio sferico di una circonferenza sferica tendono a coincidere.

Si può quindi dedurre che:

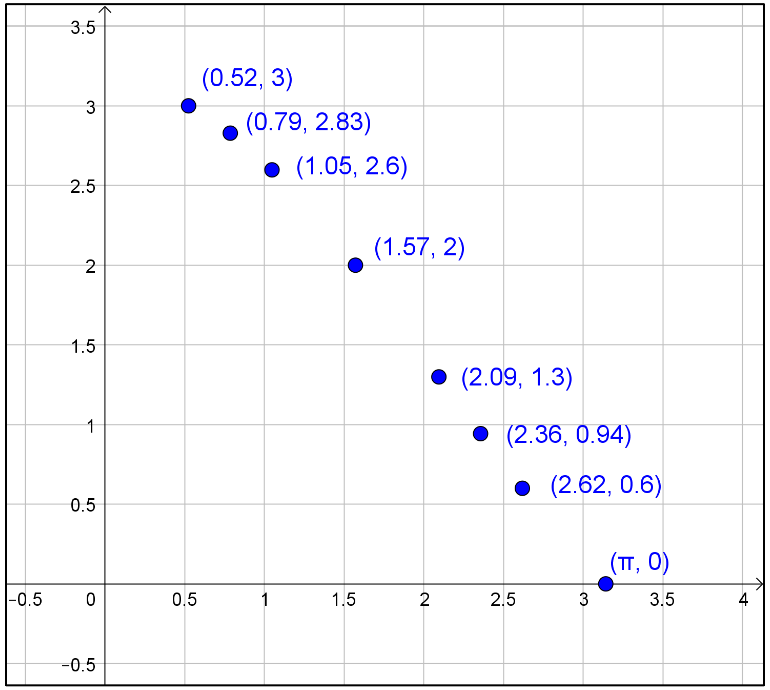
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si può inoltre osservare che la sezione osservata in figura si presta bene, se inserita in un piano cartesiano monometrico avente unità di misura R e ruotata di 90° intorno all'Origine in verso orario, a essere utilizzata per la successiva dimostrazione del limite notevole.



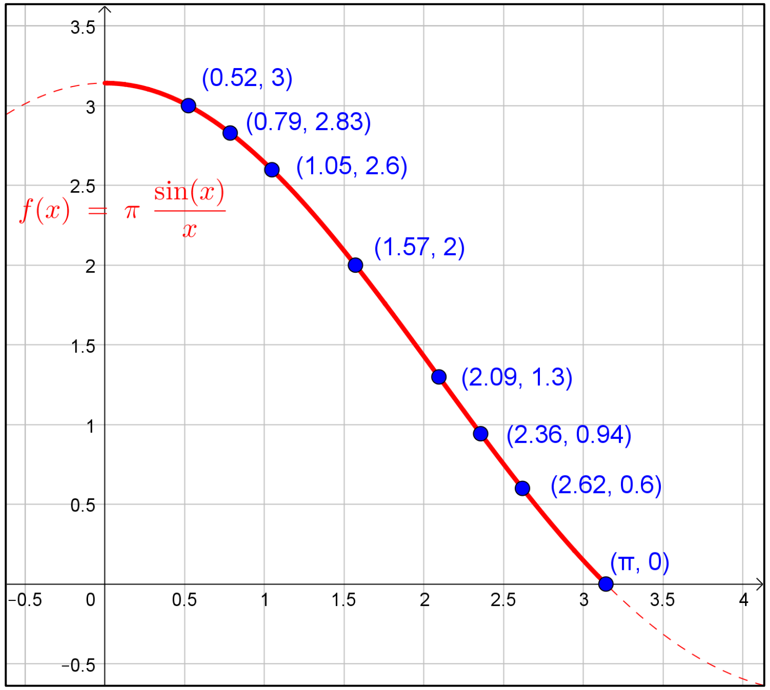


I dati della tabella possono poi essere riportati sul piano cartesiano:



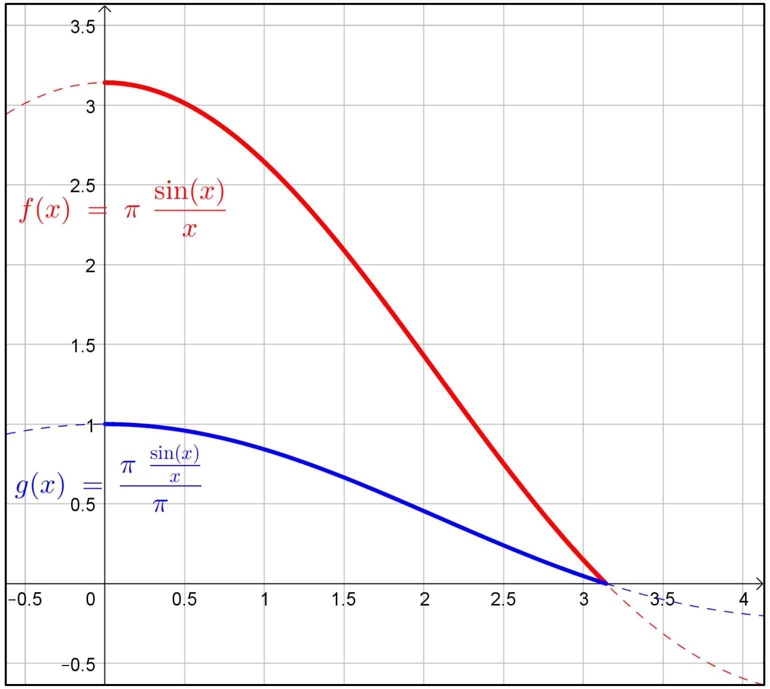
e si può avere conferma della congettura effettuata rappresentando con GeoGebra la funzione

$$f(x) = \pi \frac{\sin x}{x}$$



Se poi si applica alla funzione f una dilatazione verticale di centro l'origine e coefficienti $\left(1, \frac{1}{\pi}\right)$, si ottiene la funzione

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}$$



che permette di osservare di nuovo che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

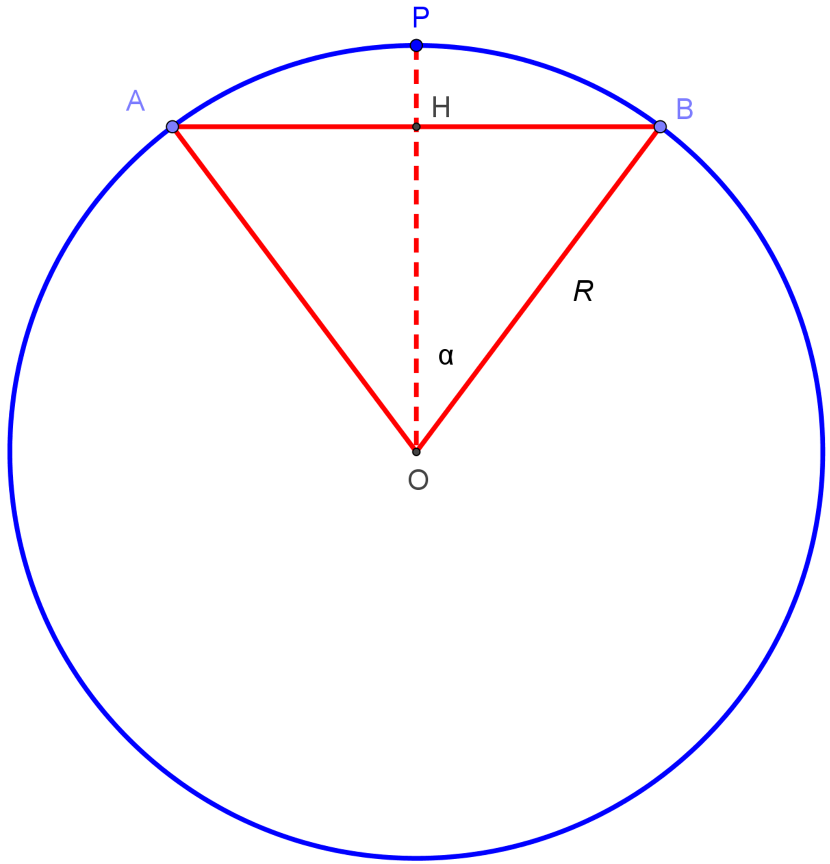
Seconda parte del laboratorio

Domanda 1: quale potrebbe essere l'interpretazione nella geometria della sfera del rapporto $\frac{1-\cos x}{x}$?

Domanda 2: quale considerazione geometrica può portare a dedurre che $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$?

Scheda di lavoro:

Abbiamo tracciato la circonferenza (parallelo) avente centro nel punto P (Polo Nord) e raggio pari all'arco di circonferenza PB.
In figura è rappresentata l'intersezione della superficie sferica con un piano passante per P e per il centro della sfera.



Determina, giustificando le tue risposte:

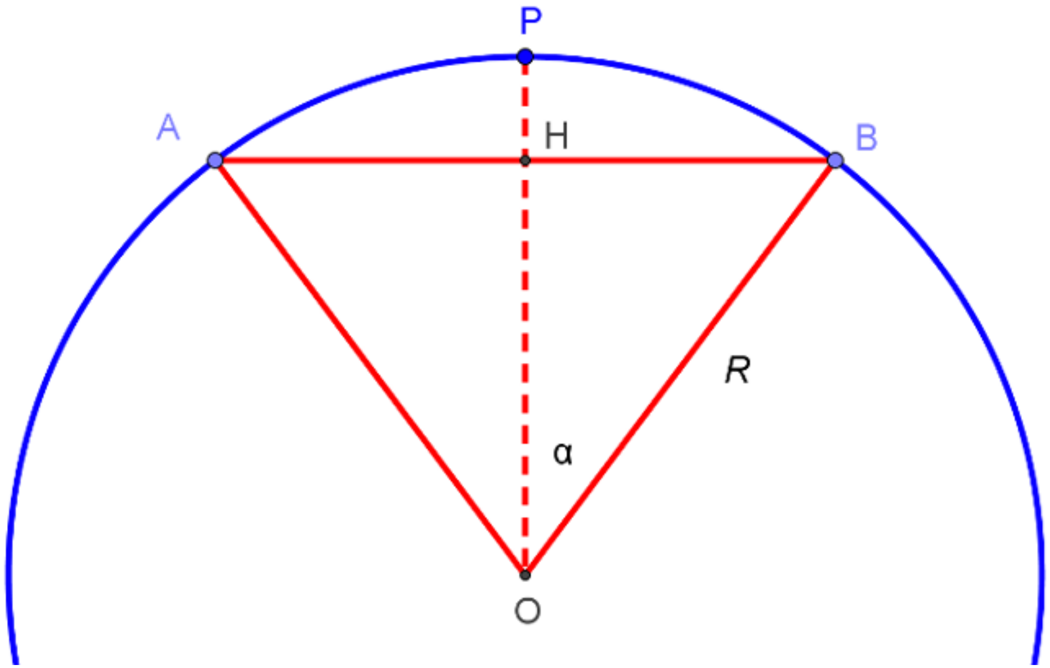
1. il significato geometrico di $R\alpha$

---

2. il significato geometrico dell'espressione $R(1 - \cos\alpha)$

---

3. il significato geometrico del rapporto $\frac{R(1-\cos\alpha)}{R\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}$



Risposta attesa

Determina, giustificando le tue risposte:

1. il significato geometrico di $R\alpha$

Se l'ampiezza dell'angolo è misurata in radianti, $R\alpha$ è pari alla lunghezza del raggio "sferico" del parallelo.

2. il significato geometrico dell'espressione $R(1 - \cos\alpha)$

$R\cos\alpha$ rappresenta la lunghezza del cateto OH e cioè la distanza del parallelo dal centro della sfera.

Di conseguenza $R - R\cos\alpha = R(1 - \cos\alpha)$ rappresenta la distanza del parallelo dal Polo Nord.

3. il significato geometrico del rapporto $\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}$.

Rappresenta il rapporto tra la distanza dal Polo Nord del piano su cui giace il parallelo e il raggio "sferico" del parallelo.

Per dedurre il secondo limite notevole, si potrebbe allora proporre una analogia con quanto avviene nel piano. Il rapporto tra la distanza di una circonferenza dal piano su cui giace e il suo raggio (qualsiasi esso sia) è sempre zero. Il che ci permetterebbe allora di congetturare che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Si può avere conferma della congettura rappresentando con GeoGebra la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$$