Giocare con le equazioni: un'esperienza di PCTO

Paola Palestini, Carlo Toffalori, Giuseppina Zucchini
Incontro dei Licei Matematici
9-10 settembre 2021

Svagarsi con le equazioni… i ***giochi diofantei*** (James Jones, 1982)

Il motivo del nome: da Diofanto, matematico alessandrino del III secolo, e dalle equazioni diofantee

- a coefficienti interi,
- di cui si cercano soluzioni intere o naturali.

Un esempio di gioco diofanteo

Due sfidanti: A e B
Il campo di battaglia: un'equazione a coefficienti interi, come $x_1 + y_1 + x_2 = y_2^2$.
La cronaca di una partita:

- A sceglie un valore naturale per x_1, per esempio $X_1 = 3$, così che l'equazione diventa $3 + y_1 + x_2 = y_2^2$;
- B sceglie un valore naturale per y_1, per esempio $Y_1 = 6$, così che l'equazione diventa $9 + x_2 = y_2^2$;
- A sceglie per x_2 il valore $X_2 = 1$, così che l'equazione diventa $10 = y_2^2$;
- a questo punto B non ha modo di replicare con nessun valore naturale Y_2 per y_2 che soddisfi $10 = Y_2^2$ perché 10 non è un quadrato.

Dunque vince A.

In realtà A ha sempre una strategia vincente, gli basta scegliere x_2 in modo che la somma $x_1 + y_1 + x_2$ non sia un quadrato. Infatti ci sono numeri naturali arbitrariamente grandi che non sono quadrati.

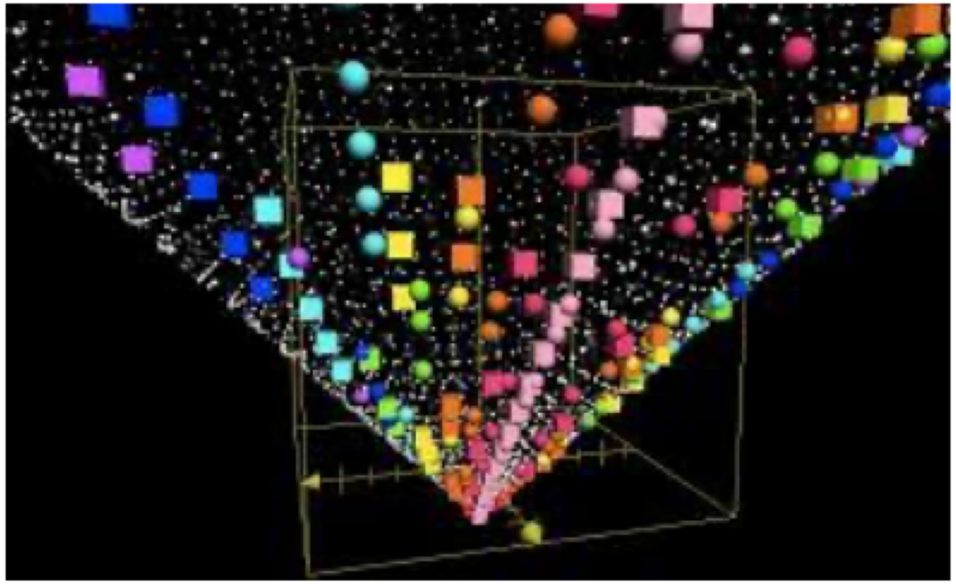
La versione generale

Si fa riferimento a un polinomio arbitrario a coefficienti interi $p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$: tra i numeri naturali, dunque all'interno di $\mathbb{N}$,

- A sceglie un valore X_1 per x_1,
- B gli oppone un valore Y_1 per y_1,
- A sceglie X_2 per x_2,
- B gli oppone un valore Y_2 per y_2,

e così via, fino a X_n, Y_n rispettivamente per x_n, y_n. Alla fine della procedura

- se $p(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) = 0$ vince B,
- se $p(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) \neq 0$ vince A.



Un'occasione per accostare la teoria dei giochi: i giochi diofantei sono

- di lunghezza ***finita***, e anzi con un numero ***limitato*** di mosse,
- tra 2 sfidanti,
- con esito tra vittoria o sconfitta (esclusi pareggi),
- con informazione perfetta (nessun fattore causale, ogni giocatore informato delle mosse dell'altro).



Il classico teorema di Zermelo-von Neumann: uno dei due avversari dispone una strategia vincente.

Un collegamento alla teoria della calcolabilità e della complessità

Dal decimo problema di Hilbert al teorema DPRM (Davis-Putnam-J. Robinson-Matijasevic, 1900-1970): non c'è algoritmo per decidere se un polinomio a coefficienti interi ha o no radici naturali (o anche intere).

Conseguenze imbarazzanti

- (Jones) Non esiste algoritmo che sa decidere effettivamente, per ogni polinomio a coefficienti interi (anche in sole 4 indeterminate), quale giocatore ha una strategia vincente nel corrispondente gioco diofanteo.
- (Tung) Esiste un algoritmo rapido per decidere se A ha una strategia in un gioco diofanteo per polinomi di 2 indeterminate ***se e solo se*** P = NP.

E ancora esistono

- (Jones, cfr. Rabin) un gioco diofanteo in 6 indeterminate in cui B ha una strategia vincente, che però non è calcolabile.
- (ancora Jones) un gioco diofanteo in 4 indeterminate in cui B ha una strategia vincente calcolabile, ma nessuna strategia vincente calcolabile rapidamente.

Tornando all'aritmetica…

Non solo il problema di distinguere quadrati e non quadrati, ma varie congetture sui numeri primi si formulano in termini di giochi diofantei e strategie vincenti.

Quarto problema di Edmund Landau (1912, International Congress of Mathematicians). Quanti sono i numeri primi della forma $m^2 + 1$ (come $5, 17, 37, 101$)? Un'infinità?

Un interrogativo ancora senza risposta! E un gioco diofanteo in cui la strategia vincente tocca ad A o B in ragione della soluzione della congettura…

EQUAZIONI DIOFANTEE
UN’ESPERIENZA DI LABORATORIO DIDATTICO
" VERSIONE DAD "

PAOLA PALESTINI
LICEO SCIENTIFICO "B. ROSETTI "
SAN BENEDETTO DEL TRONTO

- TEMA: EQUAZIONI DIOFANTEE
- DESTINATARI: STUDENTI DELLE CLASSI II E III, LICEO MATEMATICO.
- OBIETTIVI DIDATTICI DEL SEGMENTO DI PERCORSO CHE VADO A DESCRIVERE:

  EQUAZIONI DIOFANTEE LINEARI IN DUE VARIABILI

  METODO DEL TEOREMA DI BÉZOUT E DELLE DIVISIONI SUCCESSIVE
- SOGGETTI COINVOLTI: STUDENTE-RICERCATORE, DOCENTE OSSERVATORE-PARTECIPANTE

  (MODELLO DISCUSSO IN ARZARELLO & BARTOLINI BUSSI - 1998)

MEZZI E STRUMENTI

Classroom

Meet

Moduli

FINALITÀ : SCOPERTA, PRODUZIONE E VALIDAZIONE DI ALCUNI ENUNCIATI TRA I QUALI:

- L'EQUAZIONE DIOFANTEA ax+by=c AMMETTE SOLUZIONI SE E SOLO SE d = mcd(a,b) DIVIDE c.

- SE UN'EQUAZIONE DIOFANTEA ax+by=c AMMETTE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE ($\bar{x}$,$\bar{y}$) ALLORA NE AMMETTE INFINITE E QUESTE SONO DELLA FORMA $\left(\bar{x}+k\frac{b}{d}, \bar{y}-k\frac{a}{d}\right)$ CON d = MCD(a, b) E k INTERO.

- INDIVIDUAZIONE CASI IN CUI È POSSIBILE DETERMINARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE ($\bar{x}$,$\bar{y}$) IN MODO RAPIDO
  es 4x+7y=12
  13x+4y=34

- INDIVIDUAZIONE STRATEGIA PER DETERMINARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE NEL CASO GENERALE: TEOREMA DI BÉZOUT E ALGORITMO EUCLIDEO DELLE DIVISIONI SUCCESSIVE.

Questionario 1 - Laboratorio equazioni diofantee – Equazioni diofantee lineari

*Campo obbligatorio

Problema: Per la campagna vaccinale Covid devono essere acquistate alcuni lotti dei vaccini Moderna e Pfizer. Il prezzo del primo è di 140€ per un lotto di 10 dosi mentre quello del secondo è di 120€ per lotto. Quanti lotti per ciascuno dei due vaccini potranno essere acquistati spendendo esattamente 10000€?

1. Indicando con x il numero dei lotti del vaccino Moderna e con y quello dei lotti del vaccino Pfizer come puoi formalizzare il problema? Ricorda di mettere in evidenza i vincoli sulle variabili. *

2. Questo problema ammette soluzioni? *

- sì
- no
- non so rispondere

Invia

1. Indicando con x il numero dei lotti del vaccino Moderna e con y quello dei lotti del vaccino Pfizer come puoi formalizzare il problema? Ricorda di mettere in evidenza i vincoli sulle variabili. *

$140\,x + 120\,y = 10000$ Aggiungi feedback

$7\,x + 6\,y = 500$ Aggiungi feedback

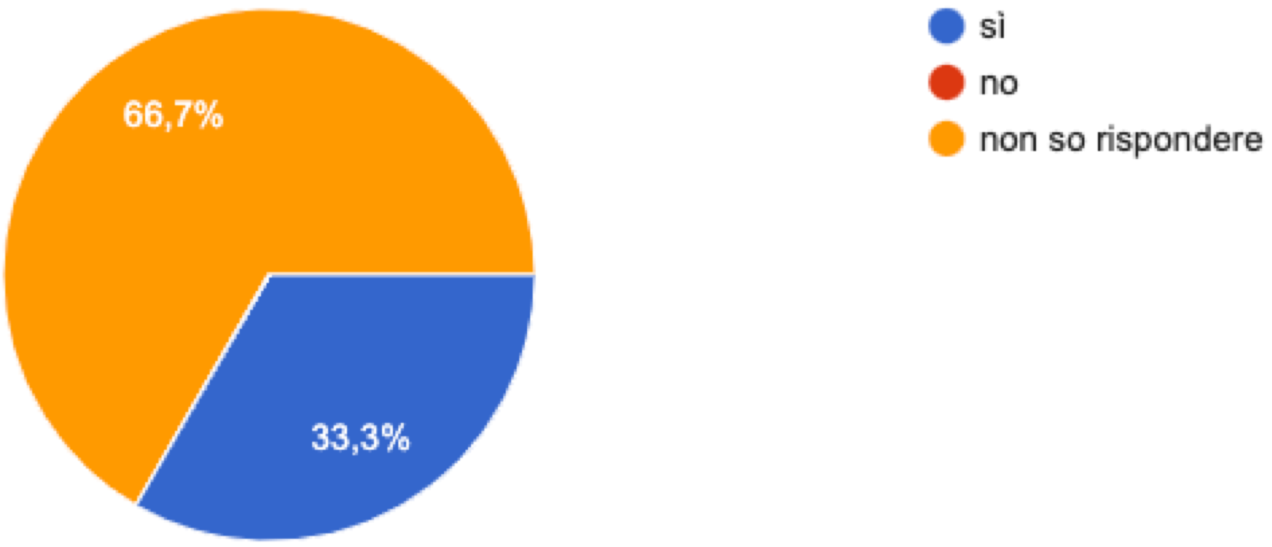
$140\,x + 120\,y = 10000$ con $x > 0$ e $y > 0$ Aggiungi feedback

$140\,x + 120\,y = 10000$ con x e y interi positivi Aggiungi feedback

$140\,x + 120\,y = 10000$ con x e y interi non negativi Aggiungi feedback

Problema: Per la campagna vaccinale Covid devono essere acquistate alcuni lotti dei vaccini Moderna e Pfizer. Il prezzo del primo è di 140€ per un lotto di 10 dosi mentre quello del secondo è di 120€ per lotto. Quanti lotti per ciascuno dei due vaccini potranno essere acquistati spendendo esattamente 10000€?

2. Questo problema ammette soluzioni?



Questionario 2 - Laboratorio equazioni diofantee – Equazioni diofantee lineari

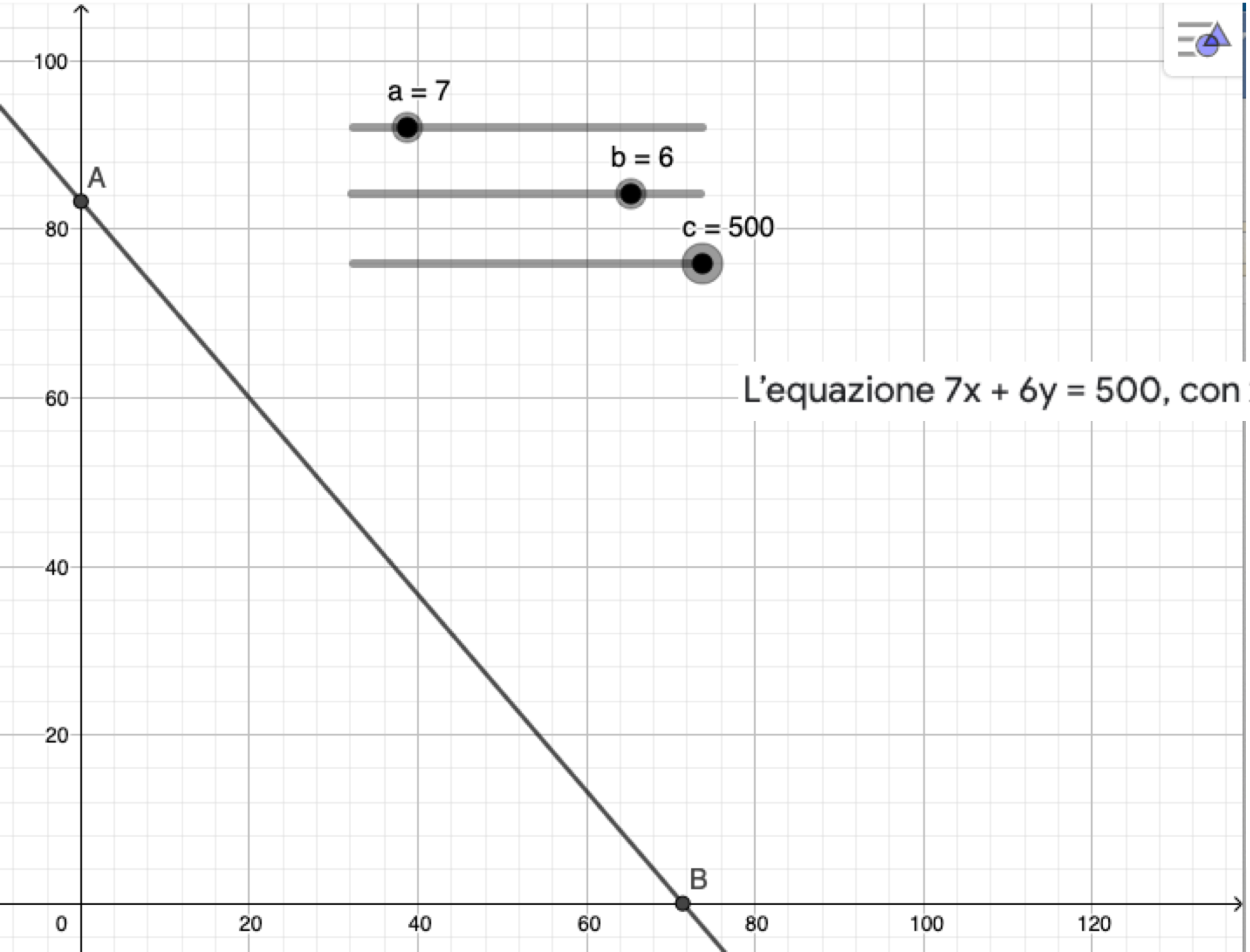
Utilizza Geogebra per rappresentare l'equazione $ax + by = c$ al variare di a, b e c in $\mathbb{Z}$ (utilizza gli slider). Per $a = 7$, $b = 6$ e $c = 500$ cerca le soluzioni intere non negative dell'equazione e cioè le coordinate intere dei punti della retta col vincolo $x >= 0$ e $y >= 0$.

Questo problema ammette soluzioni? *

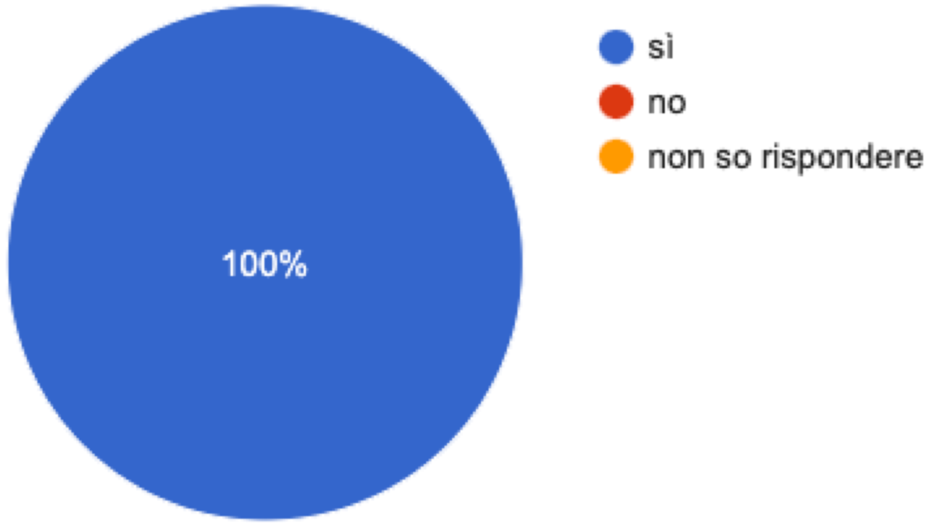
- ◯ sì
- ◯ no
- ◯ non so rispondere

Invia

Grafico di ax+by=c, con x,y reali



L'equazione 7x + 6y = 500, con x e y interi non negativi, ammette soluzioni?



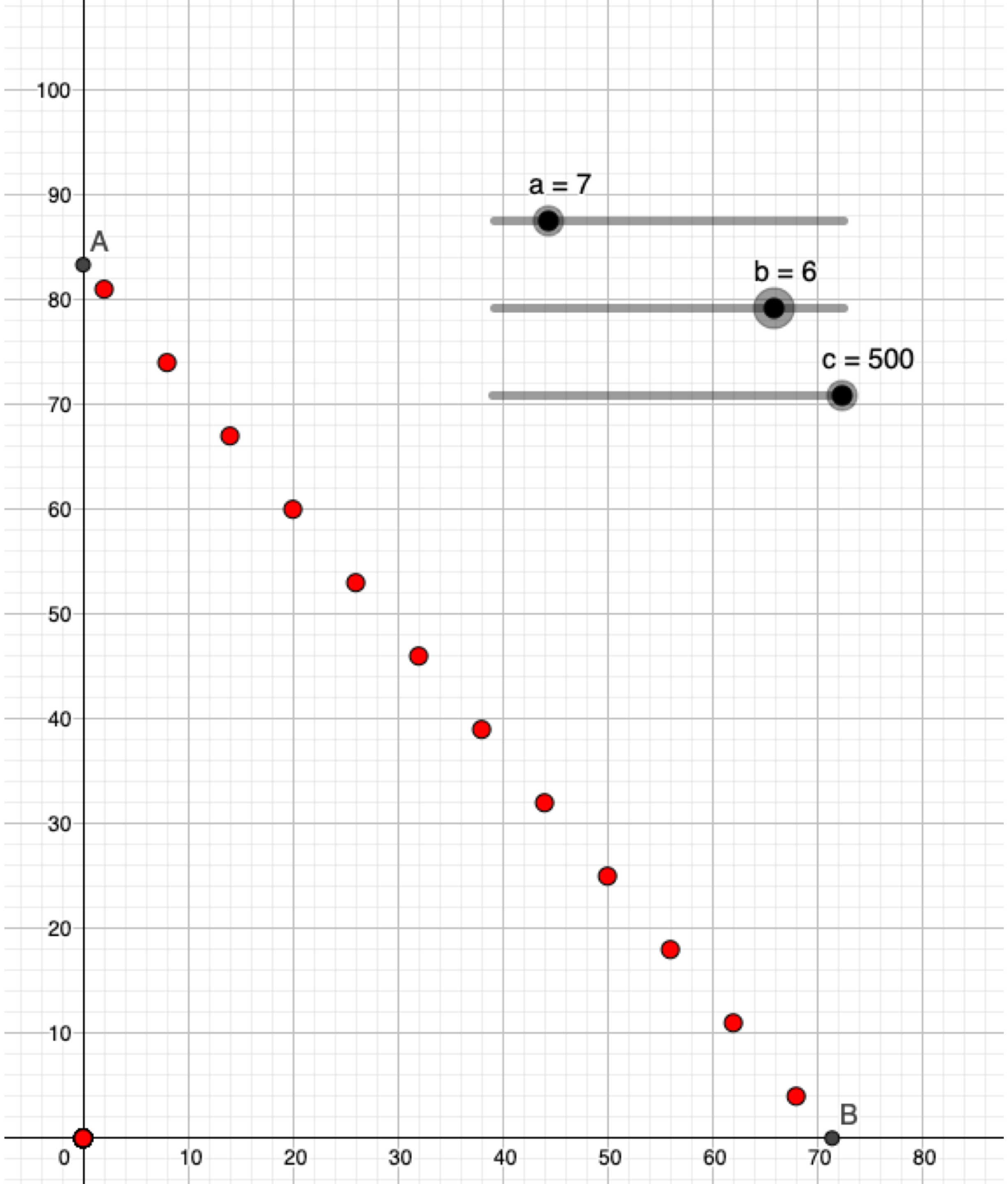
Questionario 3 - Laboratorio equazioni diofantee – Equazioni diofantee lineari

Utilizza il file “lezione1.ggb” e varia i valori dei coefficienti a, b e c dell’equazione diofantea $ax+by=c$ mediante gli slider così da visualizzare le soluzioni dell’equazione diofantea ad essi associata con il vincolo che x e y, interi, siano non negativi. Le soluzioni sono le coordinate dei punti indicati in rosso, escluso O(0,0). Rispondi ora alle domande seguenti.

1. L’equazione $7x + 6y = 500$, con x e y interi non negativi, ammette soluzioni?

- ○ sì
- ○ no
- ○ non so rispondere

Invia



file lezione1.ggb

Soluzioni dell'equazione diofantea ax+by=c con $x \geq 0, \; y \geq 0$

Soluzioni equazione diofantea ax+by=c con $x \geq 0, y \geq 0$

$f : y = -\frac{6}{5}x + \frac{93}{5}$

$B = \text{Intersezione}(f, \text{asseX})$

$\rightarrow (15.5, 0)$

$A = \text{Intersezione}(f, \text{asseY})$

$\rightarrow (0, 18.6)$

$x_{max} = \text{Max}(\lfloor x(A) \rfloor, \lfloor x(B) \rfloor)$

$\rightarrow 15$

$x_{min} = \text{Min}(\lfloor x(A) \rfloor, \lfloor x(B) \rfloor)$

$\rightarrow 0$

$\text{lista1} = \text{Successione}\left(-\frac{a}{b}\, i + \frac{c}{b}, i, x_{min}, x_{max}\right)$

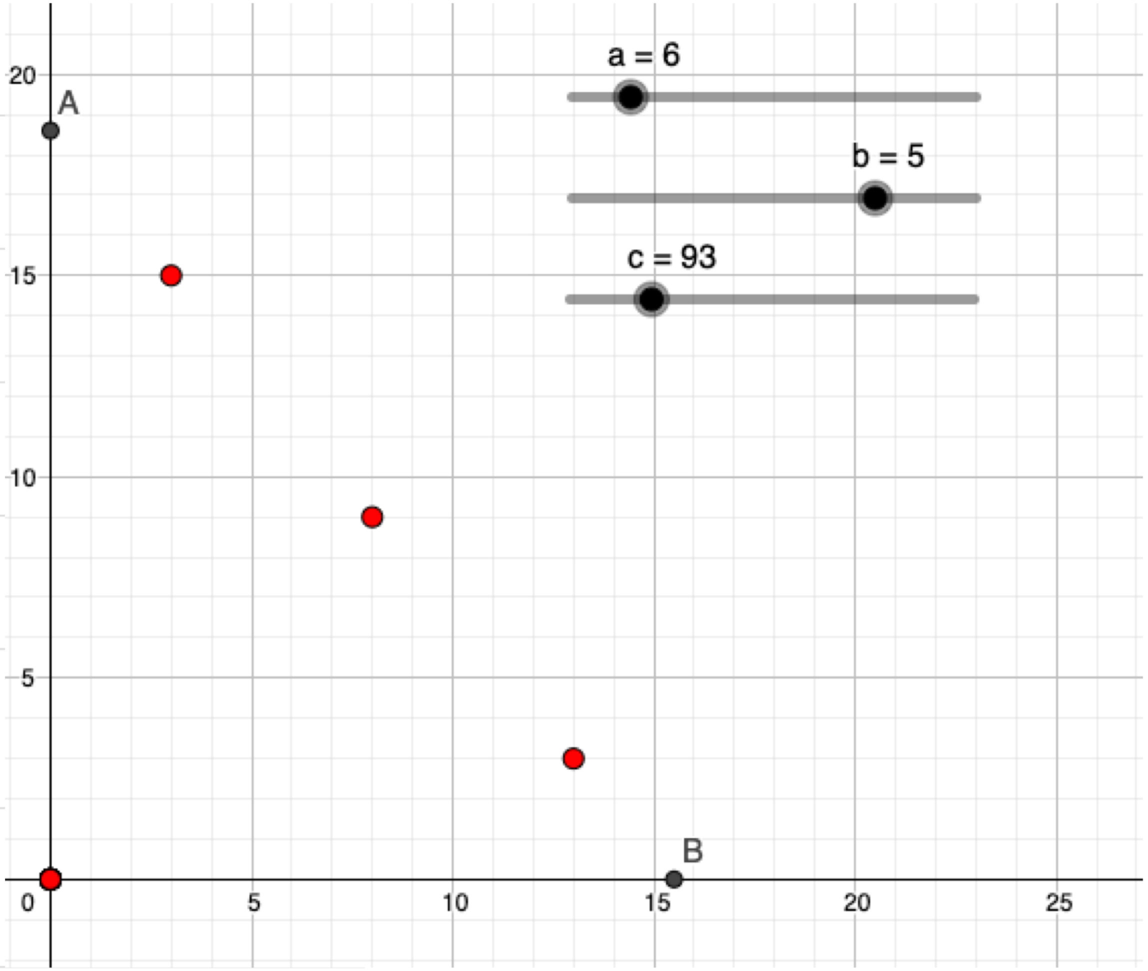
$\rightarrow \{18.6, 17.4, 16.2, 15, 13.8, 12.6, 11.4, 10.2, 9, 7.8, 6.6, 5.4, 4.2, 3, 1.8, 0.6\}$

$\text{lista2} = \text{Successione}\left(\text{Se}\left(\text{Elemento}(\text{lista1}, i) \stackrel{?}{=} \lfloor \text{Elemento}(\text{lista1}, i) \rfloor, i, 0\right), i, x_{min} + 1, x_{max} + 1\right)$

$\rightarrow \{0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0, 14, 0, 0\}$

$\text{lista3} = \text{Successione}\left(\text{Se}\left(\text{Elemento}(\text{lista2}, i) \stackrel{?}{=} 0, (0, 0), (\text{Elemento}(\text{lista2}, i) - 1, \text{Elemento}(\text{lista1}, i))\right), i, x_{min} + 1, x_{max} + 1\right)$

$\rightarrow \{(0, 0), (0, 0), (0, 0), (3, 15), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (8, 9), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (13, 3), (0, 0), (0, 0)\}$



Sol. eq. diofantea ax+by=c con $x \geq 0, y \geq 0$

$f : y = -\frac{6}{5} x + \frac{93}{5}$

$B = \text{Intersezione}(f, \text{asseX})$

$\rightarrow (15.5, 0)$

$A = \text{Intersezione}(f, \text{asseY})$

$\rightarrow (0, 18.6)$

$x_{max} = \text{Max}(\lfloor x(A) \rfloor, \lfloor x(B) \rfloor)$

$\rightarrow 15$

$x_{min} = \text{Min}(\lfloor x(A) \rfloor, \lfloor x(B) \rfloor)$

$\rightarrow 0$

$\text{lista1} = \text{Successione}\left(-\frac{a}{b} i + \frac{c}{b}, i, x_{min}, x_{max}\right)$

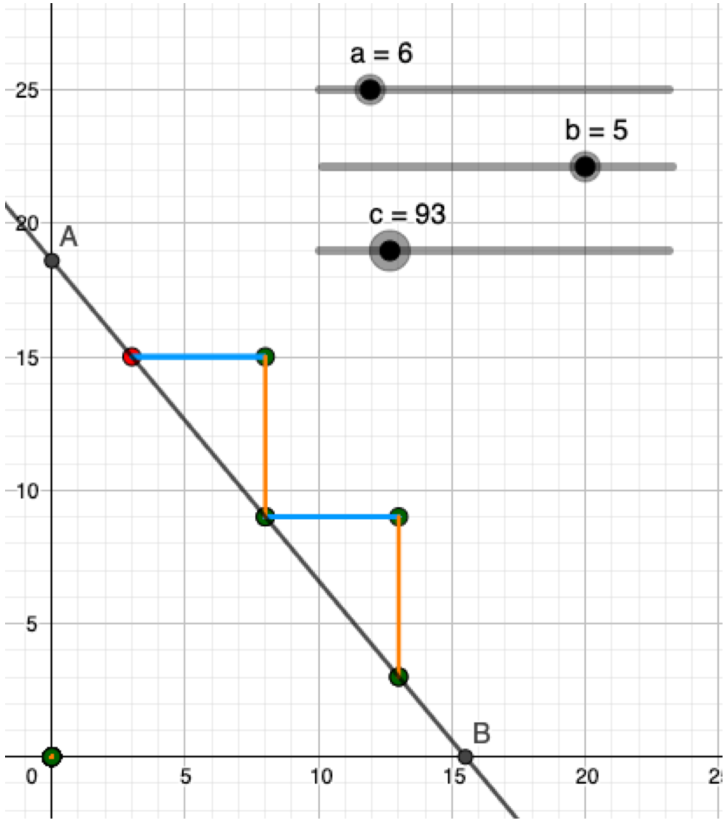
$\rightarrow \{18.6, 17.4, 16.2, 15, 13.8, 12.6, 11.4, 10.2, 9, 7.8, 6.6, 5.4, 4.2, 3, 1.8, 0.6\}$

$\text{lista2} = \text{Successione}\left(\text{Se}\left(\text{Elemento}(\text{lista1}, i) \stackrel{?}{=} \lfloor \text{Elemento}(\text{lista1}, i) \rfloor, i, 0\right), i, x_{min} + 1, x_{max} + 1\right)$

$\rightarrow \{0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0, 14, 0, 0\}$

$\text{lista3} = \text{Successione}\left(\text{Se}\left(\text{Elemento}(\text{lista2}, i) \stackrel{?}{=} 0, (0, 0), (\text{Elemento}(\text{lista2}, i) - 1, \text{Elemento}(\text{lista1}, i))\right), i, x_{min} + 1, x_{max} + 1\right)$

$\rightarrow \{(0, 0), (0, 0), (0, 0), (3, 15), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (8, 9), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (13, 3), (0, 0), (0, 0)\}$



$\text{lista4} = \text{Successione}\left(\text{Se}\left(\text{Elemento}(\text{lista2}, i) \stackrel{?}{=} 0, (0, 0), \text{Se}\left(\text{Elemento}(\text{lista2}, i) - 1 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)} \leq x_{max}, \left(\text{Elemento}(\text{lista2}, i) - 1 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)}, \text{Elemento}(\text{lista1}, i)\right), (0, 0)\right)\right), i, x_{min} + 1, x_{max}\right)$

$\rightarrow \{(0, 0), (0, 0), (0, 0), (8, 15), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (13, 9), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0)\}$

$\text{lista5} = \text{Successione}\left(\text{Se}\left(\text{Elemento}(\text{lista4}, i) \stackrel{?}{=} (0, 0), (0, 0), \text{Se}\left(\text{Elemento}(\text{lista1}, i) - \frac{a}{\text{MCD}(a, b)} \geq 0, \left(\text{Elemento}(\text{lista2}, i) - 1 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)}, \text{Elemento}(\text{lista1}, i) - \frac{a}{\text{MCD}(a, b)}\right), (0, 0)\right)\right), i, x_{min} + 1, x_{max}\right)$

$\rightarrow \{(0, 0), (0, 0), (0, 0), (8, 9), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (13, 3), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0)\}$

$\text{lista6} = \text{Successione}(\text{Se}(\text{Elemento}(\text{lista4}, i) \neq (0, 0), \text{Segmento}(\text{Elemento}(\text{lista3}, i), \text{Elemento}(\text{lista4}, i)), (0, 0)), i, x_{min} + 1, x_{max})$

$\rightarrow \{5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5\}$

$\text{lista7} = \text{Successione}(\text{Segmento}(\text{Elemento}(\text{lista4}, i), \text{Elemento}(\text{lista5}, i)), i, x_{min} + 1, x_{max})$

$\rightarrow \{0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

FINALITÀ : SCOPERTA, PRODUZIONE E VALIDAZIONE DI ENUNCIATI

- SE UN'EQUAZIONE DIOFANTEA ax+by=c AMMETTE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $(\bar{x},\bar{y})$ ALLORA NE AMMETTE INFINITE E QUESTE SONO DELLA FORMA $\left(\bar{x} + k\frac{b}{d}, \bar{y} - k\frac{a}{d}\right)$ CON d = MCD(a,b) E k INTERO.

EQUAZIONI DIOFANTEE DI SECONDO GRADO

UN'ESPERIENZA DI PCTO IN DAD

GIUSEPPINA ZUCCHINI

LICEO SCIENTIFICO "F. FILELFO"

TOLENTINO

- TEMA: PARTICOLARI EQUAZIONI DIOFANTEE DI SECONDO GRADO

- DESTINATARI: STUDENTI DELLE CLASSI III SCIENTIFICO E SCIENZE APPLICATE, LICEO MATEMATICO.
- OBIETTIVI DIDATTICI DEL SEGMENTO DI PERCORSO DESCRITTO:

  EQUAZIONI DIOFANTEE OMOGENEE DI SECONDO GRADO, LEGAME CON LE TERNE PITAGORICHE E LA GEOMETRIA ANALITICA

  RIFERIMENTI AL PROBLEMA VIII DEL SECONDO LIBRO DELL'ARITMETICA DI DIOFANTO

  VALORIZZAZIONE DELL'ASPETTO STORICO

- SOGGETTI COINVOLTI: STUDENTE, DOCENTE LICEO MATEMATICO, CLASSI DI APPARTENENZA DEGLI STUDENTI

MEZZI E STRUMENTI

Team in Classroom

Meet

Jamboard

Equazioni diofantee di II grado

Un esempio famoso di equazione di II grado

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Equazioni diofantee di II grado

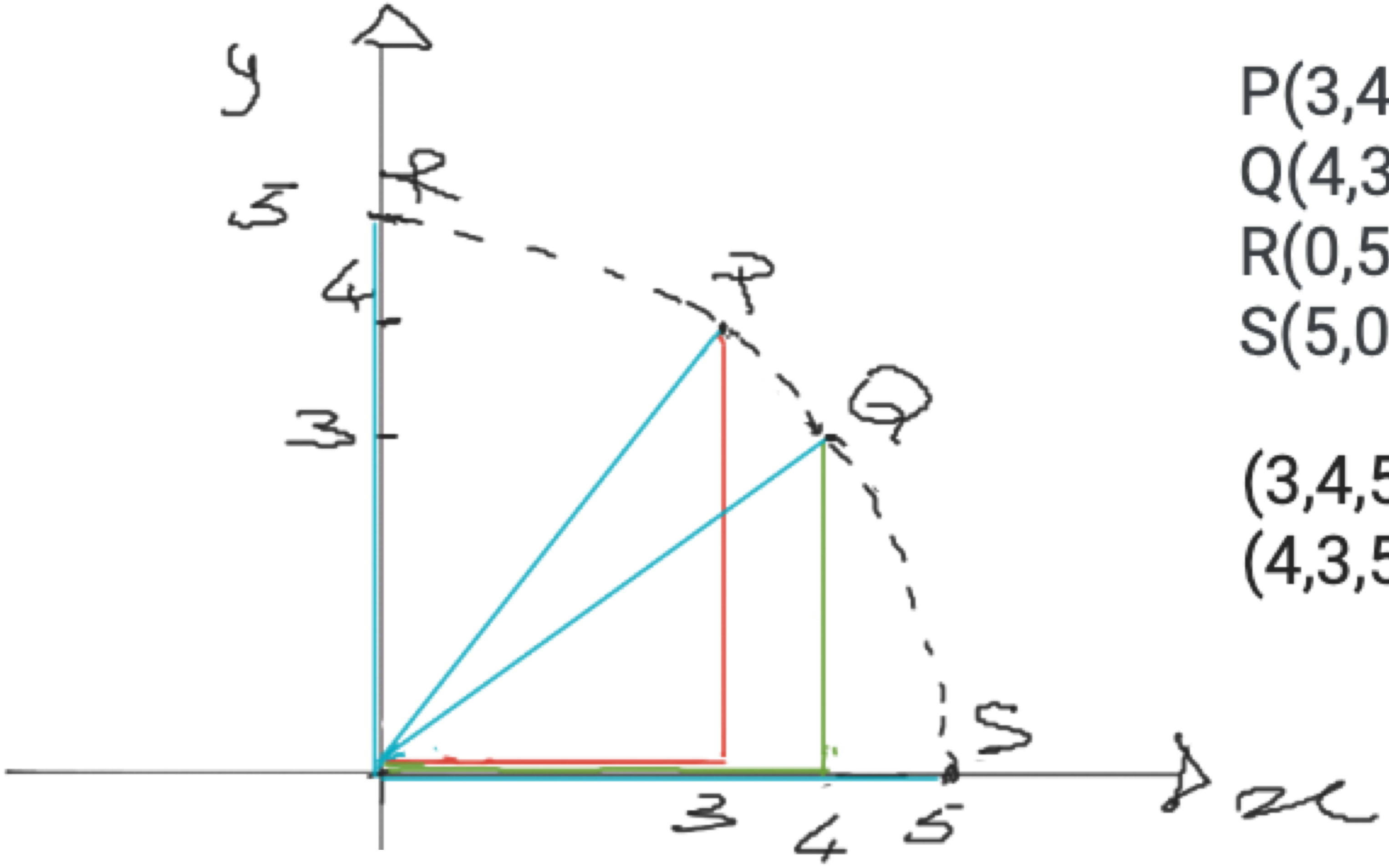
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Equazione diofantea, equazione pitagorica, equazione circonferenza

Il caso $r = 5$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Soluzioni dell'equazione diofantea in N sono le terne pitagoriche (3,4,5) e (4,3,5) a cui si possono aggiungere le soluzioni banali (0,5,5) e (5,0,5).



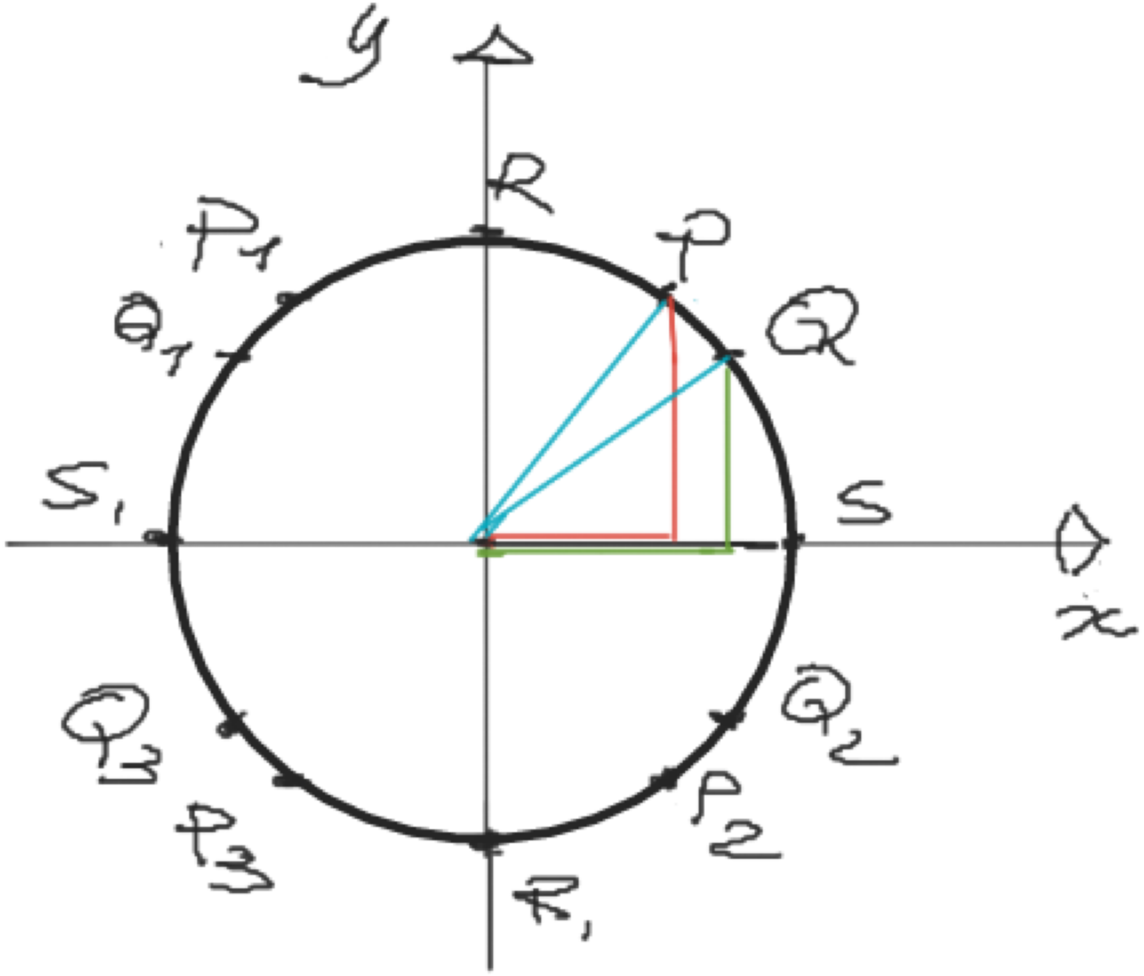
P(3,4)
Q(4,3)
R(0,5)
S(5,0)

Punti della circonferenza

(3,4,5)
(4,3,5)

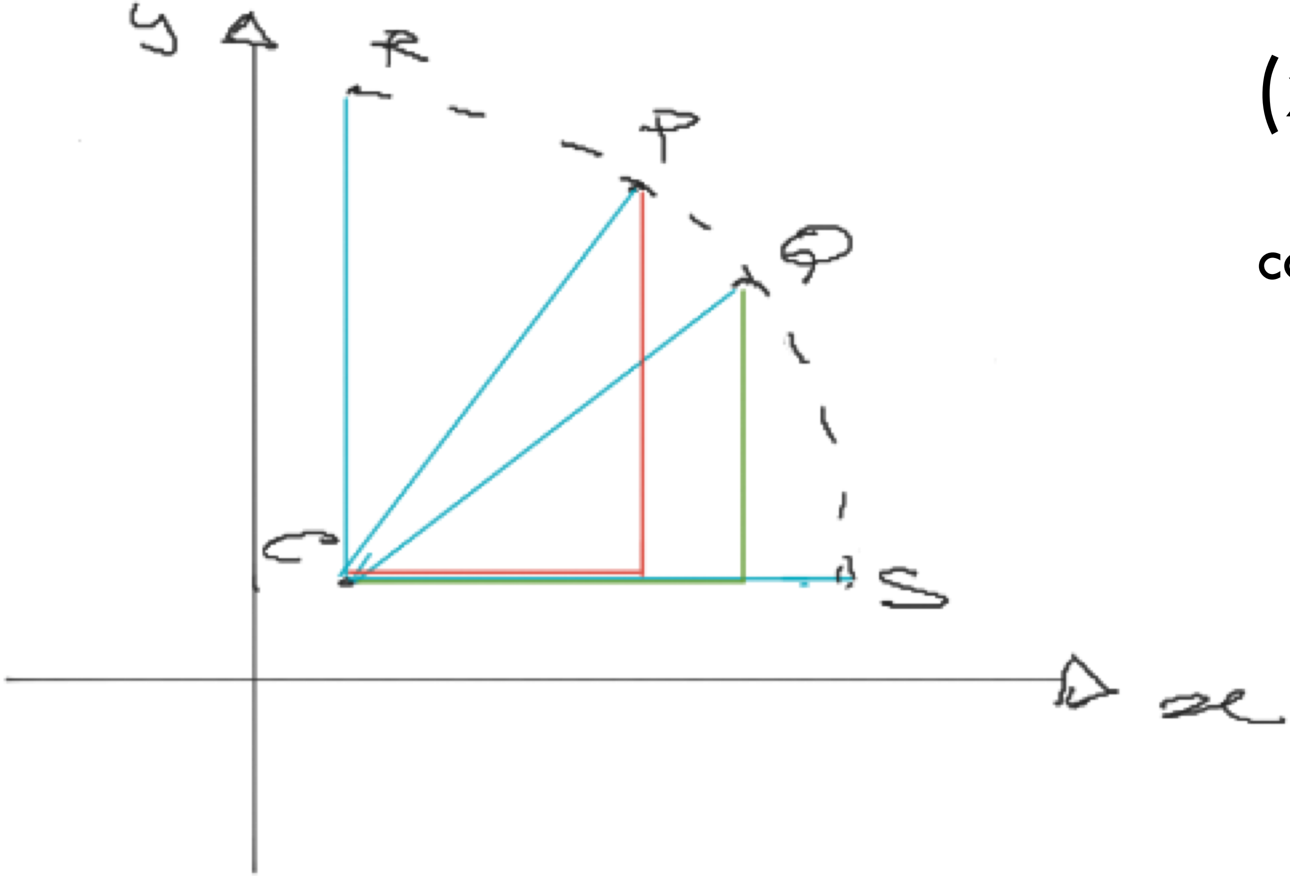
Terne pitagoriche

L'equazione diofantea $x^2+y^2=5^2$ ha soluzioni intere con valori anche negativi che sono rappresentate dai punti simmetrici di P,Q,R,S rispetto agli assi cartesiani e l'origine
(-3,4), (-3,-4), (3,-4), (-4,3), (-4,-3), (4,-3), (-5,0), (0,-5)



Tutte le soluzioni intere, banali e non, dell'equazione $x^2+y^2=5^2$ sono punti della circonferenza di centro l'origine degli assi cartesiani e raggio 5.

Centro solo l'origine?



$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5^2$$

con $C(1,1)$ e $r=5$

P (4,5)
Q (5,4)
R (1,6)
S (6,1)

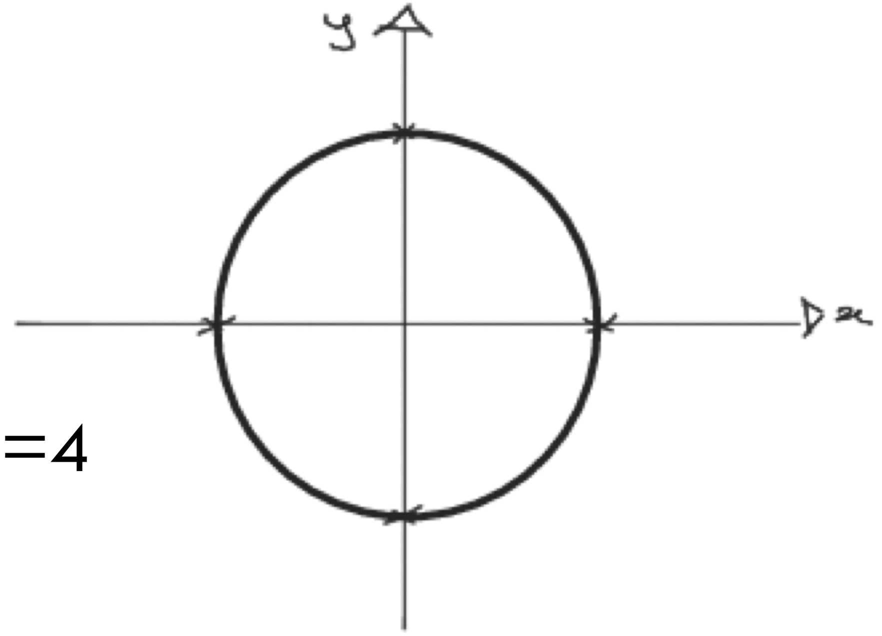
Punti della circonferenza e soluzioni dell'equazione diofantea

Il caso trattato da Diofanto nel problema VIII del libro 2 dell'Aritmetica: r=4 all'interno del problema generale «Dividere un quadrato nella somma di due quadrati»

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

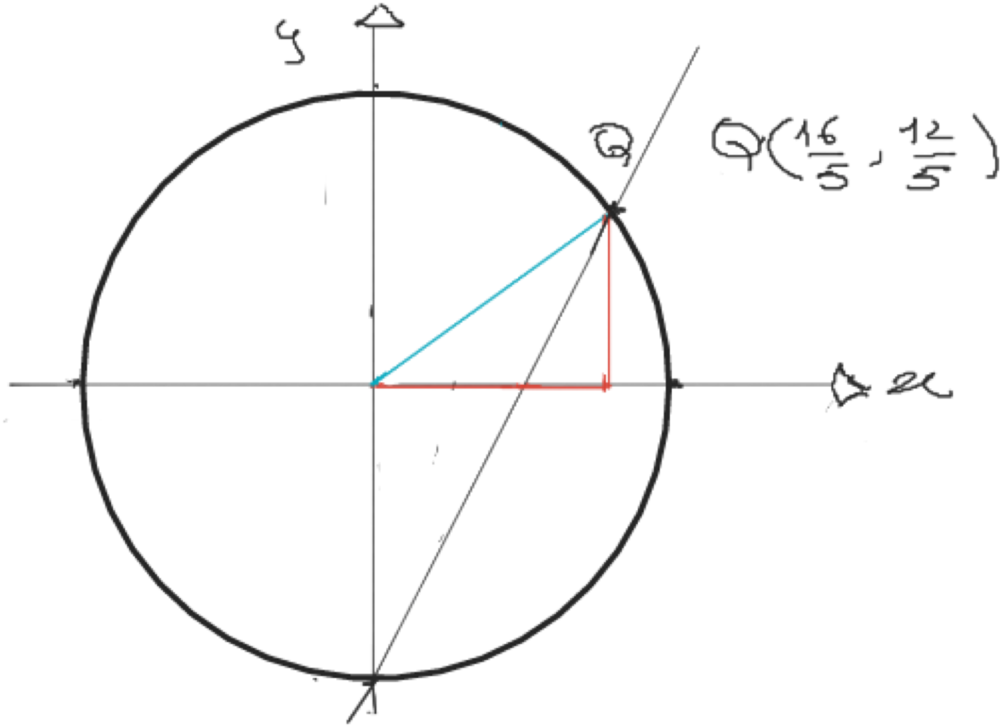
Equazione diofantea $\longrightarrow$ soluzioni banali in Z:
(4,0), (0,4),(-4,0),(0,-4)

Equazione circonferenza di centro (0,0) e raggio r=4



Data $x^2 + y^2 = 4^2$ si va alla ricerca di soluzioni $x > 0$ e $y > 0$ razionali.

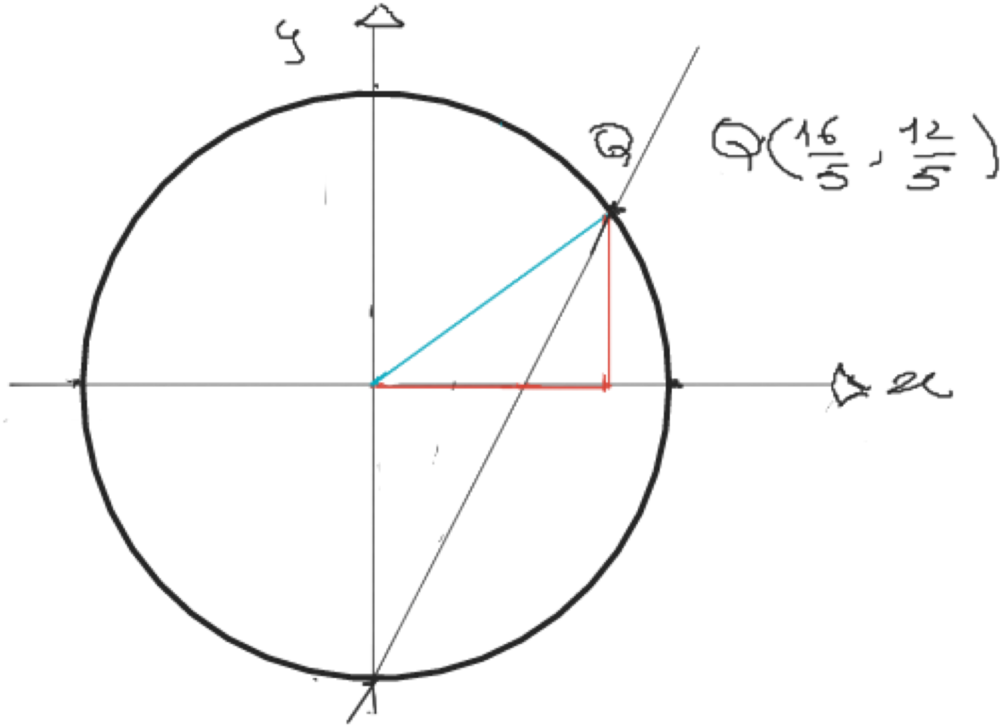
Il metodo proposto da Diofanto è porre $y=qx-4$ e ricercare q razionale positivo che soddisfi l'equazione.



Per q=1 cioè y=x-4 si ha (4,0)

Per q=2 cioè y=2x-4 si ha Q(16/5,12/5)

Soluzione dell’equazione è anche il punto P(12/5,16/5), quindi altro punto della circonferenza nel primo quadrante.



Si arriva alla terna dei razionali (16/5,12/5,4) che è soluzione dell'equazione pitagorica (omogenea) $x^2 + y^2 = z^2$

Da (16/5,12/5,4), moltiplicando per 5 e dividendo per 4, si arriva alla terna pitagorica (4,3,5)

Si può generalizzare

$x^n + y^n = z^n$

con n naturale maggiore di 2.

Pierre de Fermat

grazie dell'attenzione

PAOLA PALESTINI
CARLO TOFFALORI
GIUSEPPINA ZUCCHINI