DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO

Liceo Statale Scientifico - Classico - Linguistico
GALILEO GALILEI
- Legnano -

SSPM

LA SEZIONE AUREA E
I NUMERI DI FIBONACCI

a cura di
Mario Damiani
Emanuela Lavorato

LA SEZIONE AUREA E I NUMERI DI FIBONACCI

Motivazioni della scelta

- Tema strettamente legato alle Indicazioni Ministeriali
- Argomento ricco di spunti per approfondimenti disciplinari
- Attività con una forte valenza interdisciplinare

LA SEZIONE AUREA E I NUMERI DI FIBONACCI

Impianto dell'attività

- Si è cercato il più possibile di fornire premesse storiche, che, tutt'altro che esaurienti, fungessero da stimolo per gli studenti

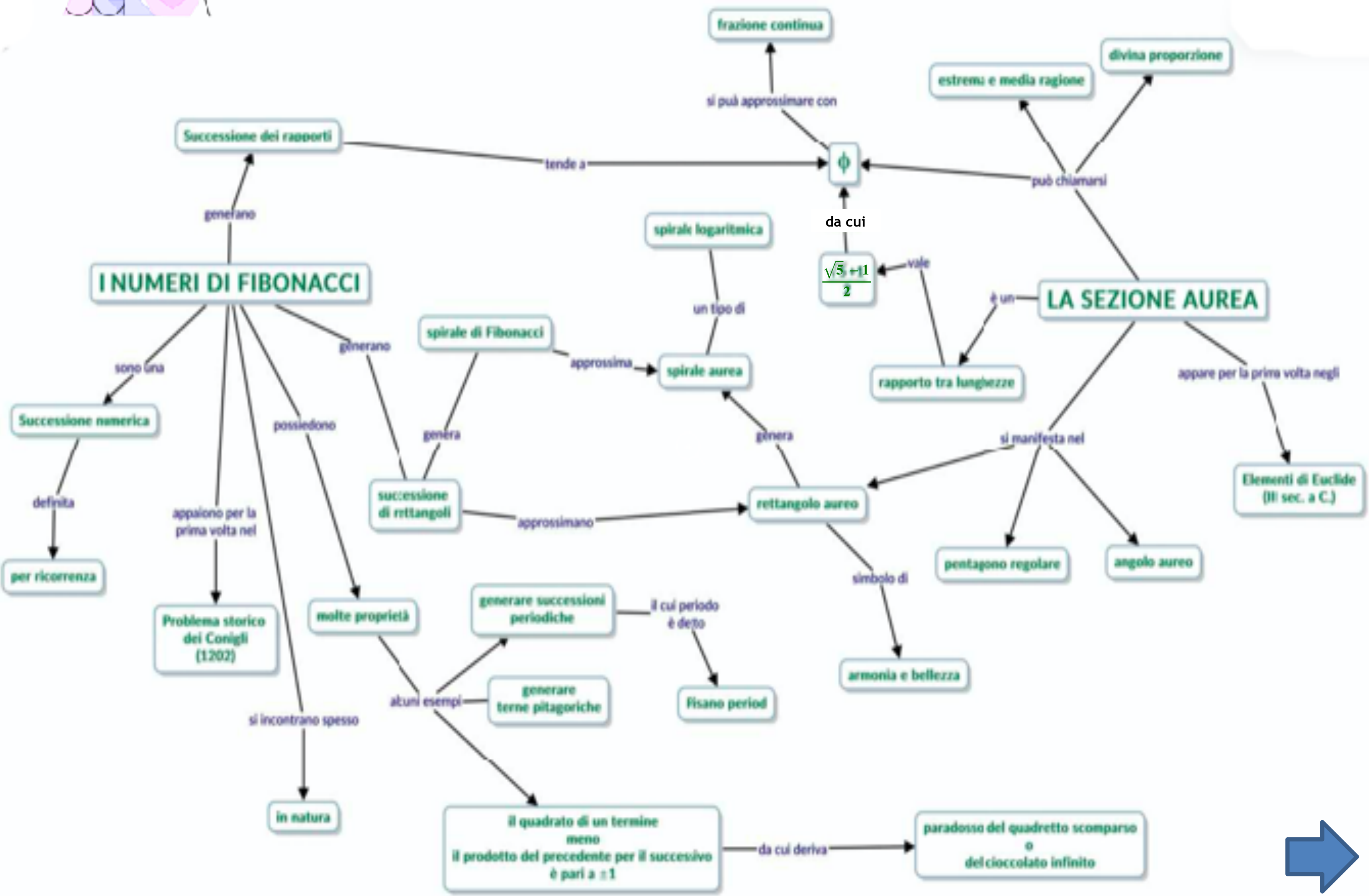
- Anche nello sviluppo degli argomenti trattati è stato offerto qualche spunto per eventuali approfondimenti individuali

LA SEZIONE AUREA E I NUMERI DI FIBONACCI

Impianto dell'attività

La struttura dell'attività si basa sulla seguente mappa concettuale

(da Treccani Scuola)



frazione continua
si può approssimare con
estrema e media ragione
divina proporzione
Successione dei rapporti
tende a
ϕ
può chiamarsi
generano
da cui
spirale logaritmica
$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
vale
I NUMERI DI FIBONACCI
un tipo di
è un
LA SEZIONE AUREA
spirale di Fibonacci
generano
approssima
spirale aurea
rapporto tra lunghezze
appare per la prima volta negli
sono una
Successione numerica
possiedono
genera
genera
si manifesta nel
Elementi di Euclide (III sec. a C.)
definita
successione di rettangoli
approssimano
rettangolo aureo
appaiono per la prima volta nel
per ricorrenza
pentagono regolare
angolo aureo
simbolo di
Problema storico dei Conigli (1202)
molte proprietà
generare successioni periodiche
il cui periodo è detto
armonia e bellezza
alcuni esempi
generare terne pitagoriche
Pisano period
si incontrano spesso
in natura
il quadrato di un termine meno il prodotto del precedente per il successivo è pari a ± 1
da cui deriva
paradosso del quadretto scomparso o del cioccolato infinito

Considerazioni sullo svolgimento dell'attività

- **Approccio**
  Si è privilegiato l'approccio geometrico e solo nella seconda parte dell'attività si è analizzato l'aspetto algebrico

- **Trattazione**
  Lo sviluppo dei vari temi dell'attività è stato volutamente non lineare, così da far ritrovare in modo apparentemente casuale risultati ottenuti per vie e con registri differenti

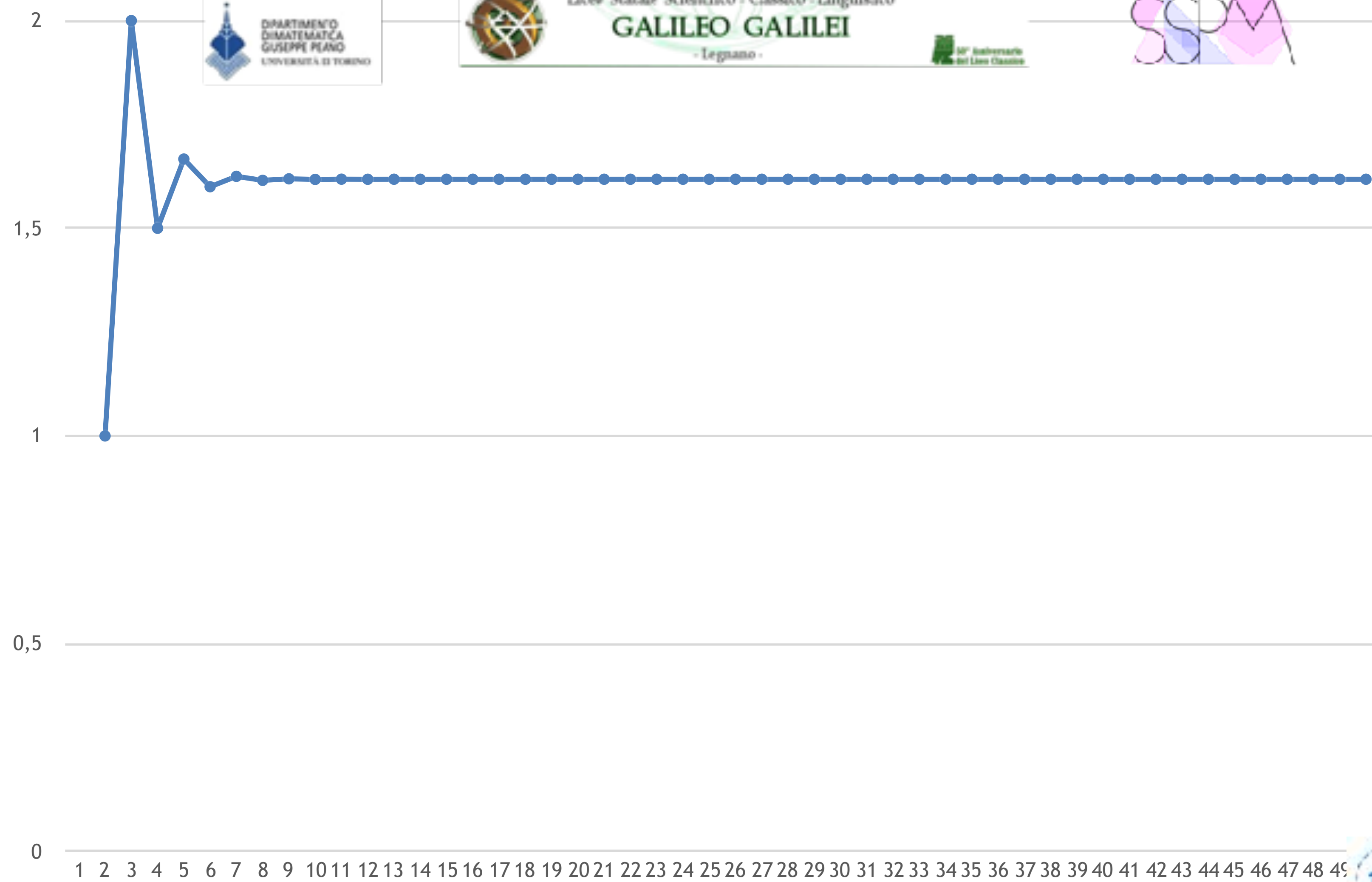
- **Interdisciplinarità**
  Sono stati coinvolti nell'attività anche docenti di Fisica, Disegno e Storia dell'arte, Scienze naturali

Considerazioni sullo svolgimento dell’attività in una delle classi coinvolte

- Con il collega di **<u>Storia dell’Arte</u>** gli studenti hanno preparato lavori di gruppo su temi assegnati dal docente, sulla base dei risultati ottenuti nell’attività del LPM

- Il collega di Scienze, invece, ha dato un apporto critico, instillando il dubbio su una lettura aprioristica della sezione aurea in natura o in opere d’arte

- Ne è nata una interessante e molto formativa disamina relativamente alla misura di grandezze, ai numeri irrazionali e alla loro approssimazione, che ha coinvolto i docenti di Fisica e di Filosofia


2
1,5
1
0,5
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48

Pietro - 3^AS

Attività 3

- Utilizzare il software GeoGebra per costruire la sezione aurea di un segmento, secondo la seguente procedura (riportata da Erone di Alessandria tra il I e il II secolo d.C.):
  - ☐ Dato il segmento AB, sia M il suo punto medio.
  - ☐ Dal punto B si conduca la retta r perpendicolare al segmento AB.
  - ☐ Sia C il punto di intersezione tra la retta r e la circonferenza di centro B e raggio MB.
  - ☐ La circonferenza di centro C e raggio CB interseca AC in D e il suo prolungamento in E.
  - ☐ Con centro in A si tracci la circonferenza di raggio AD e sia F il punto di intersezione con il segmento AB.

- Dimostrare che AF è la sezione aurea del segmento AB

........TESI:.................AB:AF=AF:BF..

....

...AD:AB=AB:AE teorema della secante e della tangente

AF:AB=AB:AE AD e AF raggi della stessa circonferenza

AB:AF=AE:AB proprietà dell'invertire

(AB_AF):AF=(AE_AB):AB proprietà dello scomporre

AF=AD raggi della stessa circonferenza

AB=2BM=DE

→AE=AD+DE=AF+AB

AB_AF=BF

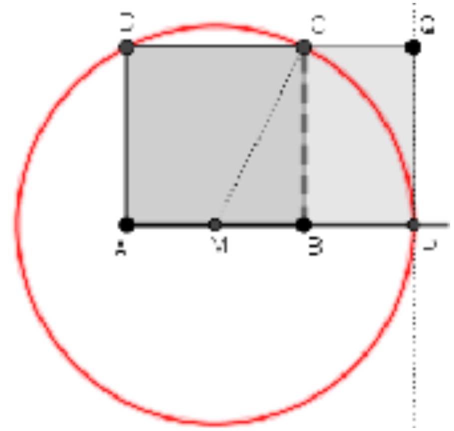
→BF:AF=(AB+AF_AB):AB...

......→BF:AF=AF:AB...

Riccardo – 3a AS

Gruppo composto da: Riccardo, Greta, Alice, Matteo, Riccardo

Il rettangolo aureo – Lezione 3 **Data** ___



Definizione

Si chiama *rettangolo aureo* un rettangolo in cui un lato è la sezione aurea dell'altro

Attività 4

- Utilizzare il software GeoGebra per costruire il rettangolo aureo, secondo la seguente procedura:
- Dato il segmento *AB*, sia *M* il suo punto medio.
- Costruire il quadrato di lato *AB*.
- Costruire la circonferenza di centro *M* e passante per il vertice *C*.
- Sia *P* il punto di intersezione tra la circonferenza e il prolungamento del segmento *AB*.
- Costruire il rettangolo *APQD* di lati *AP* e *AD*.
- Verificare sulla costruzione eseguita che *APQD* è un rettangolo aureo.

Se APQD è aureo, allora QP è sezione aurea di AP. Quindi abbiamo idealmente sovrapposto il segmento QP al segmento AP in modo tale che Q coincidesse con A. Essendo QP = AB, abbiamo calcolato AP/QP e QP/BP e verificato che i rapporti fossero uguali.

- Dimostrare che il rettangolo *APQD* è un rettangolo aureo.

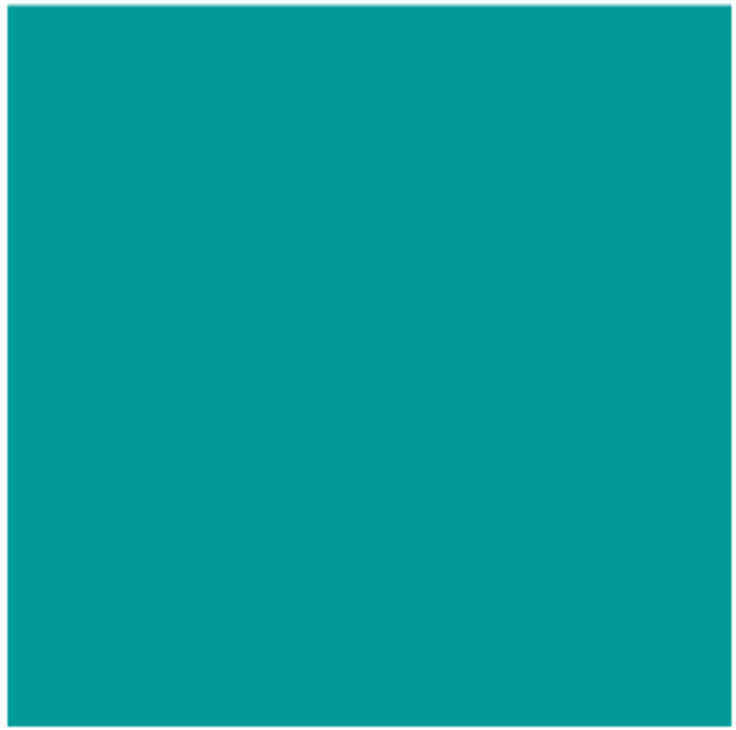
Tesi: AP:QP = QP:PB

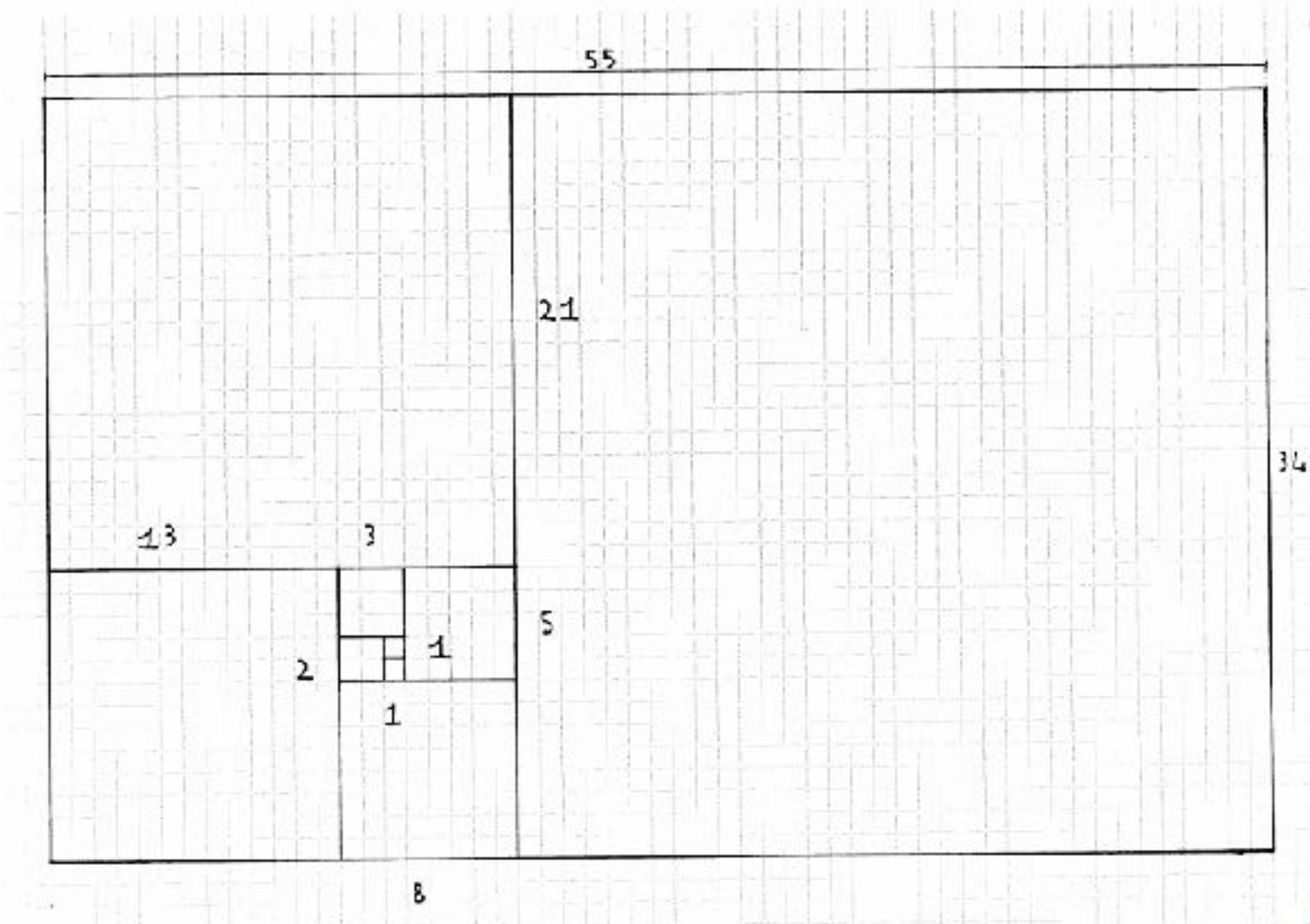
QD:QP = QP:QC **(teorema della secante e della tangente)**

CQ = BP lati opposti del rettangolo BCQP QD = AP lati del quadrato ABCD allora AP:QP = QP:PB

cvd

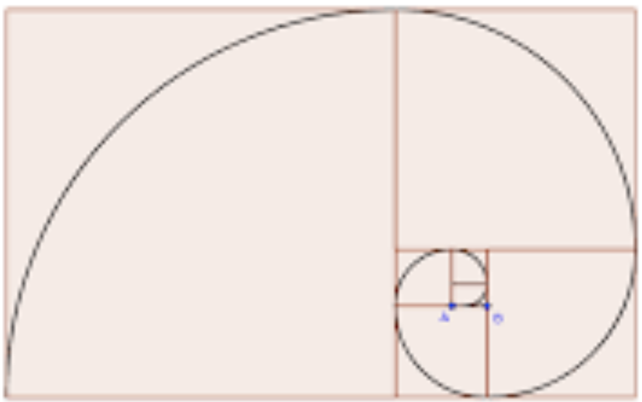
SEZIONE AUREA DA UN QUADRATO



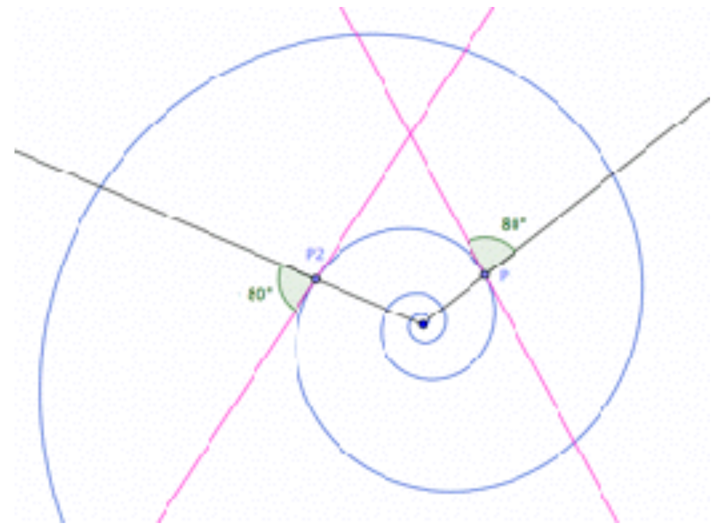


Yong – 3a AS

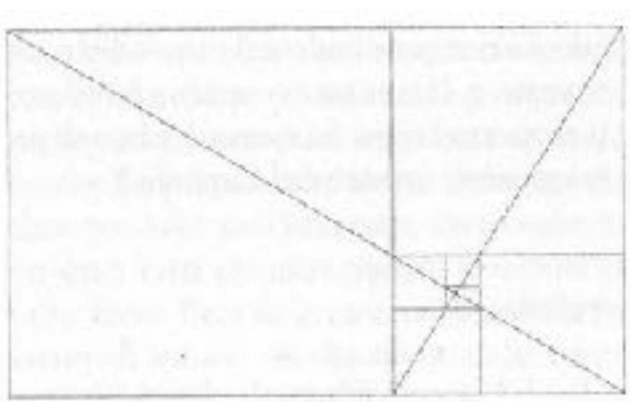
Spirale aurea



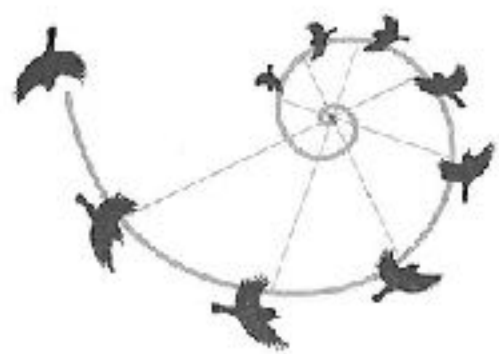
Spirale logaritmica



Occhio di Dio



Il falcone pellegrino



Estratto da scheda 7

[…]

Si vuole ora risolvere il problema di dare un’approssimazione di Φ.

A tale scopo si consideri la successione dei rapporti dei numeri di Fibonacci: a partire da tale successione è stato messo in evidenza che il rapporto tra un termine e il precedente tende ad approssimare un numero che possiamo dire, adesso, essere il numero aureo Φ. Per conferire rigore a tale affermazione è necessario fornirne una dimostrazione.

Per dare un’idea, si procederà con un utilizzo un po’ spregiudicato del calcolo di limiti.

- Si ponga . Poiché si ragiona ‘al limite’, cioè per valori di n molto grandi, si può affermare che . Sulla base di tale osservazione e della definizione ricorsiva della successione di Fibonacci si dimostri che $L=\Phi$

  ………………………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………………

Pertanto, per ottenere una buona approssimazione del numero irrazionale Φ si può utilizzare la convergenza del rapporto . Più alto sarà l'indice n scelto, più elevato sarà il grado di approssimazione.

<u>Attività 15</u> *(a gruppi)*

- Partendo dall'equazione che genera Φ determinare la frazione continua che lo rappresenta

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

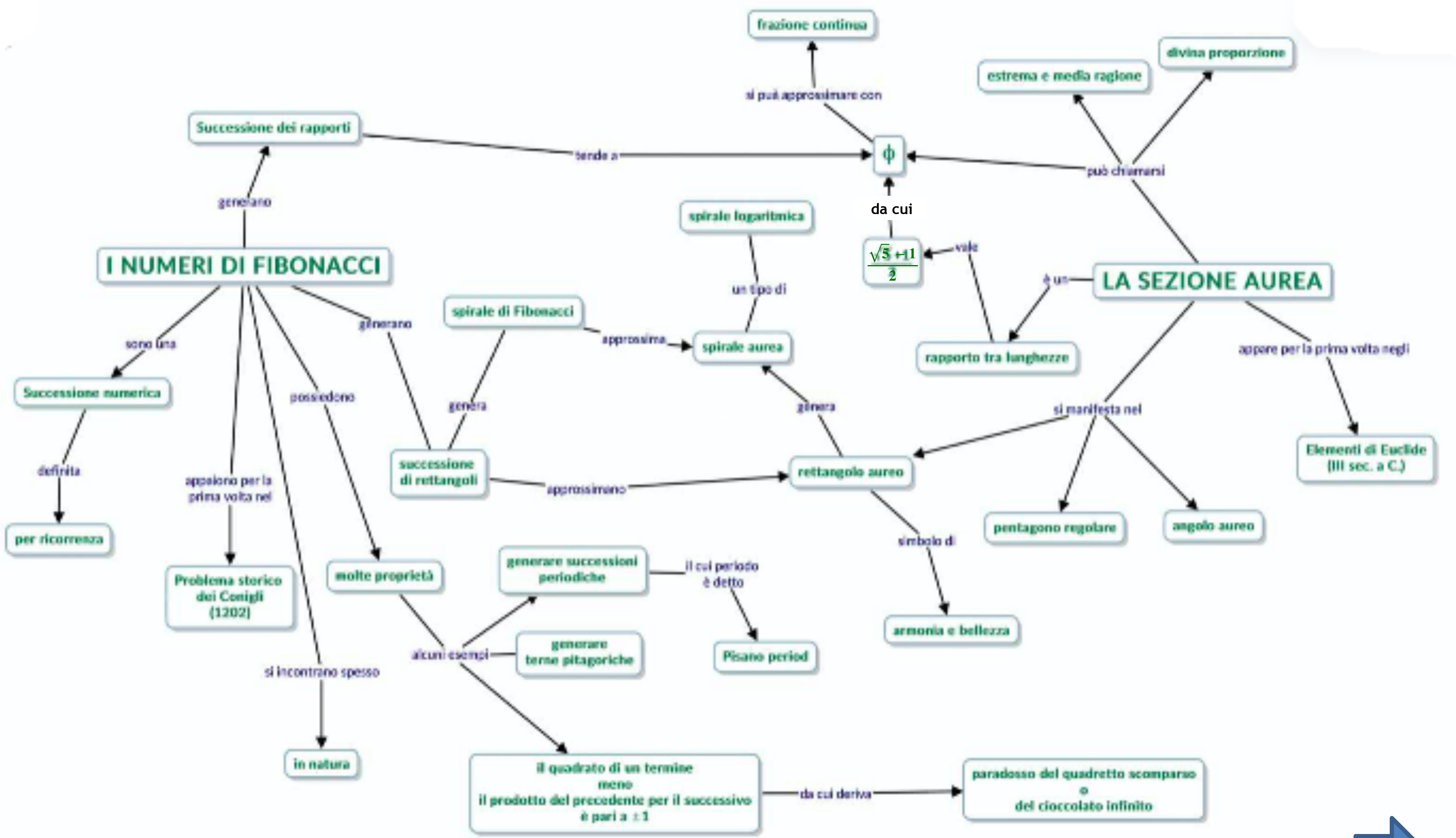
- Completare la tabella con le frazioni che si ottengono troncando la frazione continua che rappresenta Φ a diversi livelli di approssimazione

Profondità	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Frazione										

- Quali considerazioni si possono fare sulle frazioni ottenute?

....

La frazione continua che rappresenta Φ risulta essere la frazione continua più semplice, perché formata tutta da 1. Ma cosa significa esattamente in termini di calcolo? Si consideri una frazione continua generica, che si fermi solo al secondo coefficiente, cioè a_1: $a=a_0+1/a_1$. Ovviamente, a_0 è un numero intero, mentre il grado di approssimazione è fornito dal rimanente $1/a_1$. È intuitivo che maggiore è a_1 migliore è l'approssimazione. Pertanto, il grado di approssimazione più grossolano si ha se a_1 è il numero intero non nullo più piccolo, cioè 1. Ne segue che il numero con l'approssimazione più imprecisa, cioè quello più difficile da approssimare è quello la cui frazione continua è composta unicamente da 1, cioè Φ, che per tale ragione viene chiamato il numero più irrazionale, o anche l'ultimo numero irrazionale



I NUMERI DI FIBONACCI
LA SEZIONE AUREA
frazione continua
si può approssimare con
divina proporzione
estrema e media ragione
Successione dei rapporti
tende a
ϕ
può chiamarsi
generano
da cui
spirale logaritmica
$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
vale
un tipo di
è un
spirale di Fibonacci
approssima
spirale aurea
rapporto tra lunghezze
generano
sono una
appare per la prima volta negli
Successione numerica
possiedono
genera
genera
si manifesta nel
definita
appaiono per la prima volta nel
successione di rettangoli
approssimano
rettangolo aureo
Elementi di Euclide (III sec. a C.)
per ricorrenza
pentagono regolare
angolo aureo
simbolo di
Problema storico dei Conigli (1202)
molte proprietà
generare successioni periodiche
il cui periodo è detto
armonia e bellezza
alcuni esempi
generare terne pitagoriche
Pisano period
si incontrano spesso
in natura
il quadrato di un termine meno il prodotto del precedente per il successivo è pari a ±1
da cui deriva
paradosso del quadretto scomparso o del cioccolato infinito

Liceo Galilei - Legnano

CLASSE 3AS - Anno 2020/2021

SEZIONE AUREA

Poesia e versi aurei>>>
(Emma e Giulia)

Fotografia e Cinema >>>
(Matteo - Tommaso)

Grafica e Design >>>
(Yong Yao e Matteo)

Musica >>>
(Lorenzo - Pietro)

Architettura (450aC-1300dC) >>>
(Alice - Omar)

Architettura (1400-1500) >>>
(Alberto - Nicolò - Matilda)

Architettura (1600- 2000) >>>
(Denny - Federico)

Scultura >>>
(Matteo - Riccardo)

Pittura (1400) **>>>**
(Andrea - Giacomo - Riccardo)

Pittura (1500) **>>>**
(Alberto - Leonardo)

Leonardo da Vinci >>>
(Ludovica - Sofia)

Pittura (1800-1900) **>>>**
(Angela - Greta - Cecilia)

Liceo Statale Scientifico - Classico - Linguistico
GALILEO GALILEI
- Legnano -

LA SEZIONE AUREA E LA MUSICA

LICEO
GALILEO GALILEI
A.S. 2020/2021

Pietro e Lorenzo

CLASSE 3AS

LA SEZIONE AUREA

INDICE

LA SEZIONE AUREA

PROPRIETÀ MATEMATICHE φ

La sezione aurea è oggetto di interessanti proprietà matematiche:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887498948482...$$

La sezione aurea è un numero irrazionale (come **π** oppure **e**) e pertanto ha un numero infinito di cifre.

$$\phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$$

Essendo che φ può essere ottenuto come soluzione dell'equazione $x^2 = x + 1$, ricaviamo che $\phi^2 = \phi + 1$.
Moltiplicando per ϕ^{n-2} ambo i membri otteniamo che $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$$

La frazione continua di φ è della forma [1;1,1,1,1,...], ed è per questo che φ è anche definito come ***"il numero più irrazionale"***.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi$$

La **Successione di Fibonacci** è una successione di interi dove ogni termine è somma dei due precedenti.
Più un termine è grande, più il rapporto con il termine precedente si avvicina a **φ**.

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$$

La sezione aurea può anche essere espressa nel seguente modo. Infatti, elevando alla seconda ambo i membri otteniamo che $\phi^2 = \phi + 1$.

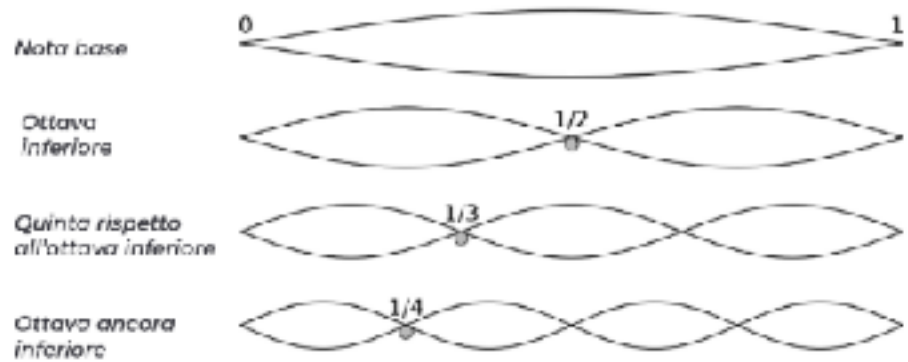
LA SEZIONE AUREA

LA PIÙ MATEMATICA DELLE ARTI

La sezione aurea appare dappertutto in natura, dal numero di petali dei fiori, al modo in cui i rami degli alberi si sviluppano fino alla forma dei gusci delle conchiglie e alle traiettorie di volo degli uccelli.

É quindi inevitabile che la sezione aurea non sia presente anche in musica, la più matematica delle arti.

La scuola pitagorica, per prima, scoprì lo stretto rapporto tra musica e matematica, trovando una relazione tra i diversi toni di una scala e la suddivisione di una corda secondo rapporti tra numeri interi.
Data una corda che emette un determinato tono, dimezzando la sua lunghezza essa emetterà un tono di un'ottava superiore, dividendola in 3 parti emetterà la quinta superiore e così via...



Con il cambiare della lunghezza della corda, varia anche la frequenza e quindi la nota suonata.

LA SEZIONE AUREA

MOMENTO PHI

Il *Momento Phi* è forse tra le correlazioni più interessanti tra la matematica e la sezione aurea.

Un momento phi è presente in un brano qualora, dividendo il brano stesso secondo la proporzione aurea, è possibile trovarne il climax in quel punto. Questa caratteristica è propria di un numero sorprendente di brani, da composizioni classiche a canzoni moderne.

Questo fenomeno però si verifica quasi sempre involontariamente, ed è pertanto a causa della natura elegante della sezione aurea che il momento phi è proprio di così tanti brani.

Uno dei tanti esempi è Liebesleid, brano composto da Fritz Kreisler per violino e pianoforte.
Il brano dura in in tutto 265 secondi e il climax si trova dopo 164. Il brano contiene pertanto il momento phi, infatti:

$$265/\varphi \approx 164$$

Liebesleid eseguito da **Lorenzo**

1.6180339887498948482045868343656381177203091798

Momento Phi di Liebesleid,
Fritz Kreisler

CLAUDE DEBUSSY

LA MER

Nel brano per orchestra *La Mer* di Claude Debussy, troviamo che l'introduzione lunga 55 battute può essere divisa in 5 sezioni rispettivamente lunghe 21, 8, 8, 5 e 13 battute. La presenza della sequenza di Fibonacci non è però una mera coincidenza, e Debussy stesso, in una lettera del 1903 indirizzata ad un critico di musica, lo sottolinea:
"Vedi...c'è una battuta mancante, errore mio, non è nel manoscritto. Tuttavia è necessaria riguardo al numero, il numero divino."
Questo non è però un caso isolato: la matematica è infatti una costante nelle sue opere, tanto che arriva a definire la musica come «una misteriosa matematica che partecipa all'infinito e che presiede al moto delle acque e al gioco delle curve descritte dalle brezze mutevoli».

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO UNIVERSITÀ DI TORINO

Liceo Statale Scientifico - Classico - Linguistico
GALILEO GALILEI
- Legnano -

SSPM

BÉLA BARTÒK

MUSICA PER ARCHI, PERCUSSIONI E CELESTA

φ

Béla Bartòk, compositore e pianista Ungherese del ventesimo secolo, scrisse numerosi brani per pianoforte e orchestra.

Una di queste composizioni è ***"Musica per archi percussioni e celesta"***. Questo brano è lungo **89** battute, di cui **21** sono di introduzione, il climax si trova alla battuta numero **55**, il che, con le **34** battute finali, ci da 4 termini consecutivi della successione di Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Il brano inoltre presenta, nell'apertura del terzo movimento, lo xilofono segue uno schema ritmico identico alla sequenza di Fibonacci:

1:1:2:3:5:8:5:3:2:1:1

Bartòk era infatti noto per inserire relazioni matematiche all'interno dei suoi brani e questo non è che uno dei tantissimi esempi.

Liceo Galilei - Legnano

MATTEO, TOMMASO
Classe 3AS

SEZIONE AUREA

LA SEZIONE AUREA
NELLA COMPOSIZIONE FOTOGRAFICA E NEL CINEMA

Anno Scolastico 2020 - 2021

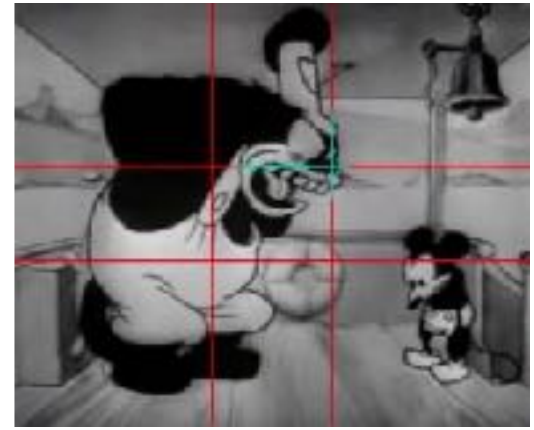
In fotografia

Henri Cartier-Bresson, Marseille 1932

La regola dei terzi
In fotografia…

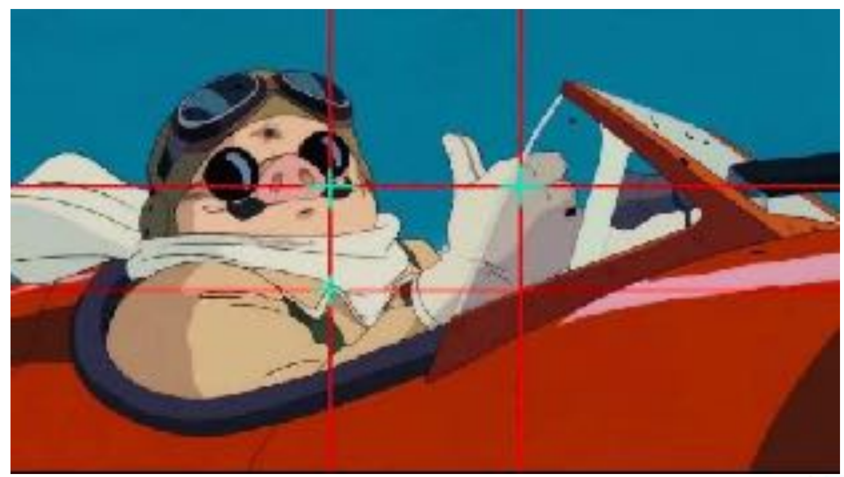
- Come si vede in questa immagine, il cielo, gli alberi e le costruzioni vengono divisi dalle linee di forza ed armonizzano al meglio l’intero scatto. Inoltre le varie aree createsi all’interno delle intersezioni tra le linee di forza non sono uniformi ed è quindi dimostrato che il fotografo ha utilizzato proprio questo metodo per il suo scatto.

La regola dei terzi
… e nel cinema



Steamboat Willie
(anni 30, Walt Disney)

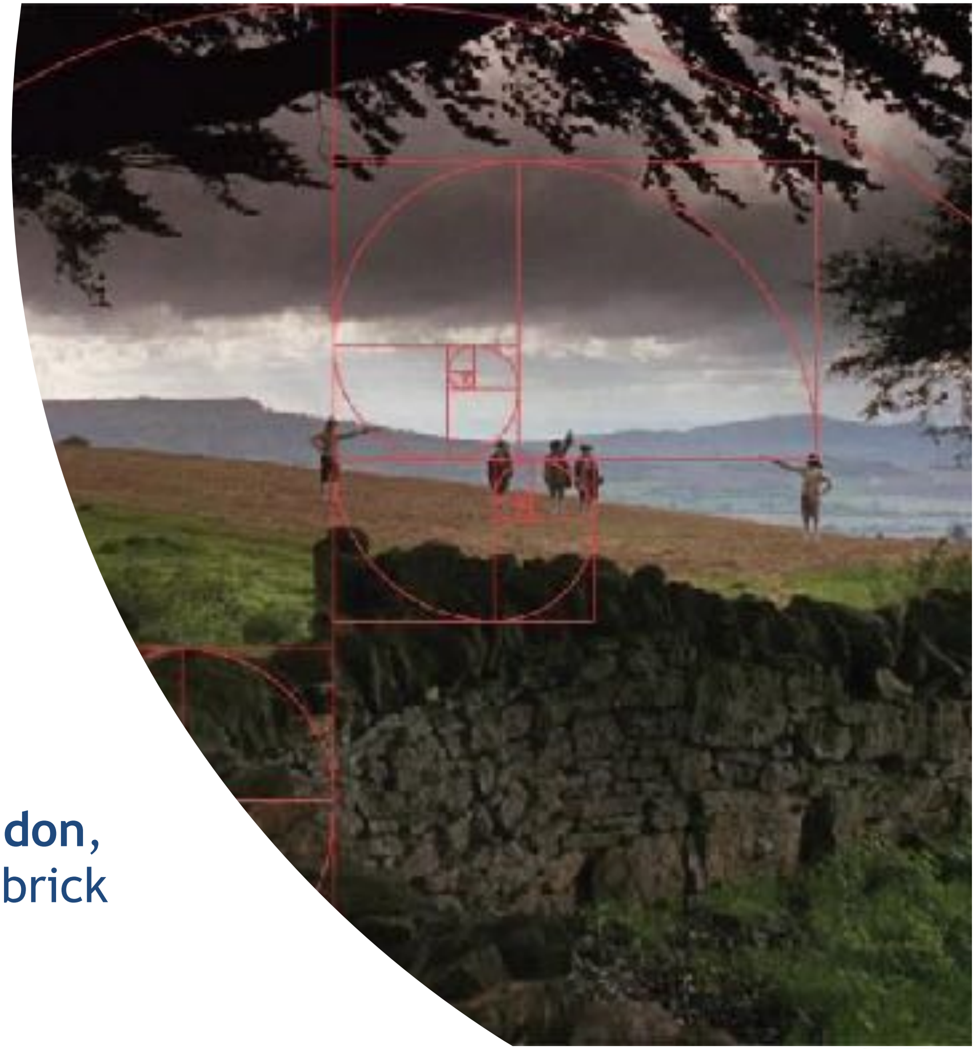
Neon Genesis Evangelion
(1995, Hideaki Anno)



Porco Rosso (1992, Hayao Miyazaki)

Spirale aurea
In fotografia…

Spirale aurea
… e nel cinema



Scena iniziale di **Barry Lyndon**,
film del 1975 di Stanley Kubrick

GRAZIE!

Bibliografia - Sitografia

- Bergamini, Barozzi – Matematica multimediale.blu - Zanichelli
- Mario Livio – La sezione aurea – BUR Rizzoli
- Marco Iosa – Il numero meraviglioso: la sezione aurea – Tangram Edizioni Scientifiche
- Morris Kline – Storia del pensiero matematico – Einaudi
- https://www.treccaniscuola.it/
- http://www.ch.unich.it/progettistisidiventa/lavori-studenti/Bastioni_Aurea.pdf
- https://www.youtube.com/channel/UCXWF_gKgyUXVSK3t35SdjFA (Didattica della Matematica Ornella Robutti)
- https://liceomatematicomajorana.com/percorso-la-sezione-aurea/
- https://www.mat.uniroma1.it/sites/default/files/PLINIOSENIORE-Poligoni%20AureiFibonacci-parte1.pdf

INDICE DELLE SCHEDE PROPOSTE

1. **Numeri di Fibonacci**: determinazione a partire dal problema dei conigli; successione dei rapporti dei termini della successione di Fibonacci
2. **La sezione aurea**: definizione, costruzione con GeoGebra e dimostrazione sintetica
3. **Il rettangolo aureo**: definizione, costruzione con GeoGebra e dimostrazione sintetica
4. **Il rettangolo aureo con la piegatura della carta:** verifica e dimostrazione sintetica
5. **Successione di rettangoli aurei**: costruzione di un rettangolo aureo con somma e/o sottrazione di un quadrato; costruzione di una successione di rettangoli aurei (utilizzo di carta e penna)

INDICE DELLE SCHEDE PROPOSTE

6. **La spirale aurea**: costruzione con GeoGebra; digressione sulle spirali
7. **Il rapporto aureo**: calcolo di sezione aurea e rapporto aureo; proprietà del rapporto aureo e relazione con la successione di Fibonacci; prima approssimazione del rapporto aureo come limite del rapporto di termini successivi della successione di Fibonacci
8. **Approssimazione del numero aureo**: le frazioni continue; approssimazione di un numero irrazionale; il rapporto aureo è «il numero più irrazionale»