

Matematica e insegnamento interdisciplinare

Enrico Rogora

25 Gennaio 2022

Sommario

Questo è il primo seminario della serie organizzata dalla giunta del gruppo UMI “Licei Matematici”. La scelta dell’argomento, Matematica e Interdisciplinarietà, ha trovato tutti i membri della giunta immediatamente d’accordo: l’interdisciplinarietà è uno dei pilastri del nostro progetto, cfr. [7, 8, 9]. Il testo accompagna le slide che si possono scaricare [QUI](#).

Indice

1	Introduzione	3
2	Matematica, democrazia, filosofia, rivoluzione scientifica	3
3	Matematica, scienza e società	4
4	Cinque laboratori “globalmente” interdisciplinari	5
5	Insegnamento interdisciplinare	5
6	Similitudine	6
6.1	Le curve stabili	6
6.2	I laboratori globali interdisciplinari	7
7	Dialoghi scritti condivisi	7
8	Laboratori Globalmente Interdisciplinari	7

9	Educare lo sguardo	9
9.1	La stella di Lloyd	10
9.2	Osservazione di un quadro	10
9.3	Osservazione di una configurazione geometrica	10
9.4	Primo sguardo	11
9.5	La matematica di un'opera d'arte	12
9.6	Visita a una galleria d'arte	12
10	Argomentare e dimostrare	12
10.1	Carattere rituale della matematica vedica.	13
10.2	Carattere applicativo della matematica babilonese.	13
10.3	Le forme del confronto democratico.	13
10.4	Carattere argomentativo della matematica greca.	14
10.5	Riflessioni intorno alle molte dimostrazioni del teorema di Pitagora.	14
10.6	Agorà matematica.	15
10.7	Organizzazione del Primo Libro degli Elementi di Euclide.	15
10.8	Confronto matematico	15
10.9	Perché dimostrare?	15
11	Uso dei dialoghi scritti condivisi nei GIL.	15
12	Dialogo introduttivo al quinto incontro	16
13	Le attività del quinto incontro	18
14	Dialogo didattico relativo al quinto incontro	19
15	Difficoltà di un insegnamento interdisciplinare	21
16	Sguardo interdisciplinare	21
16.1	Metafora dello sguardo interdisciplinare	21
17	Insegnamento della matematico come limite di un insegnamento interdisciplinare	22
18	Ringraziamenti	22
19	Dibattito	23

1 Introduzione

Quando preparo un seminario, dedico sempre una particolare attenzione alla costruzione della cornice della prima slide. In questo caso ho scelto di sintetizzare le caratteristiche dei cinque laboratori interdisciplinari che sto costruendo insieme alle insegnanti e agli insegnanti e alle classi coinvolte, impiegando la metodologia di cui voglio parlarvi in questo incontro.

Parlerò in particolare del laboratorio *Argomentare e Dimostrare, tra Filosofia e Matematica*, cui si riferisce la prima coppia di immagini della cornice, quelle che raffigurano una statua di Platone (Filosofia) e una statua di Euclide (Matematica). Le altre coppie: (Escher, Coxeter), (Aristotele, Galileo), (Bruno De Finetti, Mario Draghi), (Edward Lorenz, Vanessa Nakate) rappresentano, analogamente, i poli della dialettica interdisciplinare degli altri laboratori: tra Matematica e {Arte, Scienza, Politica, Economia}

Quando ero studente al liceo, ero interessato alla filosofia della scienza e ai rapporti tra scienza e società. I miei insegnanti non hanno mai approfondito questi argomenti in classe per mancanza di tempo e di preparazione. La situazione oggi non mi sembra, in generale, molto diversa. Questo carenza nell'insegnamento crea, a mio avviso, un grave problema sociale, vista l'importanza diretta e indiretta della scienza nella vita di ogni giorno.

Le sperimentazioni nelle quali siamo impegnati nell'ambito del progetto sui Licei Matematici permettono di trovare spazio alla programmazione di attività che affrontino questo genere di problematiche, che hanno un forte carattere interdisciplinare.

Purtroppo l'insegnamento universitario NON promuove una formazione interdisciplinare degli insegnanti. Una vecchia idea di Guido Castelnuovo, che suggeriva di ampliare lo spazio dedicato alla formazione dei futuri insegnanti a un *insegnamento disciplinare estensivo*, cioè un insegnamento che privilegi i collegamenti rispetto agli approfondimenti, mi sembra ancora attuale e degno di essere perseguito per ampliare la sensibilità interdisciplinare dell'insegnante di matematica. Ma non parlerò di questo perché ne ho già parlato altrove [3, 4, 6].

2 Matematica, democrazia, filosofia, rivoluzione scientifica

Immagine della diapositiva: Raffaello Sanzio, Scuola di Atene

La ragione prima dei percorsi interdisciplinari di cui vi voglio parlare è *Culturale*. Mirano a trattare temi culturalmente fondamentali ma trascurati nelle nostre scuole quali:

- il ruolo della matematica nella cultura occidentale;
- le radici comuni di filosofia, democrazia, matematica argomentativa e “scienza” (o meglio “scienze”);
- il pensiero probabilistico e il suo ruolo nelle decisioni razionali;
- i caratteri distintivi della rivoluzione scientifica e il suo impatto politico e sociale;
- il carattere, i limiti e l’importanza delle previsioni scientifiche.

3 Matematica, scienza e società

Immagine della diapositiva: Mario Sironi, L’Italia tra le Arti e le Scienze

La ragione seconda, come ho già accennato, è di carattere sociale.

Ritengo importante per la Società assegnare alla scuola il compito di approfondire i collegamenti tra le diverse aree del sapere, per lottare contro la pericolosa deriva dello “specialismo” di cui scriveva, quasi cento anni fa, il filosofo e sociologo spagnolo José Ortega y Gasset:

ORTEGA Y GASSET, 1932

*Nelle epoche passate, gli uomini si potevano semplicemente suddividere tra ignoranti e istruiti, quelli che più o meno appartenevano ad una classe e quelli che più o meno appartenevano all’altra. Ma l’odierno specialista non può essere incluso in nessuna delle due categorie. Non è istruito perché è formalmente ignorante in tutto ciò che non è parte della sua specializzazione; ma non è neppure ignorante, perché è uno specialista che conosce molto bene la sua minuscola porzione di universo. Diremo che è un ignorante specializzato (*learned ignoramus*), e costituisce un bel problema, in quanto è una persona ignorante, che non veste i panni dell’ignoranza ma quelli della petulanza di chi è specialista nella sua ristretta linea di ricerca.*

4 Cinque laboratori “globalmente” interdisciplinari

Ogni riga della tabella delle figure che compaiono nella quarta diapositiva è tratta dall'intestazione delle presentazioni dei percorsi, che faccio all'inizio dell'anno nelle scuole che desiderano attivare i laboratori, oppure nei laboratori organizzati nell'ambito del progetto *Con la mente e con le mani* dell'Accademia dei Lincei. I laboratori sono:

- Educare lo sguardo: matematica e arte.
- Argomentare e dimostrare: matematica e filosofia.
- Governare l'incertezza: matematica e politica.
- Sollevare lo sguardo: matematica e scienza.
- Analizzare i cambiamenti climatici: matematica e economia.

5 Insegnamento interdisciplinare

La modalità di lavoro utilizzata nella progettazione e nella realizzazione dei percorsi è quella del *laboratorio globalmente interdisciplinare (GIL)* ([8]) che ho adottato fin dal primo laboratorio e che ho sviluppato anche attraverso il confronto con il gruppo IREM di Lille, coordinato da Valerio Vassallo e con il gruppo di ricerca in didattica della matematica dell'Università di Salerno, coordinato da Saverio Tortoriello.

Caratteristica di questi laboratori è il coinvolgimento di insegnanti di diverse materie nella fase di progettazione e di sperimentazione e la copresenza in classe nella fase di realizzazione (punto sostanziale ma di difficile realizzazione, specialmente negli ultimi due anni).

Nell'immagine della diapositiva, tratta da [8], ho cercato di mettere in evidenza la differenza tra: un insegnamento disciplinare, caratterizzato da un insegnante e la sua classe; multidisciplinare, caratterizzato da un coordinamento tra gli insegnamenti e interdisciplinare, caratterizzato da più insegnanti in copresenza in classe.

Nel lavoro con Saverio Tortoriello [8], abbiamo qualificato con l'aggettivo *globale*, un laboratorio interdisciplinare l'interazione tra gli attori (insegnanti

e studenti) del processo educativo (insegnamento e apprendimento) sia *completa*. Con questo intendiamo che in un Laboratorio Globalmente Interdisciplinare (GIL), gli studenti e gli insegnanti scambiano i ruoli in maniera naturale e continua collaborando nel processo di apprendimento/insegnamento. Usando le parole del pedagogista brasiliano Paulo Freire

Fin dall'inizio del processo di insegnamento, è necessario che diventi più e più evidente un fatto: nonostante la differenza tra insegnante e studente, l'insegnante apprende e continua ad apprendere nell'atto stesso di insegnare, mentre lo studente apprende e, nello stesso momento diviene insegnante (...). Non esiste insegnamento senza apprendimento.

La progettazione delle attività dei laboratori, mira ad esporre in maniera esplicita la dialettica tra insegnamento e apprendimento cui fa riferimento Freire, creando un ambiente e delle attività che riteniamo particolarmente favorevole a questo scopo

6 Similitudine

Voglio usare una *similitudine* per sottolineare l'importanza dell'idea che la relazione tra insegnanti e gli studenti in un laboratorio sia *completa*.

La similitudine usa parole tratta da una teoria matematica, quella dello spazio dei moduli delle curve.

“i laboratori globalmente interdisciplinari sono come le curve stabili”

6.1 Le curve stabili

Per spiegare la similitudine, uso le parole di un bell'articolo di Lucia Caporaso, in cui introduce la metafora del puzzle per dare l'idea di spazio dei moduli.

Cosa significa che uno spazio di moduli non è completo? Il puzzle della nostra metafora, una volta finito, ha delle lacune: è come se le tessere a nostra disposizione, ossia tutte le curve astratte, non permettano di arrivare ad un'immagine completa. E per di più le lacune sono strutturali: le tessere sono fatte in modo da generare un puzzle incompleto. Se il nostro puzzle rappresentasse una carta geografica, è come se mancassero mari, laghi e fiumi perché le tessere sono prive delle tonalità del blu.

Le curve stabili sono le tessere necessario per [completare](#) lo spazio dei moduli.¹

6.2 I laboratori globali interdisciplinari

Come le curve stabili sono le tessere *necessarie* per completare lo spazio di moduli, i laboratori globali interdisciplinari sono tessere *utili* per [completare](#) la rete di relazioni sociali necessaria a favorire i processi di apprendimento e di insegnamento, in particolare quelli della matematica.

Torneremo su questa similitudine, che può apparire forzata e gratuita a questo punto del discorso.

7 Dialoghi scritti condivisi

Al fine di costruire le relazioni di cui ho appena detto, quali strumenti utilizzare?

Il dialogo, naturalmente, ma credo che sia particolarmente efficace una forma particolare di dialogo, il *dialogo scritto condiviso*.

Dallo scorso anno ho scelto di impiegare sistematicamente una metodologia basata sulla costruzione di dialoghi scritti, come strumento fondamentale dei laboratori globalmente interdisciplinari.

Gli insegnanti sono invitati a partecipare attivamente alla costruzione di questi dialoghi, nei modi e con i risultati che vedremo più avanti.

Il lavoro di ricerca sulla costruzione e l'uso dei dialoghi scritti condivisi è svolto in collaborazione con Francesco Bologna, dottorando in Matematica presso la Sapienza, ed è parte della sua tesi di dottorato.

Una sperimentazione in una classe di studenti universitari è stata fatta in collaborazione con Agnese Del Zozzo, dottoranda in Matematica presso l'università di Trento, nell'ambito del corso di Storia della Fisica e della Matematica di Claudio Fontanari.

8 Laboratori Globalmente Interdisciplinari

Vorrei, nella restante parte restante del seminario, dare una descrizione più concreta dei laboratori, cominciando dalla loro struttura generale.

¹L'articolo di Lucia Caporaso da cui è tratta la metafora che spiega la nostra similitudine sarà presto disponibile su *Linea Matematica*, nuova rivista *Interdisciplinare di Matematica e ...* online, gratuita, dedicata a insegnanti, ricercatori e studenti.

Per la partecipazione a un laboratorio globalmente interdisciplinare chiediamo che le insegnanti e gli insegnanti siano disponibili a sperimentare il laboratorio in una almeno delle proprie classi e chiediamo che per ogni classe in cui verrà sperimentato il laboratorio partecipi, oltre all'insegnante di matematica, almeno un o una insegnante di un'altra materia.

Ogni laboratorio si costruisce intorno ad un percorso già sperimentato l'anno precedente² ma ogni *unità di insegnamento* (gruppo di docenti associato a una classe) può modificarlo a proprio piacimento quando lo porta nella sua classe. L'unico vincolo è che i materiali prodotti dalle insegnanti, dagli insegnanti, dalle studentesse e dagli studenti siano accessibili a tutti i partecipanti e che ci sia disponibilità a discutere e a confrontare le proprie scelte con quelle adottate nelle altre unità di insegnamento, anche partecipando alla costruzione dei *dialoghi scritti condivisi*.

Ogni laboratorio è stato inizialmente concepito per un anno preciso del percorso di studi, ma il contenuto non si adatta mai perfettamente ai contenuti curricolari, anzi in alcuni casi è decisamente trasversale. Si può quindi adattare il laboratorio in base alle esigenze delle classi e anche spalmare un laboratorio su più anni.

Titolo	Classe	Disciplina associata
Educare lo sguardo	Prima	Arte
Argomentare e dimostrare	Seconda	Filosofia
Governare l'incertezza	Terza	Italiano
Sollevare lo sguardo	Quarta	Latino
Analizzare i cambiamenti climatici	Quinta	Scienze

Ogni laboratorio ha un collegamento naturale con una materia, ma non è necessario che l'insegnante non matematico sia di quella materia.

Nella diapositiva è rappresentato schematicamente il ciclo di vita annuale di un laboratorio.

La figura in alto a sinistra è il *Logo* dei Laboratori Globalmente Interdisciplinari, creato da Francesco a partire dalle immagini che mostravano la differenza tra insegnamento intensivo e insegnamento estensivo, cfr.[3, 4]. Lo dico, per ribadire il mio debito ideale con Guido Castelnuovo, Emma Castelnuovo e Federigo Enriques.

²Escluso il percorso *Sollevare lo sguardo* che non è mai stato sperimentato, né a scuola né all'Accademia dei Lincei, ma soltanto progettato nella tesi di laurea di Eugenio Carretta.

9 Educare lo sguardo

Il laboratorio, *Educare lo sguardo*, si è mostrato particolarmente efficace per costruire le relazioni tra insegnanti – studenti su cui innestare gli altri percorsi. Non ho avuto la possibilità di validare le ipotesi sulle ragioni dell’efficacia specifica di questo percorso, per le solite ragioni sanitarie, ma questo resta a mio avviso un tema di ricerca interessante.

Il laboratorio si sviluppa intorno al tema *dell’educazione allo sguardo*. Per inquadrare l’importanza del tema, voglio leggere uno stralcio di uno scritto di Guido Castelnuovo del 1910 [2], in cui riflette sull’importanza di coltivare lo spirito d’osservazione:

Occorre precisare quali attitudini convenga specialmente risvegliare e coltivare negli allievi, e quali insegnamenti siano più efficaci per raggiungere la meta. Nel campo intellettuale le qualità che meglio valgono a distinguere l’uomo elevato dalla mediocrità sono la fantasia creatrice e lo spirito di osservazione, che forniscono gli elementi ad ogni opera d’arte e di scienza, [e] le facoltà logiche.

(...)

[Lo studio dei capolavori artistici] gioverà a perfezionare una qualità a cui attribuisco un valore grandissimo: lo spirito di osservazione. In ciò il professore di materie letterarie o artistiche potrà aiutare i colleghi di scienze naturali e di fisica, ai quali particolarmente è affidato questo nobile intento.

Le attività che proponiamo, mirate a “educare lo sguardo” per perfezionare lo spirito di osservazione, cercano di valorizzare per questo fine la collaborazione interdisciplinare. In sintesi, il laboratorio propone attività di osservazione “trasversale” di opere d’arte e di configurazioni geometriche³.

Nelle attività sulle opere d’arte previste in questo laboratorio, educare lo sguardo significa, allenarsi a ricercare particolari significativi in un quadro, cioè particolari che, da soli o in relazione con altri, aiutino a interpretare il significato di un quadro e ad apprezzarne la visione, trasformandolo in un *oggetto culturale*.

Nelle attività sulle configurazioni geometriche, significa invece *comprendere la figura* cioè trasformarla in un *oggetto matematico* costruibile con riga e compasso.

³per maggiori dettagli cfr. [8]

Non sto dicendo che interpretare un quadro sia come ricostruire una figura ma che esistono delle analogie tra i due processi e che riflettere e far sperimentare entrambe le attività in un contesto globalmente interdisciplinare aiuta a svilupparle meglio entrambe.

Inizialmente il laboratorio era stato concepito per esplorare l'analogia tra interpretare e dimostrare, ma ci siamo resi che altri aspetti interessanti possono essere stimolati da questo genere di attività:

- la curiosità intellettuale;
- il gusto del confronto delle proprie opinioni;
- la novità di collaborare con i propri insegnanti per risolvere un problema.

Le attività principali del laboratorio sono le seguenti.

9.1 La stella di Lloyd

Per sperimentare la differenza tra guardare e vedere.

9.2 Osservazione di un quadro

Immagine della diapositiva: Nicolas Mingard (1605–1668), Le Jugement de Midas, Palais des beaux arts, Lille

L'osservazione di un quadro è guidata da schede che stimolano la raccolta di elementi e relazioni al fine di costruire in classe un'interpretazione condivisa coerente dell'opera osservata, che viene poi confrontata con quella dell'artista o della critica.

9.3 Osservazione di una configurazione geometrica

L'osservazione è guidata da schede che stimolano la raccolta di elementi e relazioni al fine di ricostruire le figure con riga e compasso (o con GeoGebra) e di affinare il linguaggio per la descrizione di quanto si osserva.

Una delle attività collegate all'osservazione delle figure geometriche è quella del conteggio delle figure del tangram o dello Stomachion. Stimolando la classe a trovarne il maggior numero possibile, si sollecita una discussione sulla definizione di figura, lasciando spazio alle ragazze e ai ragazzi di scegliere autonomamente la propria, prestando solo attenzione alla correttezza del conteggio rispetto alla definizione proposta. A proposito della libertà

che viene lasciata alla classe di scegliere la propria definizione, mi ha colpito l'osservazione di un ragazzo che diceva

Non credevo che nella matematica ci fosse la libertà di fare qualcosa.

9.4 Primo sguardo

Immagine del quadro a destra della diapositiva: *Jacques-Louis David (1748–1825), Belisario chiede l'elemosina, Palais des beaux arts, Lille*

L'attività di *primo sguardo*, parte prima. Si richiede di scrivere: la prima impressione di un quadro; la prima idea per la soluzione di un esercizio o per la dimostrazione di un teorema.

Abbiamo osservato che la prima parte dell'attività risulta più facile quando la richiesta matematica si fa seguire a quella artistica, che ha l'effetto di dare più fiducia alle ragazze e ai ragazzi nella propria capacità di immaginare una soluzione o comunque di suggerire una strada ,senza sapere a priori dove porti.

La seconda parte dell'attività di primo sguardo si ispira ad una frase di Lebesgue, che ritengo molto significativa:

l'unico insegnamento che, a mio avviso, un insegnante può dare, è di pensare di fronte ai suoi allievi.

Ho avuto pochissimi insegnanti/professori di matematica che pensavano davanti a me e li ricordo tutti con gratitudine.

La conclusione dell'attività di primo sguardo mira a esporre il pensiero dell'insegnante,

Primo sguardo – completamento Hard dopo aver raccolto le *prime idee* su un problema, l'insegnante le sviluppa ad una ad una fino ad arrivare alla soluzione, oppure fino a spiegare perché non funziona.

Primo sguardo – completamento Soft dopo aver raccolto le *prime idee* su un problema, l'insegnante le raccoglie, ci riflette a casa e la lezione successiva, in classe, le sviluppa ad una ad una fino ad arrivare alla soluzione, oppure fino a spiegare perché non funziona.

Ho scritto centinaia di pagine per sviluppare le idee delle mie studentesse/dei miei studenti, cercando di cucire i fili delle loro *idee iniziali* e questo lavoro mi ha suggerito l'efficacia del metodo del *dialogo scritto condiviso* (cfr. le sezioni [7](#) e [11](#)).

9.5 La matematica di un'opera d'arte

Non mi dilungo su questo genere di attività, che sono le più conosciute. Hanno comunque il loro utilizzo specifico nell'ultima attività

9.6 Visita a una galleria d'arte

Il percorso si conclude con una visita ad una galleria d'arte in cui l'intero gruppo, classe con i loro insegnanti, viene guidato a una visita/scoperta in una galleria d'arte. Nel periodo pre-covid la visita era organizzata presso la Galleria Corsini oppure la Galleria Barberini a Roma.

Come già ricordato, il laboratorio educare lo sguardo si è rivelato particolarmente efficace per creare un gruppo di docenti che lavorano insieme in classe.

10 Argomentare e dimostrare

Ho cominciato a sviluppare cinque anni fa questo percorso, con insegnanti e classi dei Licei Colonna, De Santis e Galilei di Roma. Si sono poi aggiunti altri licei di Roma, tra cui Nomentano, Astarita, Plinio Seniore, Keplero e Avogadro e quest'anno partecipano anche scuole di Caserta, Novara e Pinerolo, che coinvolgono, in totale, una trentina di insegnanti di matematica e altre discipline.

Dall'anno scorso collabora a questo laboratorio anche il prof. Francesco Bologna, la cui tesi dottorato riguarda la strutturazione definitiva del percorso, la preparazione e la sperimentazione dei materiali didattici, l'uso della metodica del dialogo scritto condiviso.

L'obiettivo del progetto è quello di introdurre la dimostrazione matematica nel contesto interdisciplinare più generale dell'argomentazione, facendo ripercorrere alle classi e ai loro insegnanti, lo stesso percorso storico che ha portato all'affermarsi delle esigenze di argomentare nella società greca del sesto e quinto secolo a.C e allo sviluppo della matematica euclidea.

Il percorso è incentrato sul processo di trasformazione della matematica, dalle sue origini rituali e applicative alla sistemazione assiomatica della geometria euclidea e presta particolare attenzione ai collegamenti con i processi che hanno portato alla nascita e allo sviluppo della filosofia e delle scienze in Grecia.

Questo approccio interdisciplinare vuole facilitare la comprensione del processo attraverso cui si sono formati alcuni dei concetti principali della matematica, in particolare quelli di postulato, assioma, definizione, teorema e dimostrazione, apprezzandone l'importanza e il significato non solo per la

matematica ma per la filosofia, per le scienze e per l'evoluzione dell'intero pensiero occidentale.

Il percorso viene prima sperimentato con gli insegnanti, poi discusso, adattato e trasportato in classe. La possibilità di lavorare con insegnanti di diverse materie permette di osservare il percorso da diverse prospettive, che si completano e si collegano. Per esempio, in una attività di spiccato carattere matematico, le insegnanti e gli insegnanti non di matematica non hanno, come gli studenti, conoscenze disciplinari specifiche ma hanno grande esperienza didattica e un quadro culturale più ampio. Sono quindi in grado di articolare le difficoltà di chi si accosta al percorso con una consapevolezza e una capacità di collegamento ad altre attività che si è rivelata spesso preziosa nella progettazione delle attività e nella loro contestualizzazione.

Il laboratorio si struttura in nove incontri, di cui riassumiamo brevemente i contenuti, riservando un breve approfondimento alle attività del quinto incontro.

10.1 Carattere rituale della matematica vedica.

Origine rituale della matematica: la matematica come linguaggio per esprimere la perfezione e in particolare la costruzione geometrica come simbolo di perfezione e di tramite tra l'uomo e dio.

Attività di ricostruzione di figure geometriche e di progettazione di nuove figure di carattere simbolico.

10.2 Carattere applicativo della matematica babilonese.

Origine pratica della matematica, evoluzione come lento accumularsi di saperi, che ingloba nuovi elementi in base alla funzionalità sociale dei loro contenuti.

Attività di scoperta di algoritmi per la soluzione di problemi numerici attraverso la ricerca di regolarità nell'organizzazione tabellare di dati numerici.

10.3 Le forme del confronto democratico.

La civiltà della parola. L'emergere del confronto democratico nella società greca e il piacere della discussione.

Attività di dibattito argomentativo su tematiche relative ai rapporti tra scienza e società.

10.4 Carattere argomentativo della matematica greca.

Il confronto delle opinioni, la ricerca della verità e la nascita della filosofia.

Collegamento tra filosofia e matematica. Riflessione sull'argomentazione matematica. Sul carattere dialettico del confronto delle idee. Concetti, idee e definizioni.

Attività di lettura del Menone ed esercizi di pratica di argomentazione matematica.

10.5 Riflessioni intorno alle molte dimostrazioni del teorema di Pitagora.

L'incontro è strutturato in maniera da cominciare a focalizzare l'attenzione su tre domande principali:

- Cos'è una dimostrazione matematica?
- Come si dimostra?
- Perché si dimostra?

Non si risponde direttamente a queste domande ma si suggeriscono attività per aumentare la consapevolezza dei partecipanti sul significato delle domande e di forgiare gli strumenti per rispondere.

Si comincia presentando il filmato di cinque “dimostrazioni” del teorema di Pitagora, ognuna delle quali è scelta per mettere in evidenza delle mancanze che aiutino la classe a riconoscere cosa non è una dimostrazione e perché. L'analisi di questi filmati riguarda anche una riflessione sui pregi e i limiti comunicativi degli stessi. Gli aspetti comunicativi sono a nostro avviso di grande importanza nel processo di apprendimento e insegnamento della matematica e ci sembra utile affrontarli con la copresenza degli insegnanti di matematica e di altre materie (in particolare, l'insegnante di lingua e letteratura italiana)

Dopo aver discusso i filmati, si chiede alle studentesse e agli studenti, divisi in piccoli gruppi, di costruire un oggetto in cui riversino, affinandole, le proprie competenze argomentative e comunicative. Si tratta di un filmato in cui viene proposta la loro dimostrazione del teorema di Pitagora, che dovrà essere efficaci, accattivanti, corrette ed esaustive. La costruzione di questa *dimostrazione digitale* porta agli studenti a interrogarsi sul come dimostrare e a confrontare le proprie opinioni a riguardo nell'attività successiva.

10.6 Agorà matematica.

Proponiamo di organizzare un dibattito argomentativo sulle dimostrazioni digitali proposte dagli studenti. La griglia rispetto alla quale valutare le dimostrazioni digitali per arrivare e scegliere quella che rappresenterà la classe si basa sulle discussioni relative ai cinque filmati di prova.

10.7 Organizzazione del Primo Libro degli Elementi di Euclide.

Il piano teorico entro cui giudicare la correttezza e la completezza delle dimostrazioni digitali non è stato ancora ben delineato fino a questo punto del percorso. Lo scopo di questa attività consiste nel mostrare e discutere l'organizzazione logica degli Elementi di Euclide per costruire questo piano, in maniera che non risulti artificiosa, ma ben collegata ai problemi e alle difficoltà incontrate dalla classe nell'attività precedente. Il percorso di esplorazione della struttura degli Elementi usa il software GeoGebra, sviluppando le idee presentate in [1].

10.8 Confronto matematico

Sulla base del piano teorico introdotto nel precedente incontro, si confronta la dimostrazione di Euclide del Teorema di Pitagora con le dimostrazioni digitali degli studenti.

10.9 Perché dimostrare?

L'ultimo tratto del percorso prevede un incontro dibattito finale sul perché dimostrare, durante il quale si dà particolare rilievo al collegamento tra dimostrazione matematica e progettazione scientifica [10] e quindi alla sua necessità nel mondo contemporaneo e al suo valore epistemologico e culturale.

11 Uso dei dialoghi scritti condivisi nei GIL.

Da quest'anno, nel laboratorio globale interdisciplinare Argomentare e Dimostrare, abbiamo iniziato a utilizzare sistematicamente lo strumento del dialogo scritto condiviso, la cui efficacia verrà considerata da Francesco Bologna nella sua tesi di dottorato.

Abbiamo cominciato a preparare i dialoghi per il laboratorio di quest'anno durante la scorsa primavera, sulla base dei materiali raccolti nei laboratori

dello scorso anno e delle esperienze sull'uso dei dialoghi fatte nei corsi di Storia della matematica e di Istituzioni di Matematiche complementari.

Ogni incontro comincia con la lettura di un dialogo, che introduce l'attività. Al termine, si discute l'attività, utilizzando, eventualmente, un secondo dialogo per introdurre gli argomenti da discutere e stimolare la discussione.

Gli insegnanti e le insegnanti sono invitati a intervenire durante la lettura dei dialoghi oppure successivamente attraverso lo strumento delle classi GeoGebra, integrando e modificando i dialoghi con le loro osservazioni, oppure usandoli per porre delle domande o avanzare dei dubbi.

Dopo i feed back raccolti dalle/dagli insegnanti, i dialoghi vengono modificati prima di riutilizzarli l'anno successivo. I dialoghi restano a disposizione degli insegnanti per riutilizzarli in classi, adattandoli per renderli funzionali al loro insegnamento e alle conoscenze delle classi. Non si tratta di semplici annotazioni condivise di un testo, ma del tentativo di ricostruire attraverso i dialoghi un processo dialettico complesso che coinvolge tutti gli attori del laboratorio.

Vediamo un esempio, che riguarda il quinto incontro, dedicato alle molte "dimostrazioni" del teorema di Pitagora, lo snodo cruciale del laboratorio.

Dopo la matematica rituale (primo incontro) e algoritmica (secondo incontro), dopo il dibattito argomentativo (terzo incontro), l'argomentazione filosofica e dopo aver letto e commentato alcuni stralci del Menone, e in particolare il dialogo con lo schiavo sul raddoppio del quadrato (quarto incontro), siamo al punto di rivolgere la nostra attenzione all'emergere delle esigenze argomentative nella matematica greca. Lo faremo seguendo un esempio, che ci guiderà per il resto del laboratorio: la dimostrazione del Teorema di Pitagora.

12 Dialogo introduttivo al quinto incontro

È il dialogo di raccordo con il lavoro sviluppato fino a questo punto. Ci sono tre personaggi. Pitagora, un discepolo matematico e un discepolo non matematico. In nero è riportato il testo preparato in primavera. I contributi e i suggerimenti dagli insegnanti e dalle insegnanti sono riportati in rosso o in blu. Le aggiunte richieste o suggerite dagli insegnanti, in verde.

Primo stralcio (collegamento con le attività precedenti)

Prim* pitagoric* Vi ho raccontato del mio recente viaggio in Oriente? Sono rimast* davvero colpit* dalla precisione, la perfezione, oserei dire, con cui gli indiani costruiscono gli altari.⁴

Pitagora Intendi col disegno di forme perfette, quali la circonferenza, il quadrato, ecc.

Prim* Pitagoric* Non solo. Essi pongono estrema cura nel cercare e mantenere proporzioni esatte fra gli elementi delle figure. Per esempio, da una forma quadrata, ne costruiscono una esattamente doppia o esattamente tripla.

Second* Pitagoric* Che ci vuole! Non basta raddoppiare o triplicare i lati?⁵

Pitagora No, così rendi il quadrato quattro volte o nove volte più grande. Infatti, le figure stanno *in ragione duplicata dei lati* (poligoni simili stanno tra loro come i quadrati dei lati corrispondenti).

Second* Pitagoric* E allora, come si fa? Mi sembrava un'operazione così semplice . . . , invece mi accorgo che non saprei proprio come fare.

Prim* Pitagoric* Ecco cosa scrivono in uno dei libri in cui hanno raccolto le norme per la costruzione degli altari. «*Per sommare due differenti quadrati, toglì dal più grande una porzione rettangolare con un lato del più piccolo. La diagonale di questa parte sarà il lato della somma.*»⁶

Pitagora In altre parole, il quadrato sull'ipotenusa è somma dei quadrati sui cateti.⁷ Un problema di cui ci stiamo occupando da tempo

Secondo stralcio: esempio di approfondimento suggerito dagli insegnanti

⁴Richiamo alle attività svolte nel primo incontro.

⁵Richiamo alle attività del secondo incontro.

⁶Baudhayana, contemporaneo o precedente Talete, è autore di un *subbasutras* in cui appare il teorema di Pitagora per un particolare triangolo rettangolo. Le istruzioni riportate sono tratte da un *subbasutras* successivo, ma è molto probabile che il risultato generale fosse noto ai matematici indiani prima di Pitagora

⁷Enunciato del problema.

Secondo Pitagorico Scusa Pitagora, la somiglianza si dovrebbe vedere e io qui non la vedo!

Pitagora E tu hai ragione! Per vedere bisogna esercitarsi. Quello che io vedo facilmente è frutto di anni di studio e di pratica. *L'intuizione esperta ci appare magica, ma non lo è. In realtà, ciascuno di noi compie operazioni di competenza intuitiva molte volte al giorno. Quasi tutte le persone colgono benissimo una nota di rabbia nelle prime parole di una telefonata, capiscono nel momento in cui entrano in una stanza che si stava parlando di loro, e reagiscono subito a piccoli indizi che il guidatore dell'auto nella corsia accanto è pericoloso. Le nostre capacità intuitive quotidiane non sono meno meravigliose delle straordinarie intuizioni di un pompiere o un medico esperti; sono solo più comuni. La psicologia dell'intuizione esatta non ha niente a che vedere con la magia. Forse il miglior giudizio sintetico che è stato dato di tale tipo di intuizione è quello del grande Herbert Simon, il quale studiò i campioni di scacchi e dimostrò che dopo migliaia di ore di pratica essi finivano per vedere i pezzi sulla scacchiera in maniera diversa da tutti gli altri. L'insofferenza di Simon per la mitizzazione dell'intuizione esperta può essere colta facilmente là dove scrive: «La situazione ha fornito un indizio, questo indizio ha dato all'esperto accesso a informazioni immagazzinate nella memoria e le informazioni forniscono la risposta. L'intuizione non è né più né meno che riconoscimento».* [5], pp. 24–25.

Terzo stralcio: presentazione dell'attività

Ho chiesto ai confratelli di Crotone e di Taranto di pensare a una dimostrazione elementare e mi hanno appena inviato cinque proposte, sulle quali chiedo le vostre riflessioni. Ritengo molto utile, per la vostra formazione come matematici, passarle a un severo vaglio critico, che ci permetta di giungere alla dimostrazione perfetta di questo teorema egregio.

13 Le attività del quinto incontro

L'attività consiste nella visione e nella riflessione guidata di cinque filmati relativi al Teorema di Pitagora. Lo scopo è quello di riflettere sui diversi tipi di argomentazioni per arrivare a una definizione “operativa” di dimostrazione matematica, che dovrà essere istanziata nella *dimostrazione digitale* che i ragazzi dovranno costruire.

- [Primo filmato](#)
- [Secondo filmato](#)
- [Terzo filmato](#)
- [Quarto filmato](#)
- [Quinto filmato](#)

14 Dialogo didattico relativo al quinto incontro

Il dialogo didattico sintetizza le ragioni didattiche dell'attività e riassume tutte le informazioni che possono essere utili all'insegnante per "istituzionalizzare l'attività". Il dialogo condiviso con gli insegnanti e riscritto dopo aver riflettuto sugli esiti dell'attività e sulle osservazioni comunicate dagli insegnanti.

Ne riportiamo uno stralcio, che deve essere ancora integrato con le riflessioni degli insegnanti e delle insegnanti che hanno partecipato quest'anno.

(I personaggi del dialogo sono due ricercatori (R1, R2) e un gruppo di insegnanti.)

R1 Quale delle argomentazioni presentate nei filmati vi ha convinto di più e perché?

I1 Mi è molto piaciuta l'idea di dimostrazione presentata in Video 2. È molto chiara, semplice e ben illustrata. L'argomento mi ha convinto e non ha bisogno di ulteriori approfondimenti. Il Video 1 invece non mi sembra una vera dimostrazione ma solo un verifica empirica. Il Video 3 e il Video 5 sono anche loro convincenti, ma mi sembra che le idee su cui si fondano siano meno naturali. Come è venuto in mente agli autori di decomporre e di ricomporre le figure in quel modo? La dimostrazione del Video 4 invece non l'ho ben capita. Mi sembra un gioco di prestigio che non c'entra niente con il teorema che vorremmo dimostrare. Non è questa la strada che seguirei per arrivare a una dimostrazione.

I2 A me invece il secondo filmato non convince per niente. L'argomento funziona solo perché i lati misurano 3,4,5.

R2 cosa significa che un lato misura 3? Rispetto a quale unità di misura?

I2 Avrei dovuto dire che esiste una misura comune ai tre lati, cioè un segmento, rispetto al quale il primo è triplo, il secondo quadruplo e il terzo quintuplo.

R2 Così si risolve ogni ambiguità.

I4 dovremmo provare con 5,6,7 ..chissà se funzioni comunque.

I3 Ho provato...non funziona affatto.

R1 Perché non funziona?

I4 Perché, procedendo come nel video, Il quadrato sul primo segmento è fatto di 25 quadratini di lato unitario, quello sul secondo segmento di 36 e quello sul terzo di 49 e 25 più 36 è più grande di 49.

I2 Ma è evidente che non debba funzionare! Un triangolo i cui lati hanno lunghezza 5, 6 e 7 non può essere rettangolo!

R1 Quindi, l'argomento funziona solo per i triangoli rettangoli che hanno lati in rapporti interi?

I2 Sì, perché in tal caso, detti m , n e q le lunghezze dei lati, $m^2 + n^2 = q^2$.

R2 Questo perché vale il teorema di Pitagora, che è esattamente quello che vorremmo dimostrare. Quindi possiamo illustrare il teorema di Pitagora come nel primo video se esistono tre interi m , n e q che soddisfano la relazione $m^2 + n^2 = q^2$, ma questa non è una dimostrazione del teorema di Pitagora. Assume quello che vorremmo dimostrare. È solo la condizione perché si possa illustrare il teorema ritagliando e spostando quadretti. Tra l'altro, i triangoli rettangoli i cui lati stanno in rapporti interi sono molto particolari, mentre il Teorema di Pitagora vale per triangoli rettangoli qualsiasi. Comunque, quali altre terne pitagoriche, cioè interi positivi per cui vale la relazione $m^2 + n^2 = q^2$ conoscete?

I3 6, 8 ,10

I1 Questa non è interessante.

I3 Perché?

I1 È ottenuta raddoppiando ogni elemento della terna (3,4,5).

I3 E allora?

I1 Geometricamente è la stessa di prima, cioè i triangoli corrispondenti sono simili.

R1 Giusto, quelle interessanti sono le terne primitive cioè che non hanno fattori comuni.

I2 Per esempio, (5,12,13)

R1 Questo ci porta un po' lontano dal problema che intendevamo discutere. Torniamo a considerare i video.

...

15 Difficoltà di un insegnamento interdisciplinare

Non ho potuto lasciar spazio alle difficoltà di realizzazione di questi laboratori, che sono molte e serie. Ne cito solo alcune in ordine sparso

1. Insegnare in copresenza
2. Comprendere la logica della proposta e riuscire a trasmetterla alla classe
3. Partecipare alla costruzione di dialoghi
4. Comunicare con differenti linguaggi

16 Sguardo interdisciplinare

Nonostante le difficoltà siamo convinti dell'importanza di questi laboratori. Nella diapositiva è indicata una metafora che mi piace condividere. Quella di un gruppo di personaggi di fronte a un disegno complicato che non si riesce a interpretare.

16.1 Metafora dello sguardo interdisciplinare

Immagine della diapositiva: Simon Vouet (1590–1649), Otto satiri che guardano l'anamorfose di un elefante

Per dar senso al disegno (anamorfose) è necessario guardarlo riflesso nello specchio cilindrico, metafora dello *sguardo interdisciplinare* con cui conviene guardare alcuni problemi di insegnamento/apprendimento.

17 Insegnamento della matematico come limite di un insegnamento interdisciplinare

Come promesso, ribadisco lo stesso concetto con una similitudine matematica.

Come per studiare una curva singolare, può convenire costruire una famiglia di curve lisce di cui la curva singolare è limite

così

per affrontare alcuni argomenti cruciali e difficili nell'insegnamento/apprendimento della matematica, come la dimostrazione, può convenire studiarli come specializzazione di argomenti di interesse più generale, in un contesto interdisciplinare.

18 Ringraziamenti

In quest'ultima slide volevo ringraziare le persone che hanno collaborato con me in questi anni. Purtroppo ne avrò sicuramente dimenticati almeno altrettanti, e me ne scuso.

Insegnanti Anna Perrotta, Elena Possamai, Francesca Coppa, Luca Sbrano, Luigi Regoliosi, Maria Cristina Migliucci, Michela Barsanti, Patrizia Barneschi, Maria Puzio, Elena Savinelli, Tina Nastasi.

Laureandi e dottorandi Francesco Bologna, Agnese Del Zozzo, Giuseppe Iabichino, Eugenio Carretta, Martina Bucciarelli, Angela Capobianchi, Marta Gavi, Francesca Simoncelli, Martina De Marchis.

Colleghi Francesco Saverio Tortoriello, Valerio Vassallo, Sergio Camiz, Roberto Capone, Claudio Fontanari, Silvia Pedone, Michele Di Monte.

Maestri Ciro Ciliberto, Giuseppe Accascina, Pietro Nastasi.

Studenti e insegnanti delle scuole che hanno collaborato alla progettazione dei percorsi di cui ho parlato Liceo Galilei di Roma, Liceo Astarita di Roma, Liceo Plinio Seniore di Roma, Liceo De Sanctis di Roma,

Liceo Nomentano di Roma, Liceo Vittoria Colonna di Roma, Liceo Keplero di Roma, Liceo Avogadro di Roma.

Liceo Mancini di Avellino, Liceo Manzoni di Caserta, Istituto Comprensivo Buniva di Pinerolo, Liceo Antonelli di Novara, Liceo Aeclanum di Mirabella.

19 Dibattito

Ho cercato di recuperare le domande che mi sono state poste durante il dibattito, interpellando direttamente gli autori, e di ricostruire sinteticamente i punti principali delle mie risposte.

Daniele Pasquazi "perché è importante per gli studenti che l'insegnante espliciti il proprio ragionamento durante la ricerca di una strategia risolutiva di un problema o di una dimostrazione"?

È in queste occasioni che si può mostrare perché una strategia funzioni e una no, è importante far vedere che le soluzioni non sono subito disponibili ma vanno conquistate diciamo anche con prove e errori. Ciò è legato, secondo me, anche all'altra osservazione che ti ha fatto uno studente che si meravigliava, di fronte ad una figura, che potesse "scegliere" la propria strategia risolutiva. Sono interessanti queste osservazioni perché ci danno indicazioni, talvolta, sul modo "rigido" in cui insegniamo.

Il suggerimento di Lebesgue di pensare di fronte e, aggiungerei, pensare insieme ai propri allievi mi sembra un precetto importante per tutti gli insegnanti, non solo quelli di matematica. Questi ultimi però sono quelli che hanno il compito più difficile, perché l'errore in matematica è più netto e meno discutibile. Bisogna però imparare ad accettare l'errore e riconoscere la sua importanza. Altrimenti si trasmette l'ansia di sbagliare e la paura di pensare.

Nicola Chiriano La necessità di prendersi il giusto tempo per rispondere a domande spiazzanti da parte dei ragazzi mi ha fatto pensare alla scena di "Bianca" in cui Moretti-Apicella viene salvato dalla campanella... Detto questo, riguardo le "dimostrazioni senza parole" (cfr sua slide) non ritiene che vadano in senso didattico opposto rispetto alle argomentazioni o al metodo logico-deduttivo che utilizziamo in genere? Non c'è il rischio di fare come quando i ragazzi ci dicono "è così prof, perché si vede dal disegno"?

Io credo che la matematica sia fatta di tanti pezzi. Il metodo logico deduttivo non è tutta la matematica. Gli algoritmi, il formalismo algebrico e

le figure geometriche possono suggerire importanti attività matematiche di carattere non prevalentemente argomentativo, che possono risultare appassionanti e motivanti. Credo che sia importante sviluppare tutti gli aspetti della matematica.

Aggiungo che, parallelamente alla discussione di “cosa si vede in un quadro” mi piace molto discutere “cosa si vede in una figura geometrica” e cosa c’è ma non si vede. Questo esercizio è importante per guidare l’intuizione in maniera efficace e consapevole.

Giulia Bini Rimanendo sul tema “pensare davanti agli studenti”, penso che questo sia importante non solo per far capire agli studenti che le risposte ai problemi matematici non vanno sapute ma vanno costruite, ma anche per rinforzare l’idea che la matematica è una pratica lenta.

Concordo sull’importanza di restituire la corretta dimensione temporale alla pratica matematica. Inoltre, la matematica, oltre a procedere lentamente non procede mai linearmente ma piuttosto a spirale. La soluzione di un esercizio o la dimostrazione di un teorema non conclude mai la storia che può ancora raccontare.

Anna Amirante Si può dire che esiste un rapporto circolare fra argomentare-importanza di un linguaggio-formulare ipotesi con possibilità di conclusioni diverse purché motivate- pedagogia dell’errore-condivisione delle scelte col superamento insieme della difficoltà (anche potendo dire “non so”)? Questo poter avere diversi punti di vista svilupperebbe il pensiero laterale favorendo la creatività del pensiero umano che permette quell’infinità di risultati validi e non validi scovando le parole nel cervello, come dice il prof. Sabatini in Lezioni di italiano e realizzeremo il triangolo di Chevallard, che pone sullo stessa linea insegnante ed alunno con al vertice il sapere (dal sapere matematico al sapere da insegnare al sapere insegnato)?

Non sono in grado di rispondere a queste domande perché ci sono diversi punti che non comprendo nella loro formulazione.

Ornella Robutti come si intende l’interdisciplinarietà rispetto alle epistemologie delle due discipline: due epistemologie distinte, che si incontrano sul piano didattico dell’attività, o la creazione di una nuova epistemologia mista che è diversa dalle due distinte? e sottodomanda: i due laboratori Argomentare e Vedere fanno uso degli stessi aspetti epistemologici della matematica o diversi?

L'interdisciplinarietà di questi laboratori non intende promuovere una nuova epistemologia mista. Le discipline restano distinte e gli obiettivi di apprendimento restano ben chiari all'interno di ogni disciplina separatamente. Il percorso per raggiungere questi obiettivi però viene compiuto partendo da situazioni, concetti, attività i cui i contorni disciplinari non sono ancora rigidamente definiti. Per esempio, per comprendere un'argomentazione filosofica e una dimostrazione matematica si parte da attività più primitive, che riguardano forme argomentative meno "esperte", distinguendo argomentazioni mano a mano più specifiche fino ad arrivare ad incontrare le forme più raffinate della dimostrazione matematica e della argomentazione filosofica. Utilizzando la similitudine della slide n. 17, matematica e filosofia stanno su due fibre singolari distinte e lì dobbiamo arrivare, ma lì possiamo arrivare attraverso un percorso che collega le due situazioni "singolari" attraverso una evoluzione continua di situazioni via, via più raffinate. Questo collegamento continuo tra fibre singolari attraverso una successione di fibre semplici è la metafora dell'interdisciplinarietà che intendo promuovere.

Per quanto riguarda la sottodomanda, ognuno dei cinque laboratori che stiamo progettando mette prevalentemente in luce un aspetto diverso della matematica, ma in ogni laboratorio l'aspetto prevalente non è esclusivo e i collegamenti tra i diversi laboratori sono un loro aspetto caratteristico importante.

Ornella Robutti l'importanza del discorso alla Sfard, che qui è utilizzato non solo per l'apprendimento della matematica, ma perché gli insegnanti apprendano a insegnare matematica in un modo nuovo.

Questo è un punto che mi è importante e che stiamo cercando di approfondire.

Riferimenti bibliografici

- [1] Aldo Brigaglia, Maria Anna Raspanti, Enrico Rogora, , "Uso di un software di Geometria Dinamica nella formazione degli Insegnanti". *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* **6**(1), (2021), pp. 37-67.
- [2] Guido Castelnuovo, "La scuola media e le attitudini che deve risvegliare nei giovani", 1910.

- [3] Martina De Marchis, Enrico Rogora, “Attualità delle riflessioni di Guido Castelnuovo sulla formazione dell’insegnante di Matematica”, *Periodico di Matematiche*, (2017), pp. 71-79.
- [4] Martina De Marchis, Marta Menghini, Enrico Rogora, “The importance of Extensive Teaching in the education of perspective teachers of Mathematics”. In: D. Szarková, D. Richtáriková, M. Práčilová (eds.), *Proceedings of APLIMAT 2020*, Bratislava, 2020, pp. 344-353.
- [5] Daniel Kahneman. *Pensieri lenti e veloci* Mondadori, Milano, 2.
- [6] Enrico Rogora, “Guido Castelnuovo e la sua famiglia”, Conferenza al Workshop I.N.D.A.M. *Italian Algebraic Geometry between Tradition and Future*, Roma 6–8 Dicembre 2022.
- [7] Roberto Capone, Enrico Rogora, Francesco Saverio Tortoriello, “La matematica come collante culturale nell’insegnamento”. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell’Unione Matematica Italiana* **2**(3), (2017), pp. 293-304.
- [8] Enrico Rogora, Saverio Tortoriello. “Interdisciplinarity for learning and teaching mathematics”. *Bolema*, **35** (70), 2021, 1086-1106.
- [9] Rogora, Enrico, Saverio Tortoriello, “Matematica e cultura umanistica”, *Archimede* 2018 (2), 82-88.
- [10] Lucio Russo, “Euclide”, *Grandangolo*, Collane del Corriere della Sera, Milano, 2014.