15 febbraio 2022

L’arte del triangolo: portare la trigonometria in piazza

Giovanna Guidone, Liceo Scientifico «T. C. Onesti», Fermo
Sezione LM di Camerino

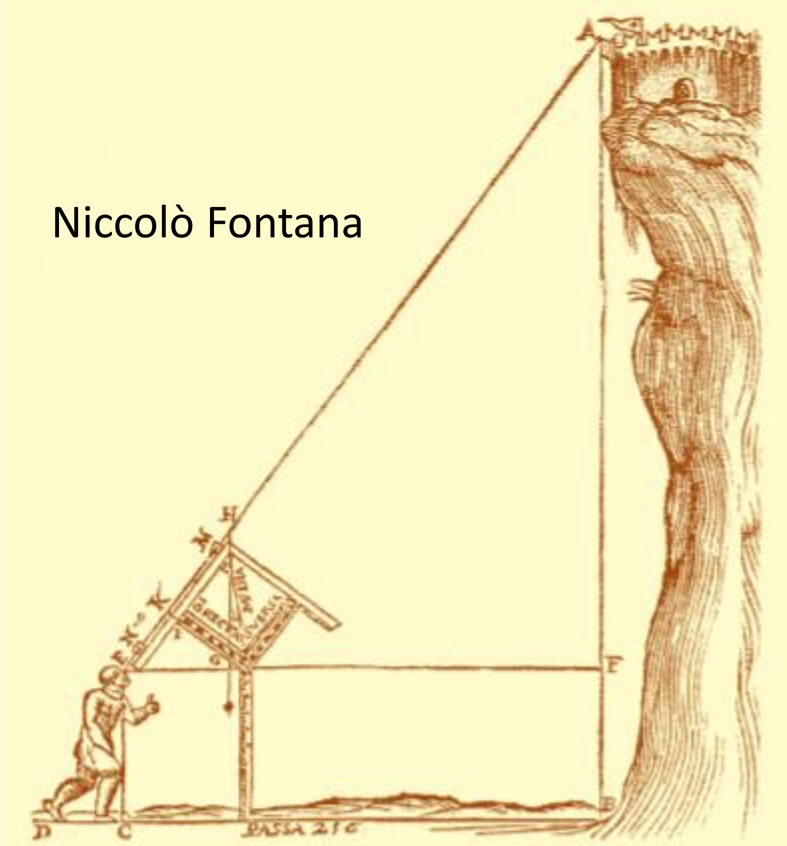
Due possibili percorsi

~~**La similitudine -> studenti di seconda superiore**~~

L'arte del triangolo -> studenti che affrontano la trigonometria

1. In un triangolo rettangolo possiamo «misurare» avendo solo un lato e un angolo
2. E se il lato non l'abbiamo?
3. E se il triangolo non è rettangolo?

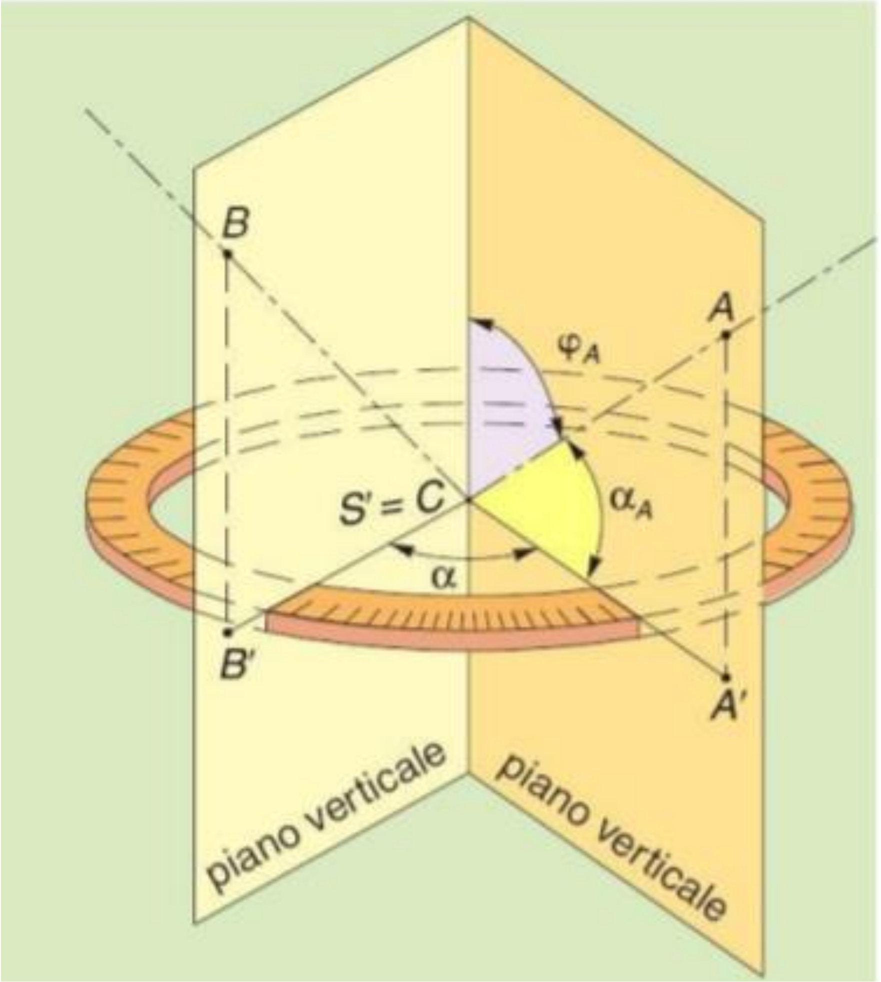
Il teodolite: uno strumento antico in una rudimentale versione moderna



QUALI ANGOLI MISURA UN TEODOLITE?

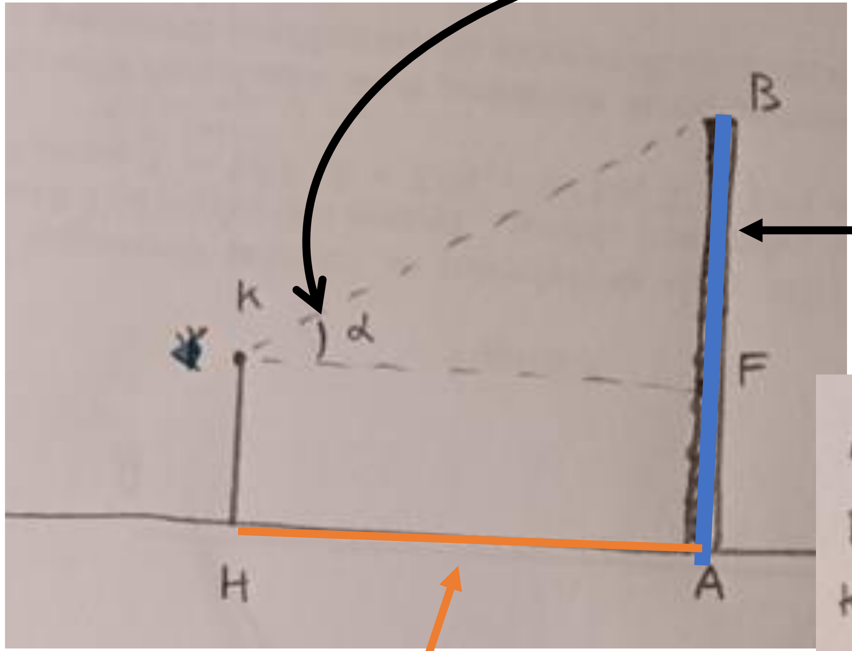
Angolo zenitale φ_A (o il suo complementare α_A)

Ma anche, nel seguito, l'angolo azimutale α



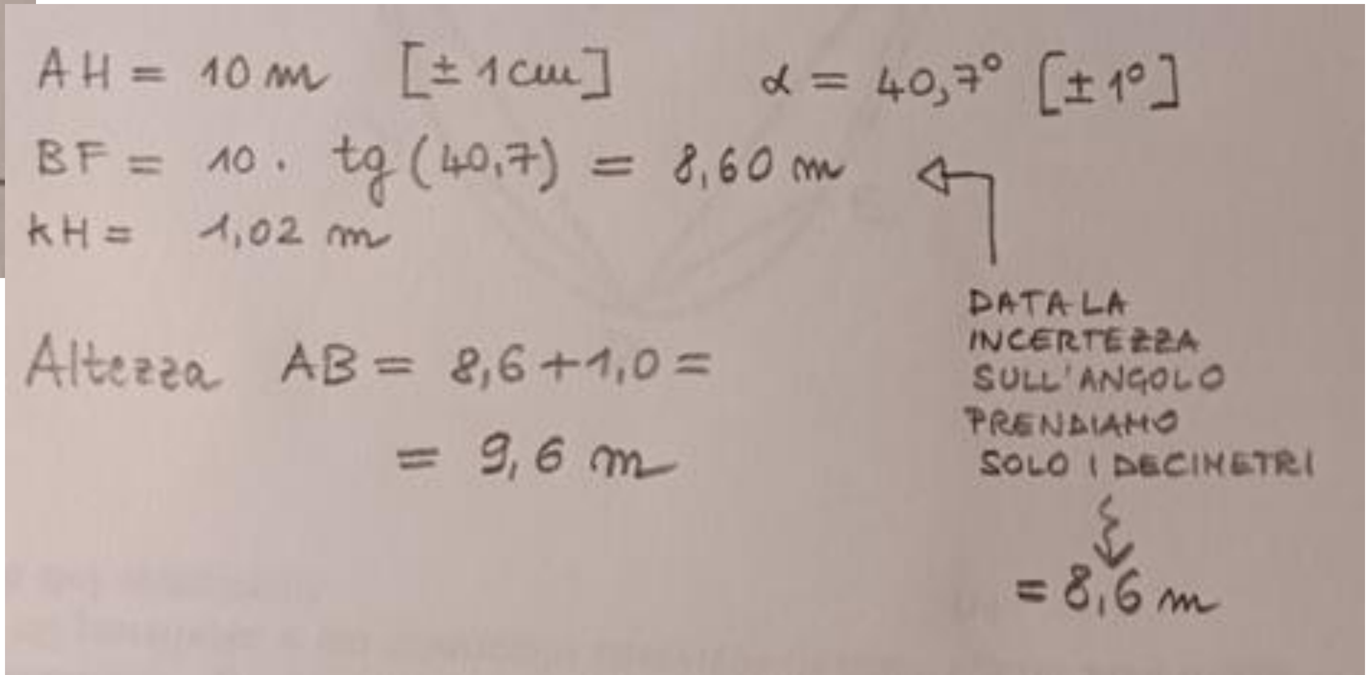
Attività all’aperto: misura di un altezza con base raggiungibile ma ombra non accessibile.

L’angolo α lo misuriamo con il teodolite



Altezza da misurare

Lunghezza accessibile



AH = 10 m [± 1 cm] $\alpha = 40{,}7°$ [± 1°]

BF = 10 · tg (40,7) = 8,60 m

kH = 1,02 m

Altezza AB = 8,6 + 1,0 =

= 9,6 m

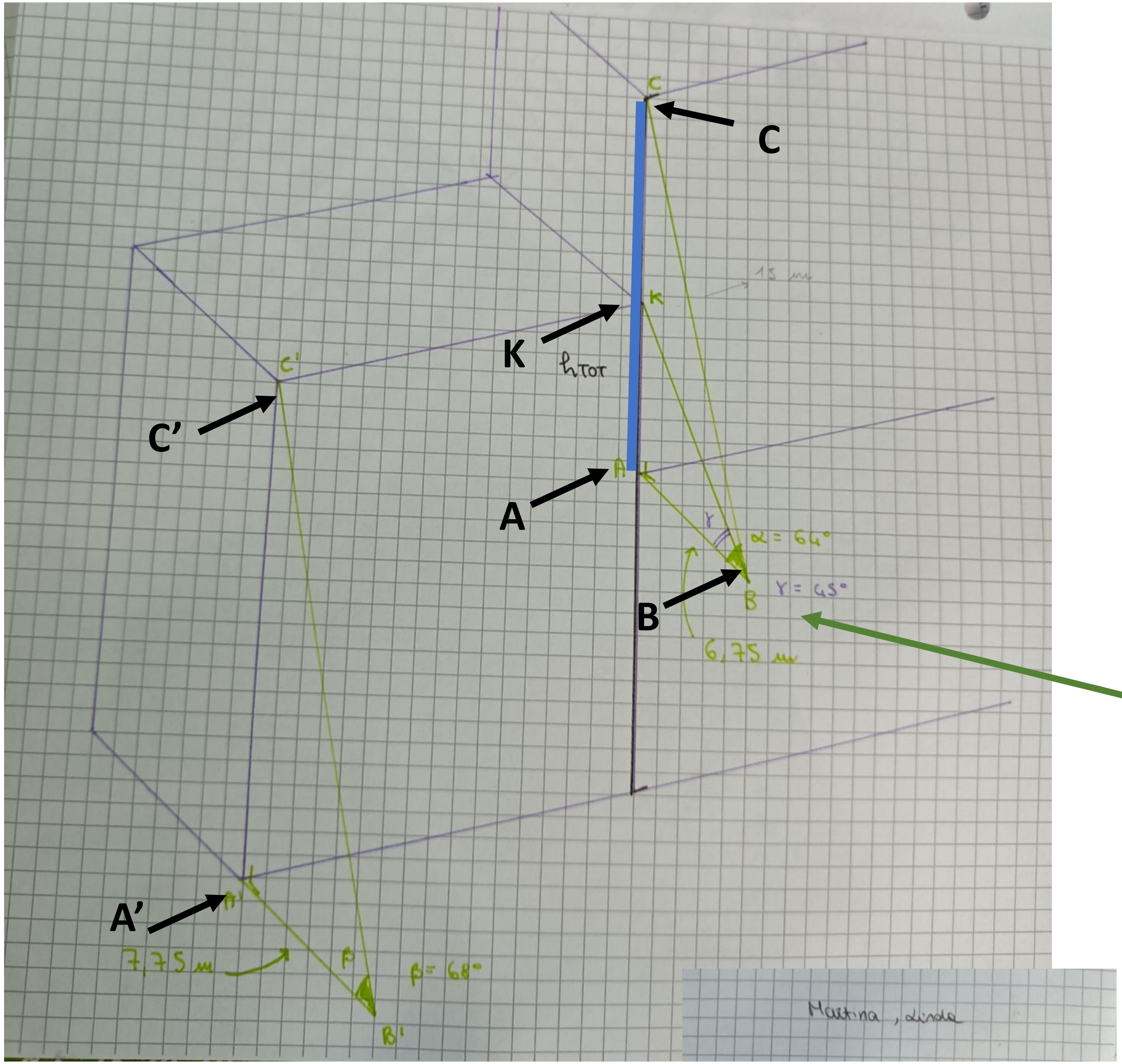
DATA LA INCERTEZZA SULL'ANGOLO PRENDIAMO SOLO I DECIMETRI

= 8,6 m

Misura di altezza con base irraggiungibile

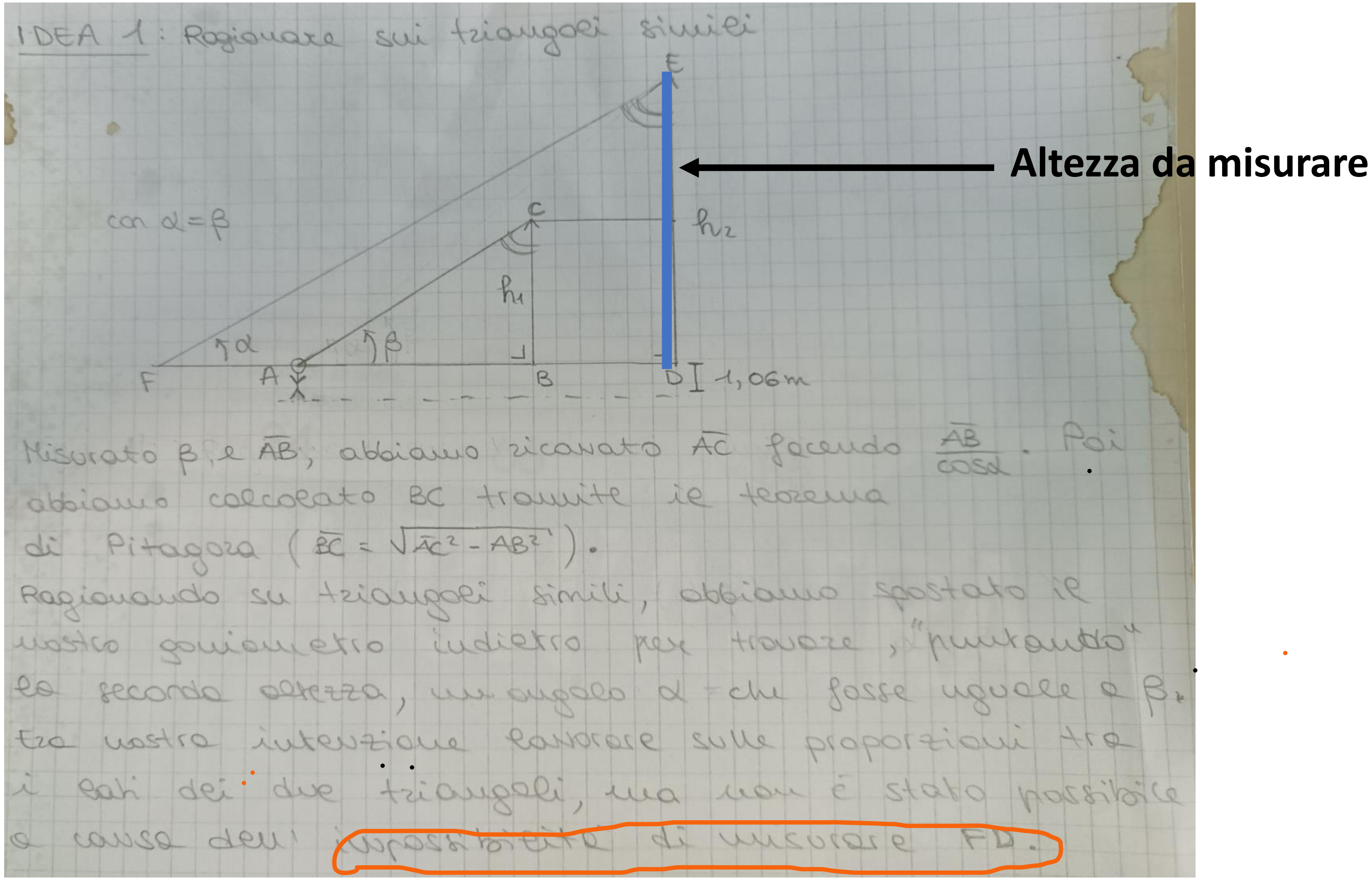
Quanto è alto questo punto rispetto a dove appoggiamo i piedi?

Prima proposta: *pensiero divergente*



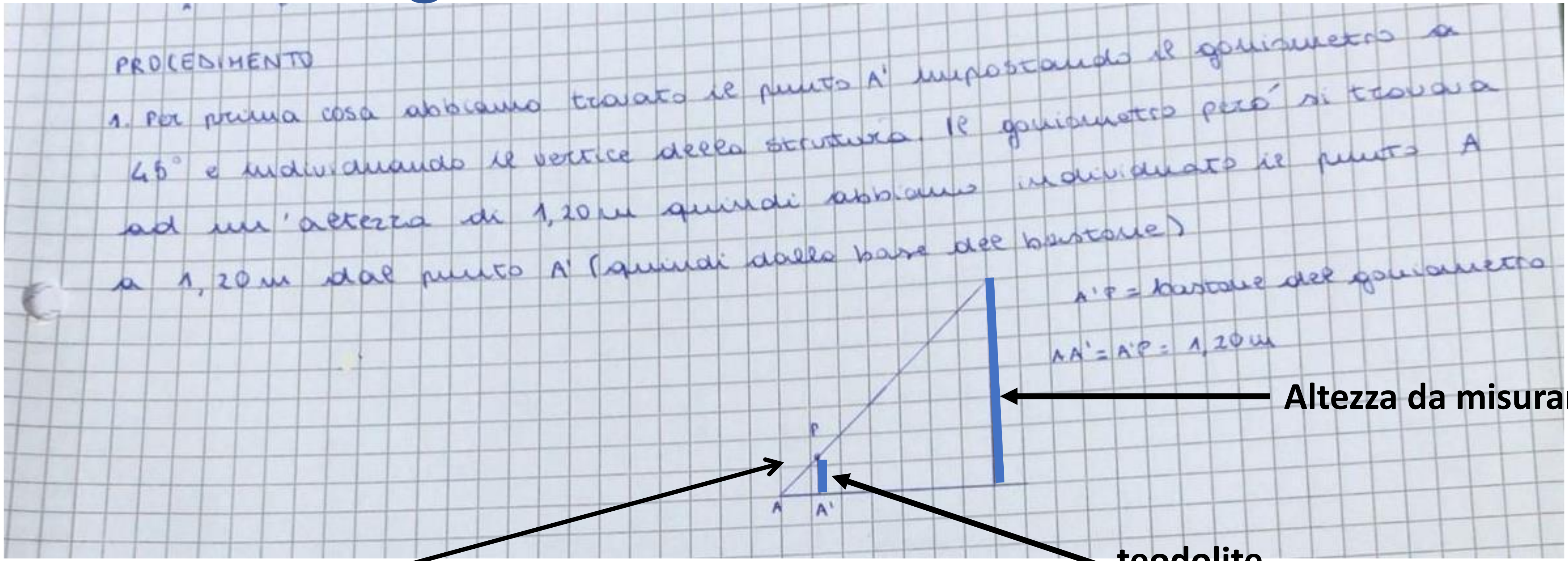
Martina e Linda hanno aggirato il problema, letteralmente.
Girando intorno all'edificio hanno trovato un punto (B) dal quale è possibile accedere alla base (nel punto A) ed arrivare a misurare fino a C

Seconda proposta: ragionare con la similitudine??



Misurato β e $\overline{AB}$, abbiamo ricavato $\overline{AC}$ facendo $\frac{\overline{AB}}{\cos\alpha}$. Poi abbiamo calcolato BC tramite il teorema di Pitagora $(\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2})$.
Ragionando su triangoli simili, abbiamo spostato il nostro goniometro indietro per trovare, "puntando" la seconda altezza, un angolo α che fosse uguale a β.
Era nostra intenzione lavorare sulle proporzioni tra i lati dei due triangoli, ma non è stato possibile a causa dell'impossibilità di misurare FD.

Inventare triangoli

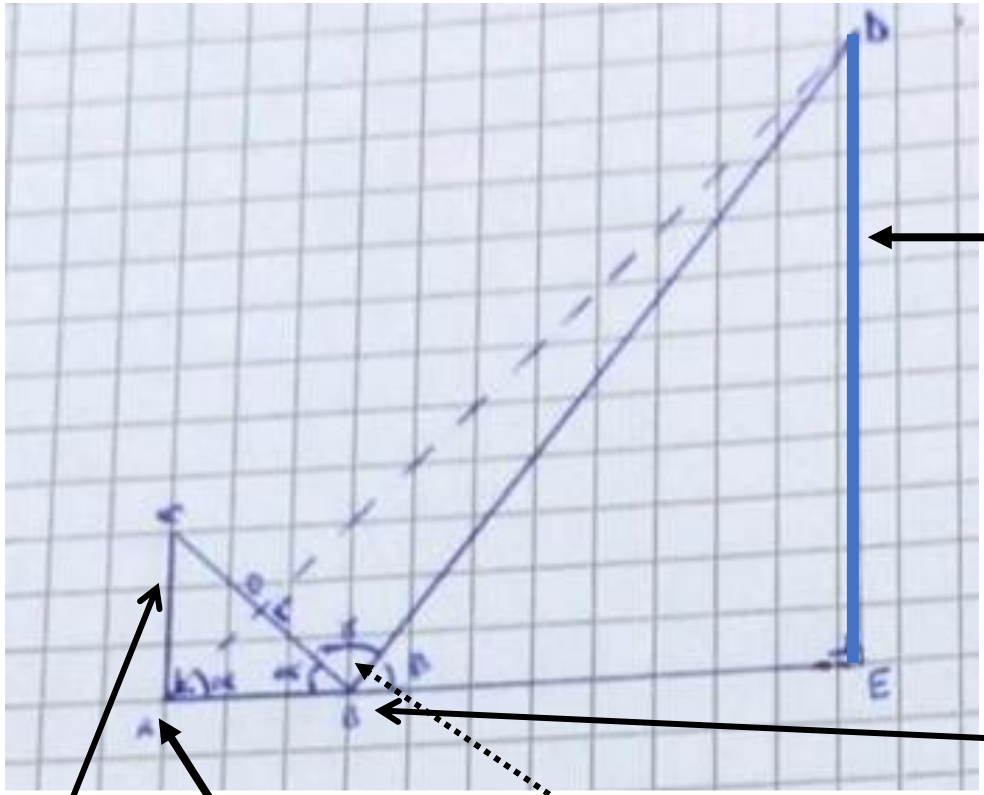


Altezza da misurare

teodolite

Metto il goniometro (teodolite) in P in modo tale da vedere la cima sotto un angolo di 45°. **Poi trovo A in modo tale che PAA' sia metà quadrato**

E' interessante come si misuri un angolo a 1.30m da terra e poi lo si «proietti» a terra



Altezza da misurare

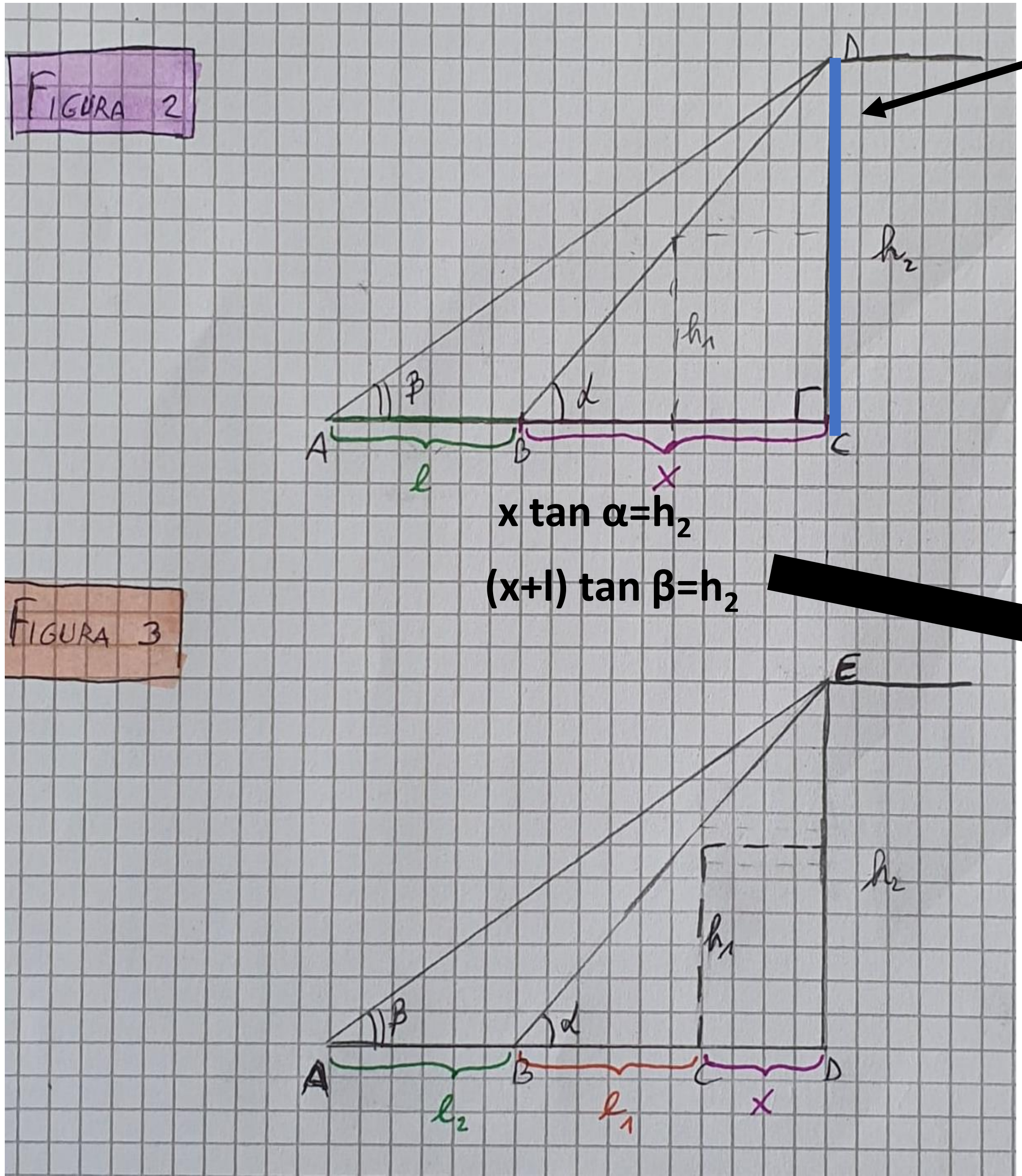
Abbiamo **individuato un opportuno punto B** sulla congiungente AE e misurato l’angolo $D\hat{B}E = \beta$

Punto A trovato prima (In terra)

Abbiamo **riportato in verticale** la lunghezza AB in modo da formare un triangolo rettangolo isoscele

Trovando ora:
L’angolo γ per sottrazione
La lunghezza della lunghezza A’B come diagonale di un quarato
Possiamo ricavare BD nel triangolo rettangolo BOD

Un cambio di prospettiva



Altezza da misurare

$x \tan \alpha = h_2$

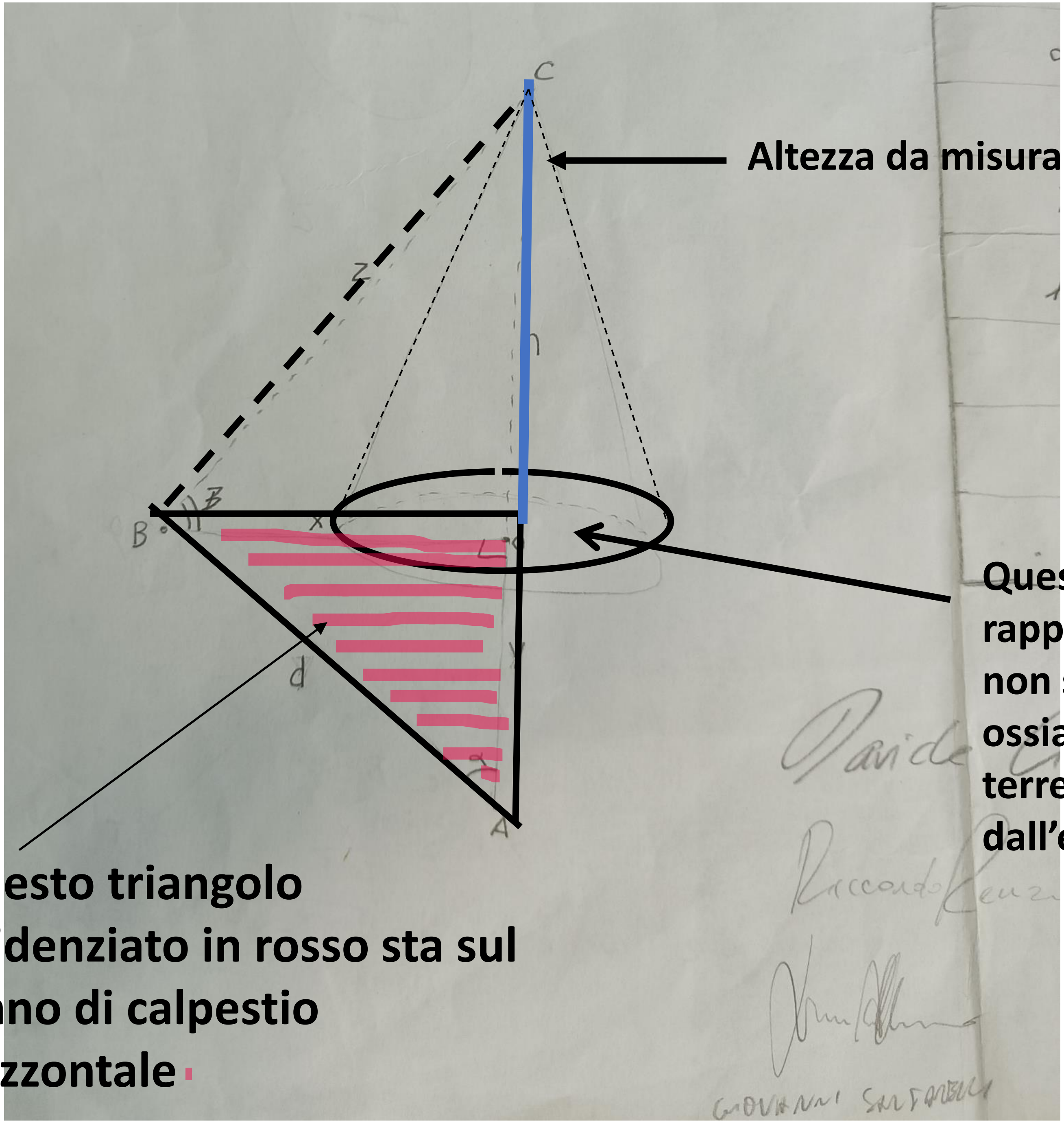
$(x+l) \tan \beta = h_2$

Abbiamo misurato due angoli diversi α e β puntando sempre con il nostro strumento (il migliore) al vertice dell'altezza h_2 che volevamo misurare. Abbiamo poi misurato la distanza l:=AB tra le due posizioni dalle quali abbiamo misurato gli angoli.

$x \tan \alpha = (x+l) \tan \beta$

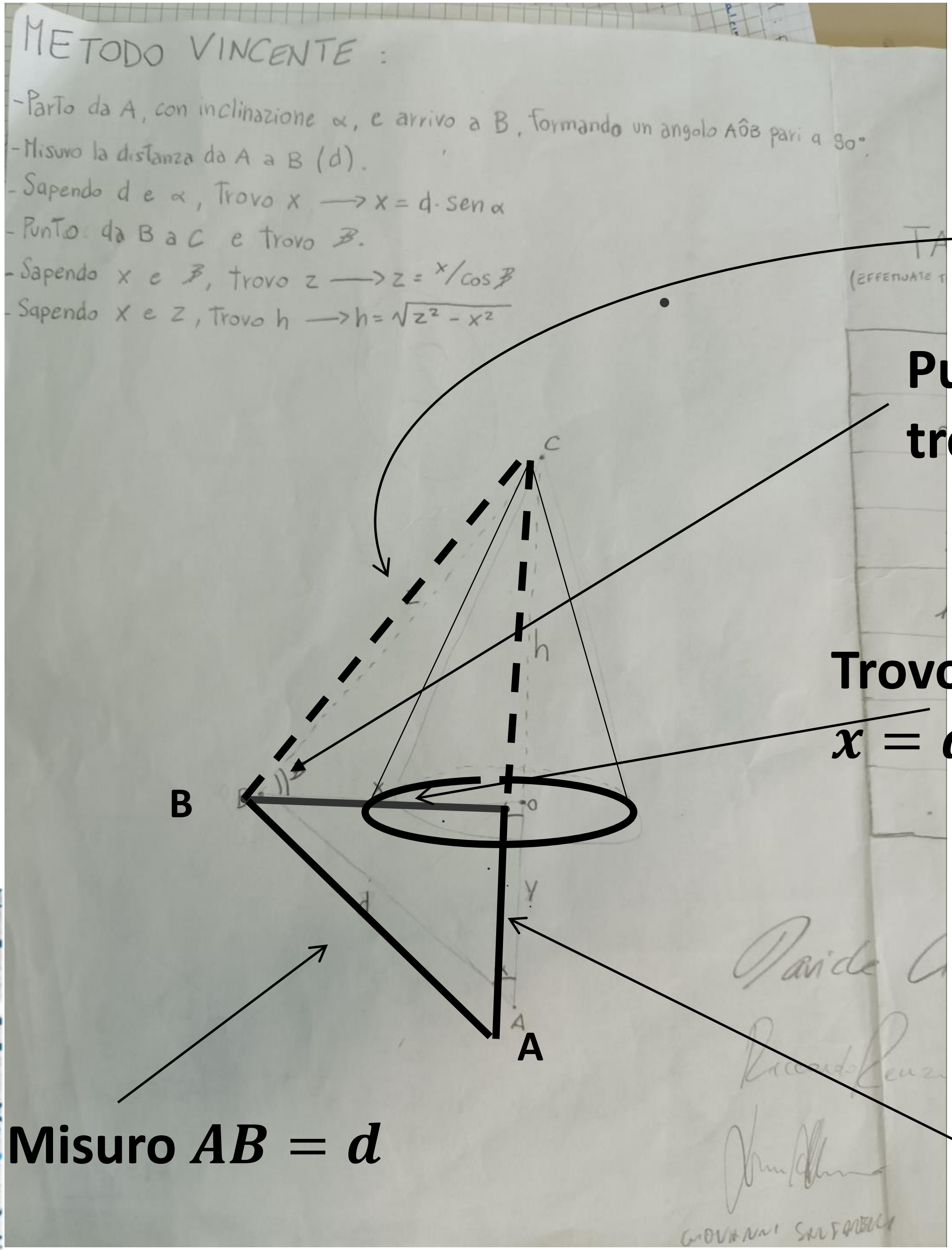
Dopo aver calcolato x potevamo quindi ricavare l'altezza h_2.

Sfruttare la terza dimensione



Questo cerchio rappresenta dove non si può arrivare, ossia la parte di terreno occupata dall'edificio

Questo triangolo evidenziato in rosso sta sul piano di calpestio orizzontale



Trovo $BC = z$ come $z = \frac{x}{cos\beta}$

Punto C da B e trovo β

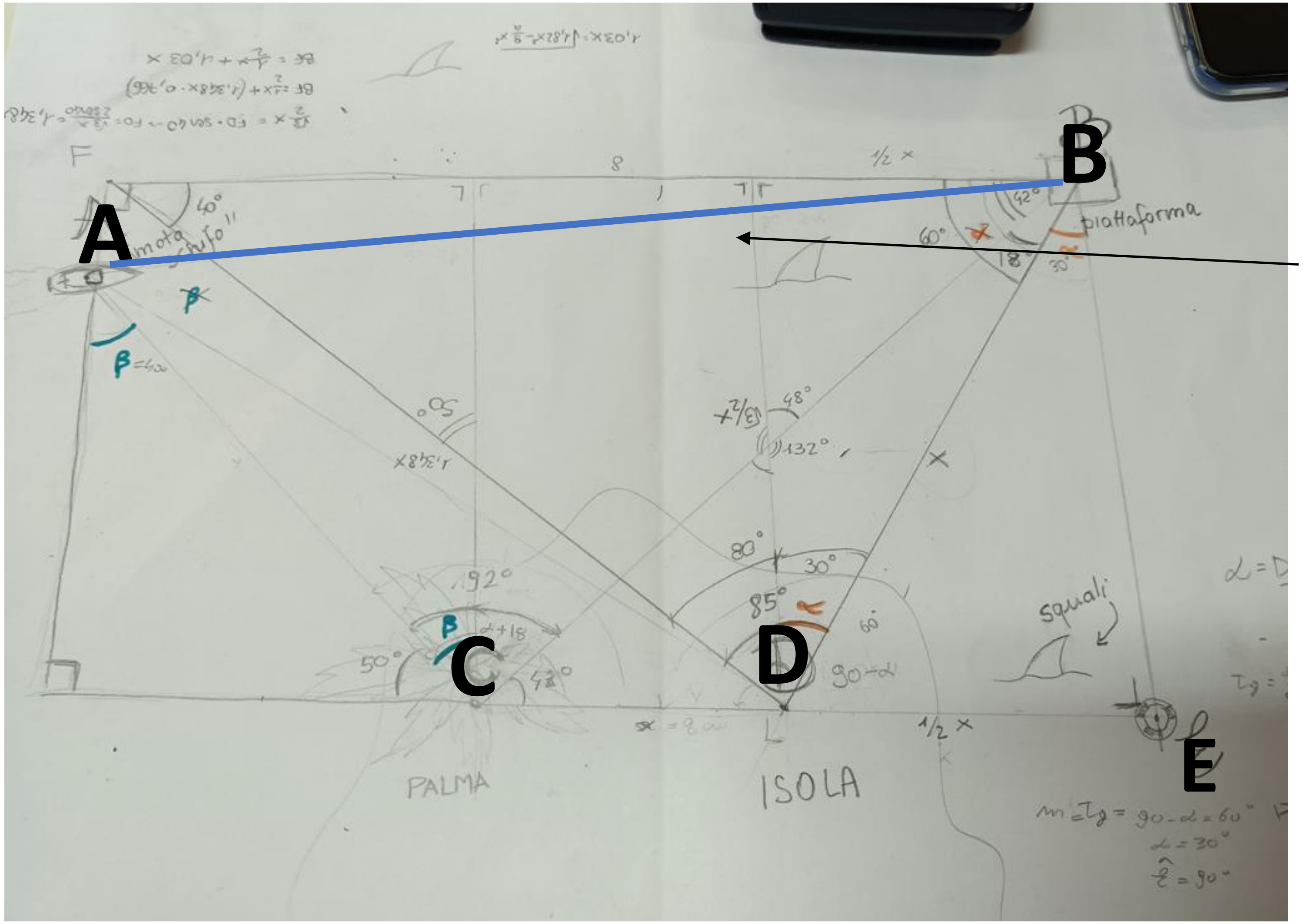
Trovo $BO = x$ come $x = dsin\alpha$

Nel triangolo rettangolo BOC conosco l'ipotenusa z e un cateto x e posso determinare h

Misuro $AB = d$

Parto da A con inclinazione α e arrivo in B

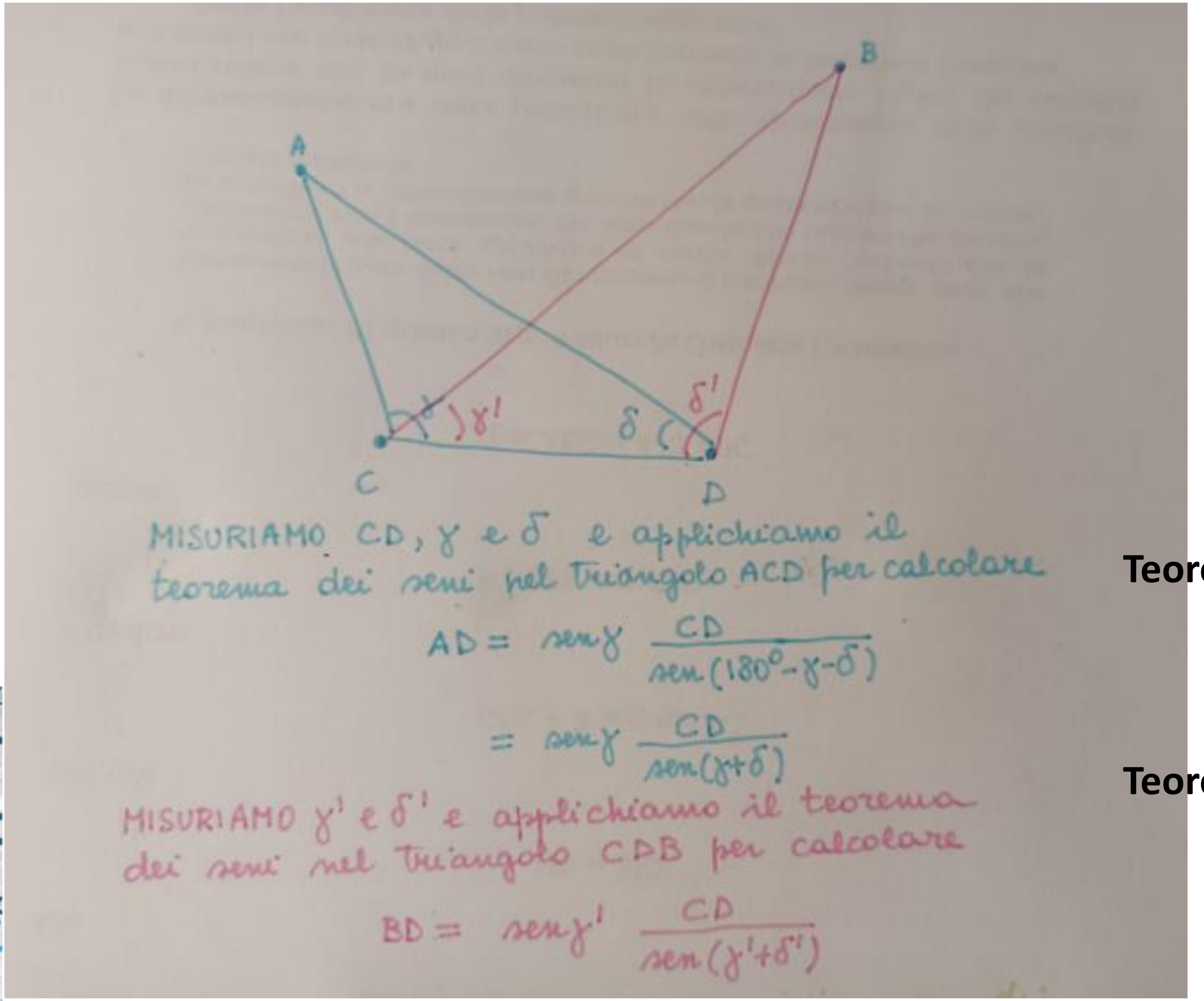
II PROBLEMA: distanza tra due punti inaccessibili



Distanza da misurare

In mare, nel punto A, c’è un **motoscafo** e, nel punto B, una **piattaforma**. Pierino sta su un **isola** da cui vede sia il motoscafo che la piattaforma. Al momento si trova nel punto D ma può muoversi fino a C e misurare la distanza DC. Pierino ha anche un teodolite per la misura di angoli azimutali. Potrà sapere quanto dista il motoscafo dalla piattaforma?

Il metodo classico (problema di Snellius)



Teorema dei seni su ACD

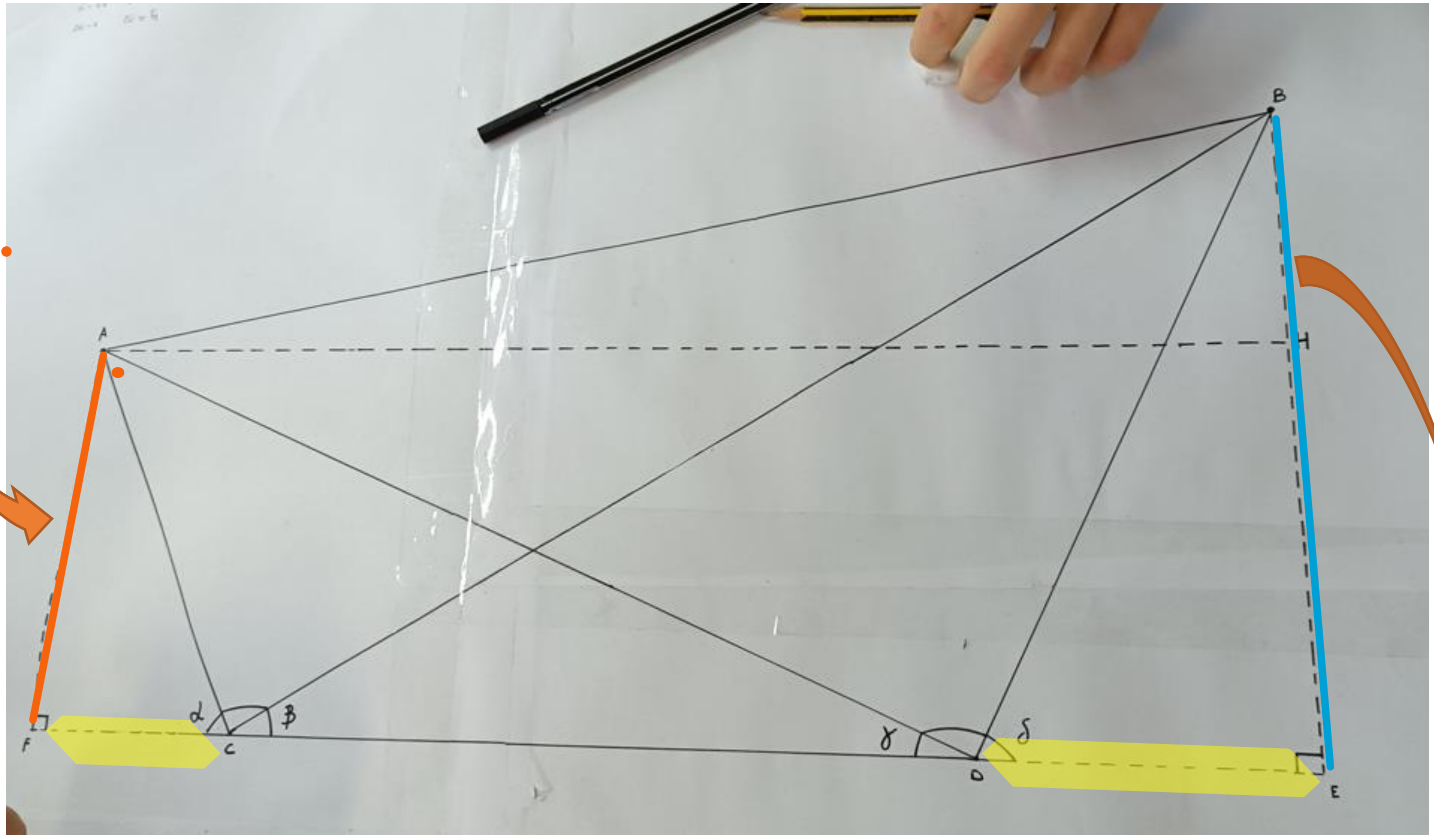
Teorema dei seni su CDB

Teorema di Carnot su ABD

$$AF = FC\tan\alpha$$
$$AF = FD\tan\gamma$$

$$FC\tan\alpha = FD\tan\gamma = (FC + CD)\tan\gamma$$

$$FC = \frac{CD\tan\gamma}{\tan\alpha - \tan\gamma}$$

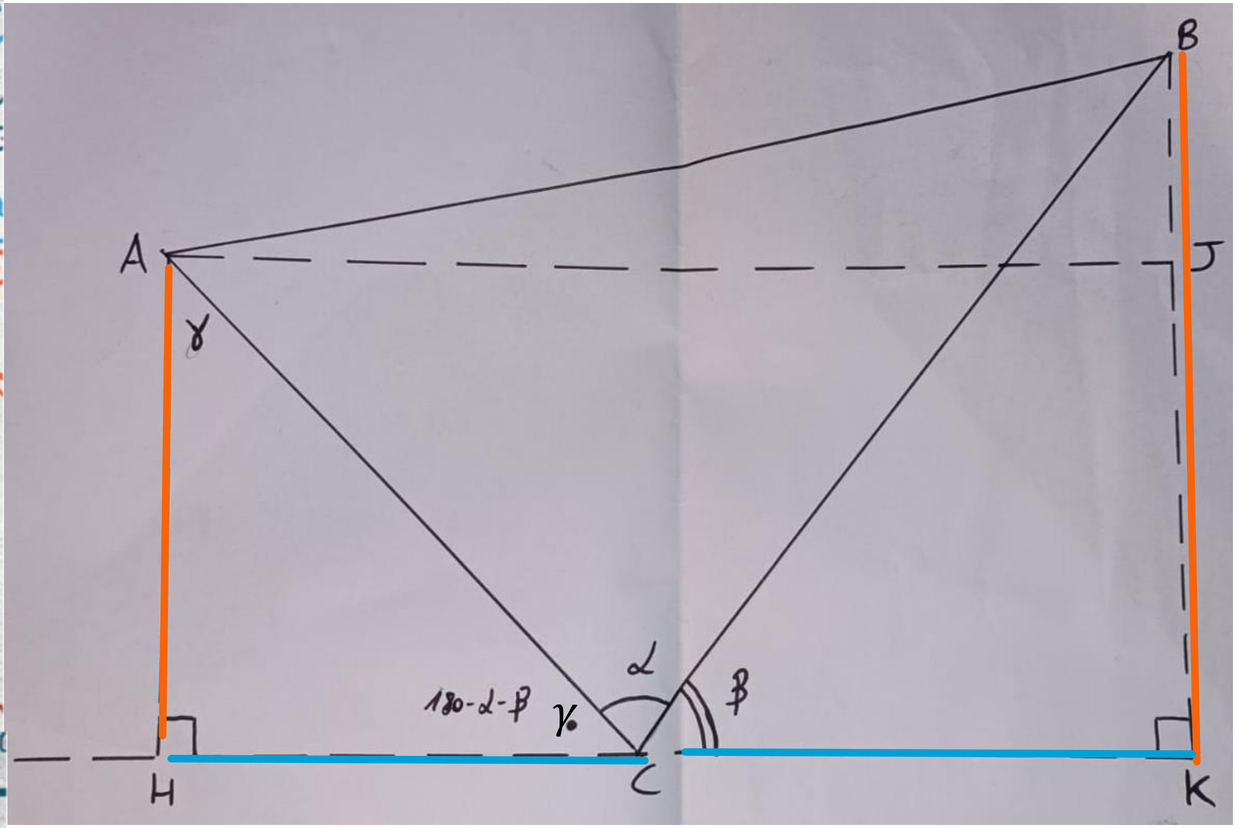


$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$BE = DE\tan\delta$$
$$BE = CE\tan\beta$$

$$DE = \frac{CD\tan\beta}{\tan\delta - \tan\beta}$$

III PROBLEMA: calcolo distanza AB con AC e CB accessibili e gli angoli in C misurabili



$$\begin{cases} BJ = BK - AH = BC\,sen\beta - AC\,sen\gamma \\ HK = HC + CK = BC\cos\beta + AC\cos\gamma \\ AB^2 = BJ^2 + HK^2 = \\ = BC^2 + AC^2 + (AC)(BC)[\cos\beta\cos\gamma - sen\beta\, sen\gamma] \end{cases}$$

$$\cos(\beta+\gamma) = \\ = -\cos(\alpha)$$

$AH = AC\,sen\gamma$

$HC = AC\cos\gamma$

$BK = BC\,sen\beta$

$CK = BC\cos\beta$

15 febbraio 2022

Grazie per l’attenzione

Giovanna Guidone, Liceo Scientifico «T. C. Onesti», Fermo
Sezione LM di Camerino
gioguidone1970@gmail.it