

Liceo Matematico



Unione
Matematica
Italiana

Convegno dei Licei Matematici

05 aprile 2022

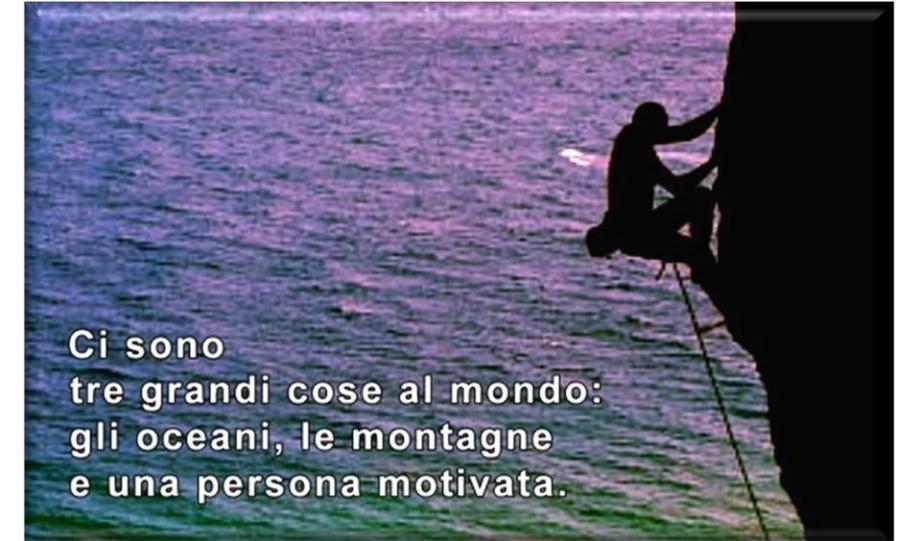
Laboratorio di geometria la quarta dimensione ed oltre

Anna Amirante e Ilaria Veronesi



*“La prima fonte della conoscenza è la meraviglia.
Dalla meraviglia nasce l’interesse.
Dall’interesse nasce la motivazione.
Dalla motivazione nasce l’impegno a imparare.
Dall’impegno a imparare nasce la gioia della conoscenza.
E la gioia è, a sua volta, fonte di meraviglia”(Aristotele)*

matematica come *“costruzione culturale”*
integra idee e metodi nuovi
rigorosa, ma flessibile
docente come *“mediatore didattico”*

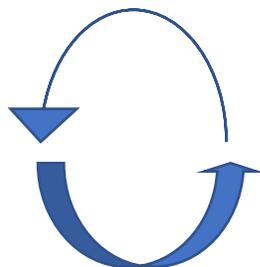


Approccio metodologico *laboratoriale* costruttivista

progetto Lauree Scientifiche(PLS) e Liceo Matematico:

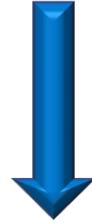
- attività di progettazione e realizzazione dei laboratori;
- attività di approfondimento disciplinare;
- attività di ricerca e sperimentazione metodologica nell'ambito della didattica formale, non formale e informale;
- attività di libera creatività e di mediazione scientifica sul territorio.

Laboratorio di Geometria in percorso di **ricerca-azione**.



Metodologie ed Obiettivi

{ Learning by doing
Mastery learning
Epistemologia operativa



Il sapere è conoscenza in azione = produrre pensiero a partire dall'azione

Lo **scopo** della ricerca sperimentale è la **comprensione**

Lo **scopo** della ricerca-azione è il **cambiamento**



Brainstorming= cervelli in azione

Unità Didattiche

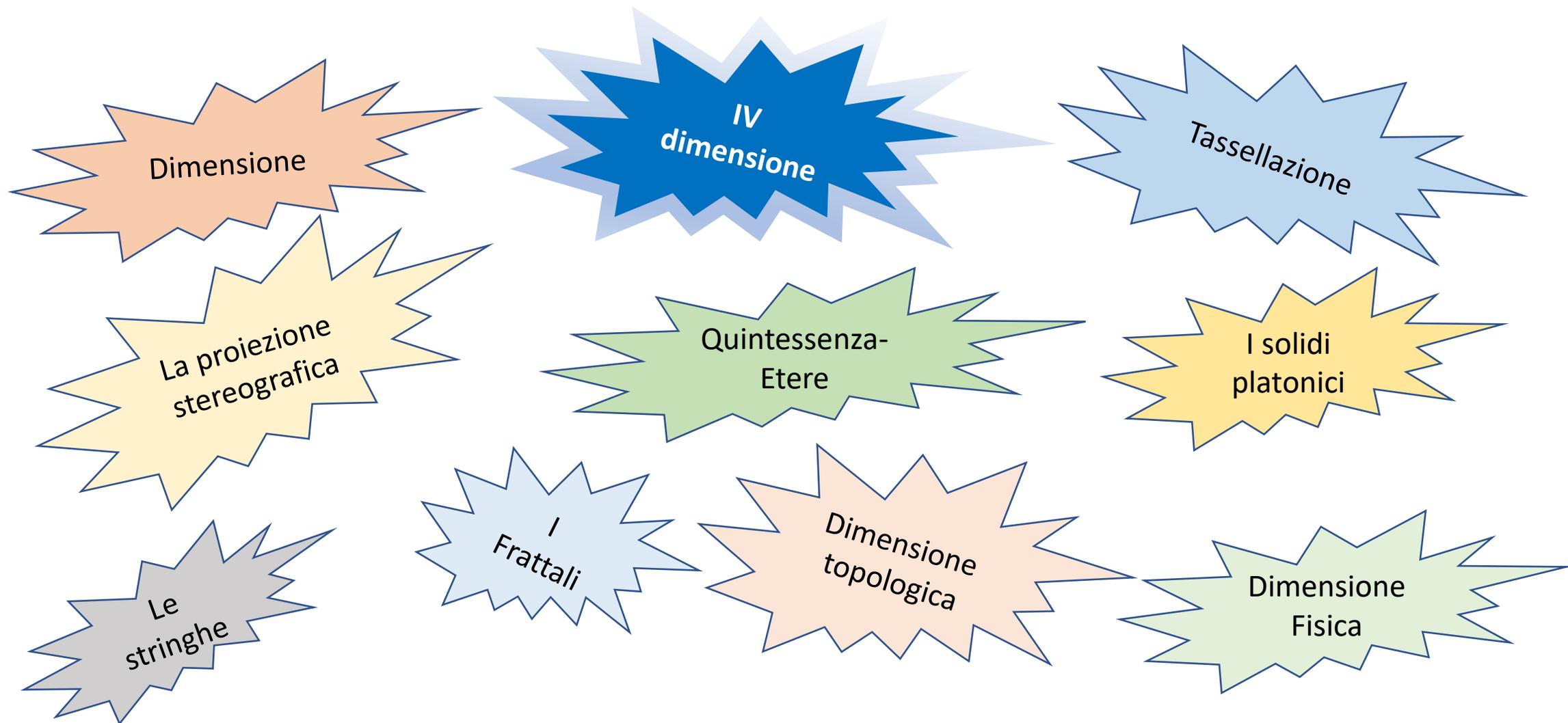
- la Tassellazione
- **la IV Dimensione**
- i Solidi Platonici
- la Quintaessenza-Etere
- la Proiezione Stereografica
- i Frattali
- La Dimensione Topologica
- La Dimensione Fisica
- Le Stringhe

Obiettivi di apprendimento:

- leggere ed interpretare le informazioni
- Usare il linguaggio specifico
- Confrontare le fonti ed inventare un modello
- Cercare esempi della realtà

Obiettivi didattici: dibattere in classe , esprimendo la propria opinione e confrontarla con quella dei compagni

Argomenti trattati



Oltre la terza dimensione

Vi siete mai chiesti, o almeno, avete mai provato ad immaginare uno spazio con un numero di dimensioni superiori alla nostra?

«... così, osservano i naturalisti, una pulce ha pulci più piccole che si alimentano di lei; e queste, a loro volta sono morse da altre ancora più piccole; così all'infinito...»

(Swift- *Poetry, a Rhapsody*)

«La linea è costituita da un numero infinito di punti;
il piano da un numero infinito di linee;
il volume da un numero infinito di piani;
l'ipervolume da un numero infinito di volumi...»

(Borges - *Il libro di sabbia*)



$$\text{Creatività} = n(\text{Nuovo}) \cdot u(\text{Utile})$$

Poincarè, nel 1912 rivede il concetto di dimensione:

- la linea era unidimensionale perché era possibile dividerla in due parti tagliandola in un unico punto di dimensione nulla;
- per il piano, di dimensione 2, si deve tracciare una curva chiusa di dimensione 1.
- per induzione, si può pensare che per avere uno spazio n-dimensionale, basta tracciare o tagliare su di esso un frammento di dimensione n-1.

Il teorema della *Tassellazione* :

il punto ha dimensione zero,
la retta dimensione 1,
il piano dimensione 2
lo spazio dimensione 3.

Mosaici-dimensione.



La Dimensione

“la dimensione (reale) di un oggetto è N , se occorrono N numeri reali per individuare un punto dell'oggetto, tali numeri si chiamano le coordinate del punto.”

Vi sono:

-oggetti a dimensione 1 (es. retta)

- oggetti a dimensione 2 (es. la superficie di una sfera); le coordinate: latitudine e longitudine, servono due numeri reali per individuare un punto sulla sfera

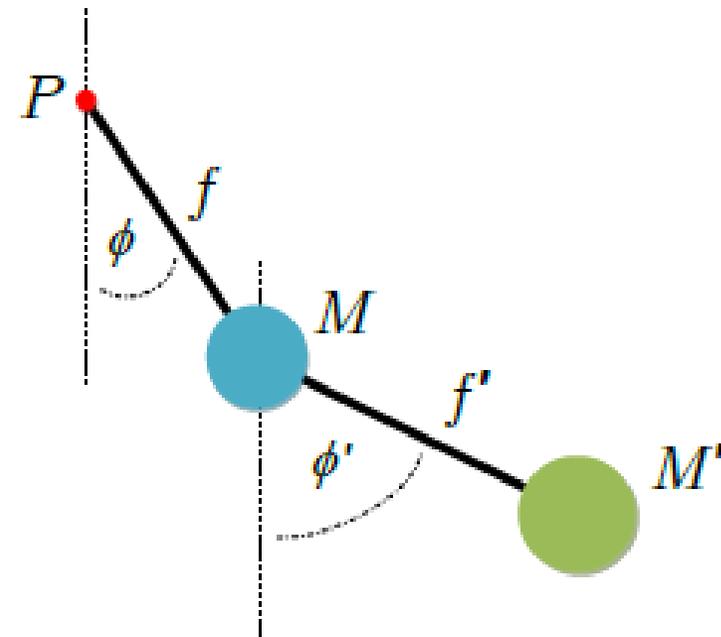
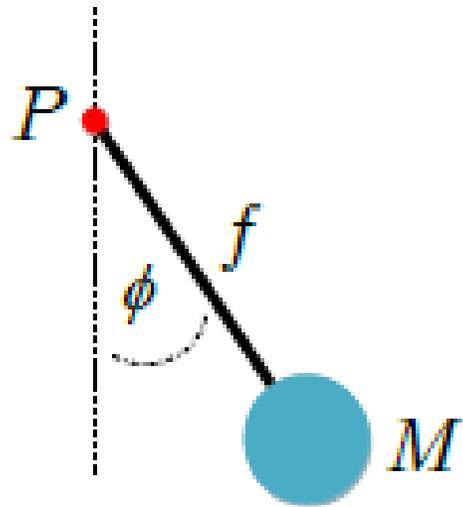
-oggetti a dimensione 3 (es. spazio fisico in cui viviamo); 3 coordinate (es. le coordinate cartesiane, oppure latitudine, longitudine ed altitudine), occorrono 3 numeri reali per individuare un punto dello spazio

Ad esempio, un pendolo è ancorato ad un vincolo libero di muoversi sotto l'effetto della forza peso.

Per individuare la posizione del pendolo in un determinato istante t è necessaria una sola coordinata.

se vincoliamo al primo un secondo pendolo, cosa succede ?

Possiamo parlare lo stesso di Dimensione 1?



Matematica ed Immaginazione

Bellissima la metafora usata da “Il matematico è il sarto della classe media della scienza; confeziona abiti comodi per chi li sa indossare”

Kasner e Newman, *Matematica ed immaginazione*(1989)

In questo senso esiste uno spazio di quattro dimensioni, di multidimensioni.

In questa accezione Hamilton introduce gli spazi di *configurazioni* che codificano tutti i messaggi dell'era digitale grazie a dei codici:

Google sicuramente è uno spazio multidimensionale!



Quarta dimensione?

Il mondo in cui viviamo è tridimensionale ...

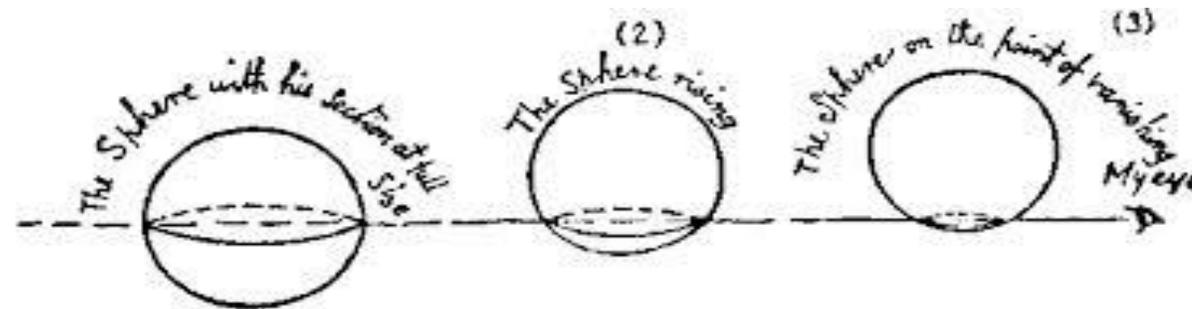
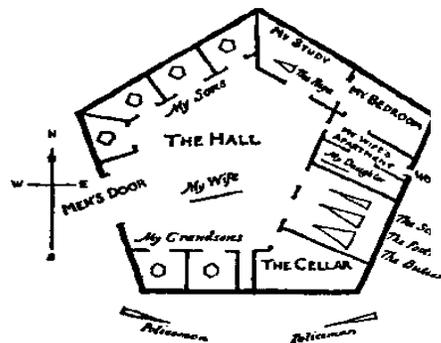
... è difficile comprendere l'esistenza di ulteriori dimensioni oltre a quelle che conosciamo.

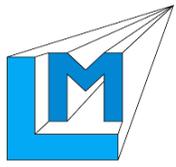


Come rendere l'idea?

« ...Voi che avete due occhi dotati della conoscenza prospettica [...] voi che potete "vederlo" per davvero, un angolo [...] **come potrò mai render chiara a voi l'estrema difficoltà che incontriamo noi, in Flatlandia, per riconoscere le nostre rispettive configurazioni?**... ma voi, signore, mi avete mostrato la verità su tutti i miei compatrioti del paese delle due dimensioni portandomi con voi nel paese delle tre. **Che problema v'è ora, a portare il vostro servitore in un secondo viaggio nella regione benedetta della quarta dimensione, dove potrò guardare dall'alto con voi una volta di più il paese delle tre dimensioni...** Sfera: Ma dov'è il paese delle quattro dimensioni? Io[quadrato]: Io non lo so; ma il mio maestro senza dubbio lo sa...»

Un testo, che risulta un classico per un matematico, per stimolare la creatività-curiosità





Liceo Matematico

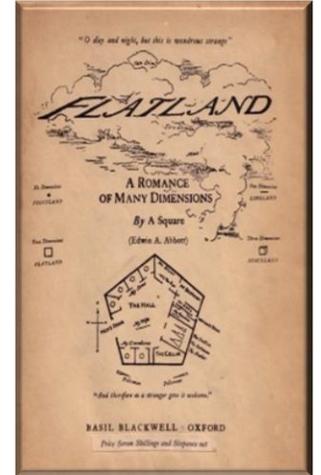
Flatlandia



Immaginiamo che esista un mondo bidimensionale popolato da creature bidimensionali, come nel celebre racconto fantastico di Abbott, Flatlandia. Come possono queste creature comprendere il nostro mondo tridimensionale?

Jonathan Swift, *I viaggi di Gulliver*

Lewis Carroll, *Alice nel Paese delle Meraviglie*



E come un quadro possa suggerire la quarta dimensione o come si possa rappresentare in 2D oggetti 3D?



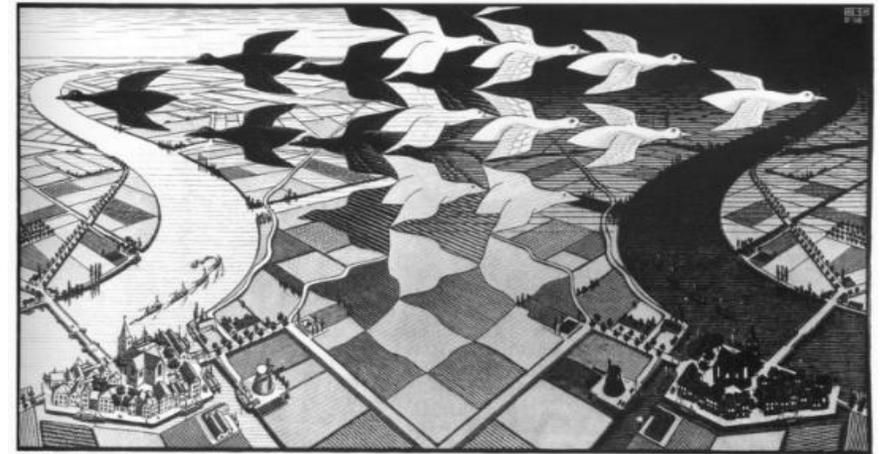
...immaginando una dimensione

Per avere la “ *dimensione* ” aumentata dobbiamo compiere alcune trasformazioni:

da un poligono regolare e convesso come può essere un parallelogramma, dobbiamo passare ad un poligono irregolare e concavo , spezzando le giunzioni con interruzione delle rette parallele;

questo è il primo passo della metamorfosi di un mosaico geometrico in uno organico.

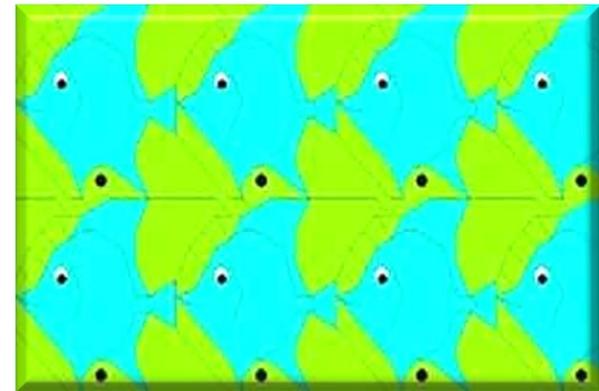
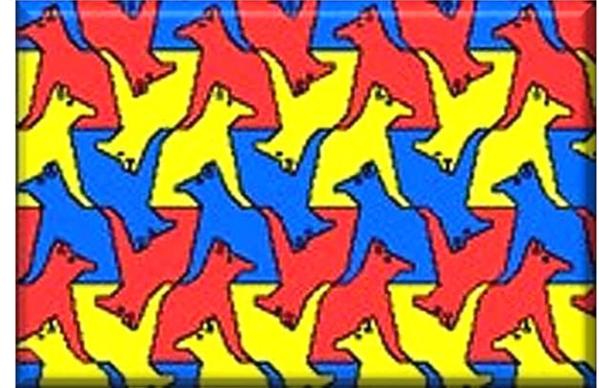
Continuiamo con l’inserimento nel piano di una tessera di forma organica, come la figura di un pesce, a cui, per essere enfatizzata, si può aggiungere un cerchio , come un occhio e così ad incastro da destra a sinistra gruppi simmetrici di colore uguale e diverso...



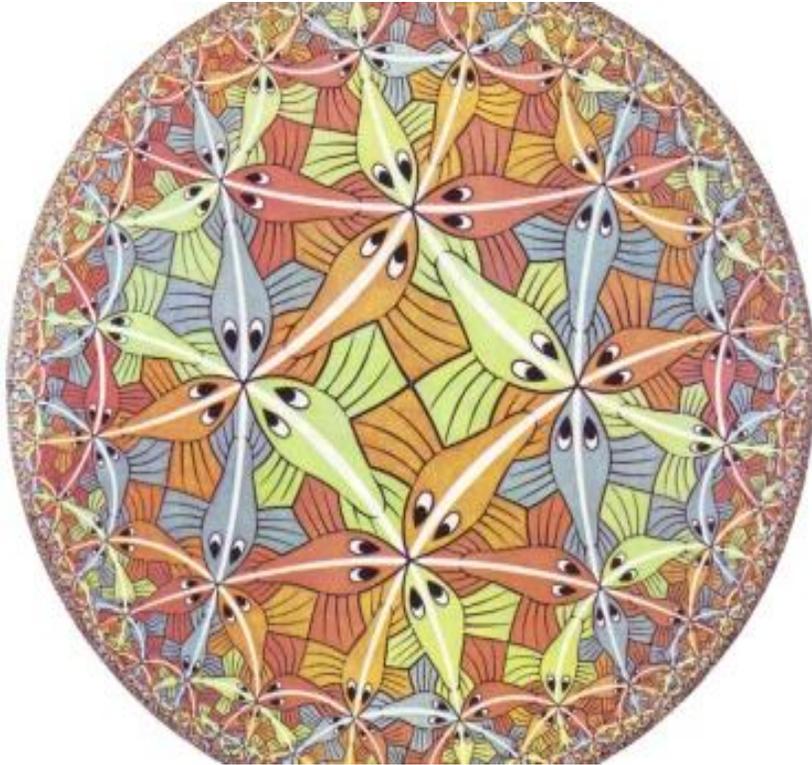
Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle; le idee come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è un posto permanente per la matematica brutta. (Hardy, 1989)

Escher ha “creato” arte matematica o matematica artistica facendoci vedere la “quarta dimensione”.

I suoi mosaici ed i suoi dipinti illustrano l'infinito, il concetto di limite, la proporzionalità, il rapporto tra rappresentazioni piatte del piano e dello spazio. La bidimensionalità diventa tridimensionalità e la tridimensionalità diventa quarta dimensione, il geometrico organico, il finito infinito, un insieme il suo complementare, la logica assurdo, il paradosso...



Escher usa il modello iperbolico di Poincarè per tassellare un cerchio



Un modello di geometria iperbolica è riuscito a risolvere il problema della tassellazione infinita di uno spazio finito:

un'applicazione matematica nel mondo dell'arte.

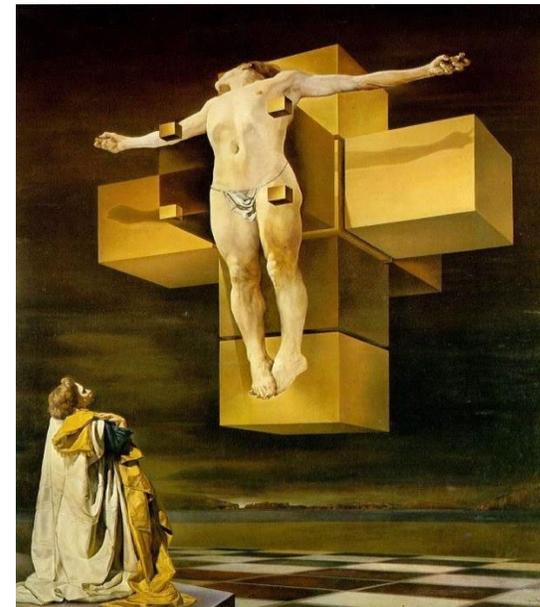
La Matematica è bella sia quando interpreta la natura, l'arte, ma anche quando si occupa delle sue cose....Leibnitz fusione delle due culture, Cartesio...Blake dice che la poesia finisce quando finisce la contemplazione e incomincia la spiegazione... tanti parlano della luna, ma Newton scopre che la Luna cade come la mela dall'albero...e questo è una bellissima immagine poetica. (Odifreddi, 2016, Openday Pisa)

Picasso-Duchamp-Dalì

Nelle arti plastiche esiste la quarta dimensione...che non è un'entità dei fisici od un'ipotesi matematica, né un'illusione ottica: è reale, e può essere percepita e sentita (Max Weber –*La quarta dimensione dal punto di vista plastico*, 1910).

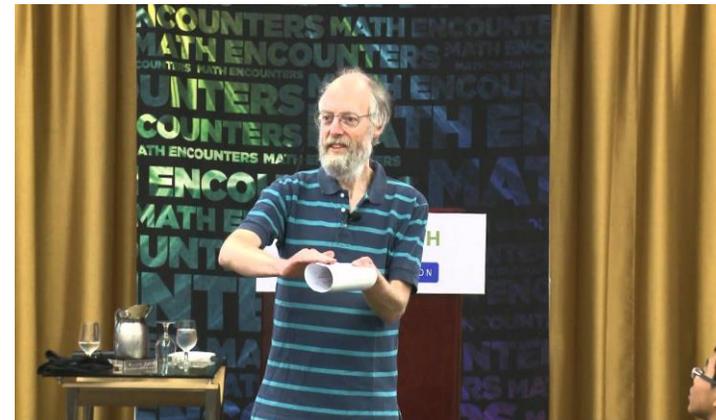
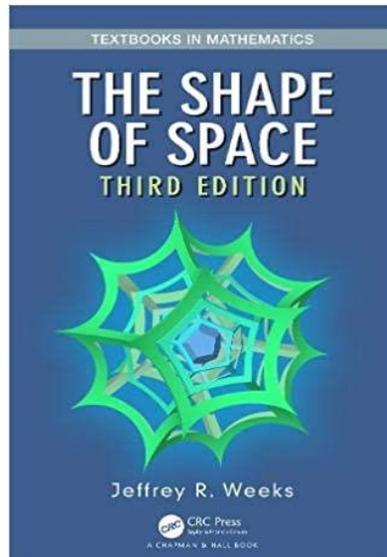
“lo dipingo gli oggetti come li penso, non come li vedo” (Picasso).

Libertà nello spazio e nella forma, la quarta dimensione si confonde con l'infinito: Marcel Duchamp con lo spazio-tempo statico che definisce “parallelismo elementare”,
L'idea dell'ombra porta Dalì nella *Crocifissione* alla rappresentazione dell'ipercubo.



...e la tecnologia?

Oggi, lo sviluppo tecnologico ha facilitato l'avvicinamento fra arte e matematica: ciò che fa Jeff Weeks nella sua *“arte cinematografica”*, sviluppando diverse applicazioni software (Kaleido Tile) per creare animazioni nel piano e nello spazio di mosaici: la linea fra geometrico organico diventa ancora più sottile.



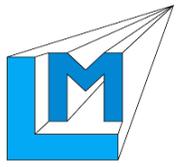
- **Metodo delle sezioni:** si tratta di intersecare un oggetto tridimensionale con il piano P (mondo bidimensionale) in molti modi diversi e mostrare le intersezioni ottenute alle creature piatte
- **Metodo della proiezione:** si tratta di “proiettare” un oggetto tridimensionale opportunamente sul piano P e mostrare la proiezione alle creature piatte
- **Metodo delle ombre:** si tratta di usare l’ombra per intuire una dimensione *umentata*

<https://youtu.be/OT0KRMHzZqs?list=PLw2BeOjATqrsOTdDhfDNPLUf-9vhqhDaj>

E quindi abbiamo provato a proiettare i solidi platonici con questo metodo:

https://youtu.be/R9vH_x5UCik?list=PLw2BeOjATqrsOTdDhfDNPLUf-9vhqhDaj

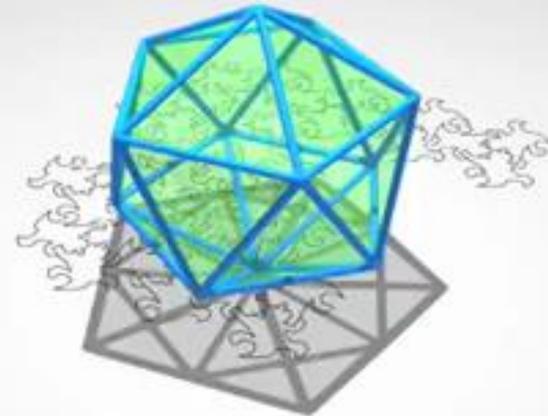
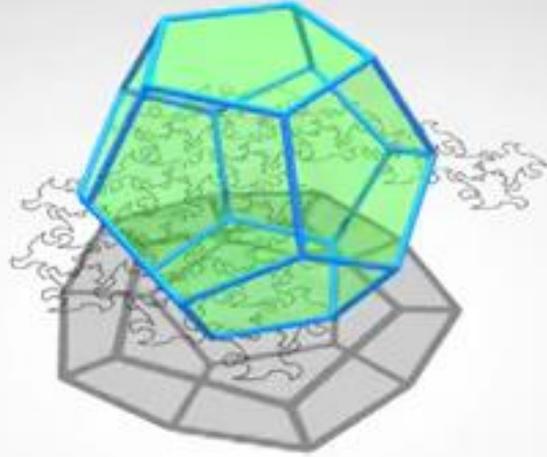
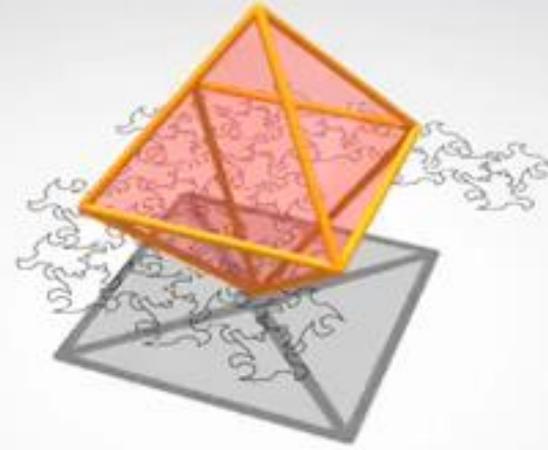
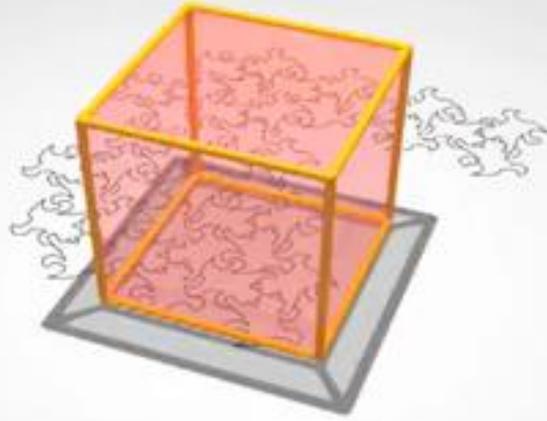
Non poteva mancare un po’ di Storia della Matematica!!!



Liceo Matematico



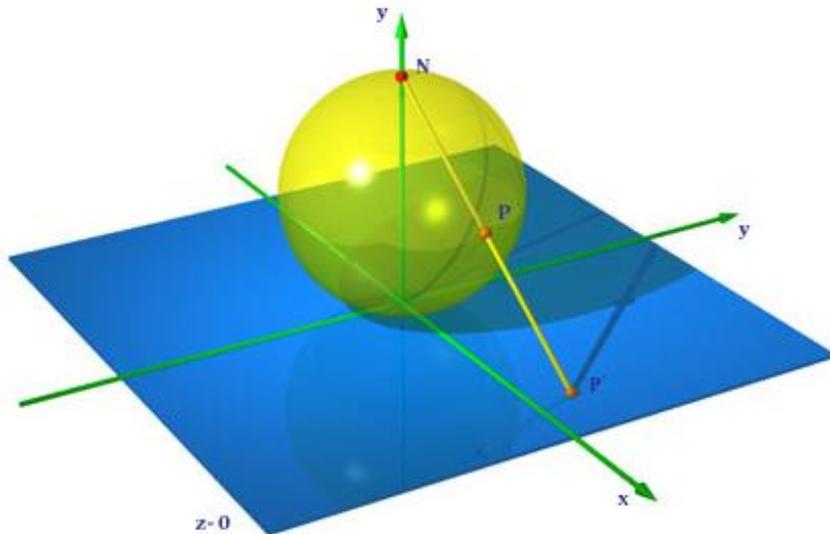
Unione
Matematica
Italiana



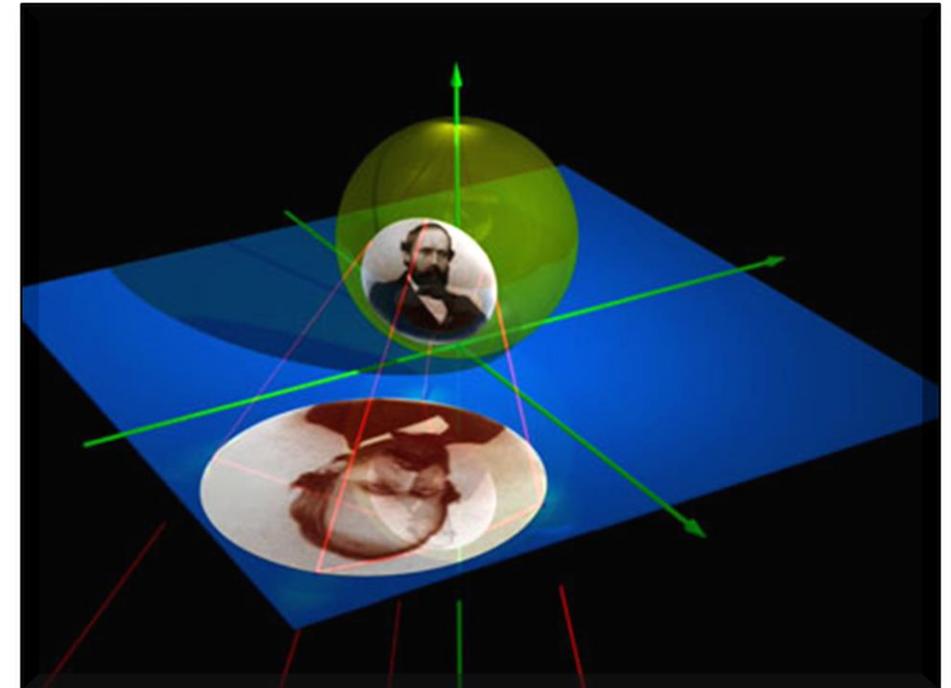
Proiezione stereografica

applicata alla costruzione della quarta dimensione con l'aiuto del Teorema di Hilbert

In un generico sistema di assi cartesiani xyz di centro O , data una sfera di raggio unitario di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, avente come polo Nord il Punto $N(0,0,1)$ e polo Sud il punto $S(0,0,-1)$ ove è tangente al piano π di equazione $z=-1$, si dice *proiezione stereografica* di un generico punto P appartenente alla sfera il punto P' ottenuto dall'intersezione del piano π e la retta passante per il polo Nord e il punto P stesso.

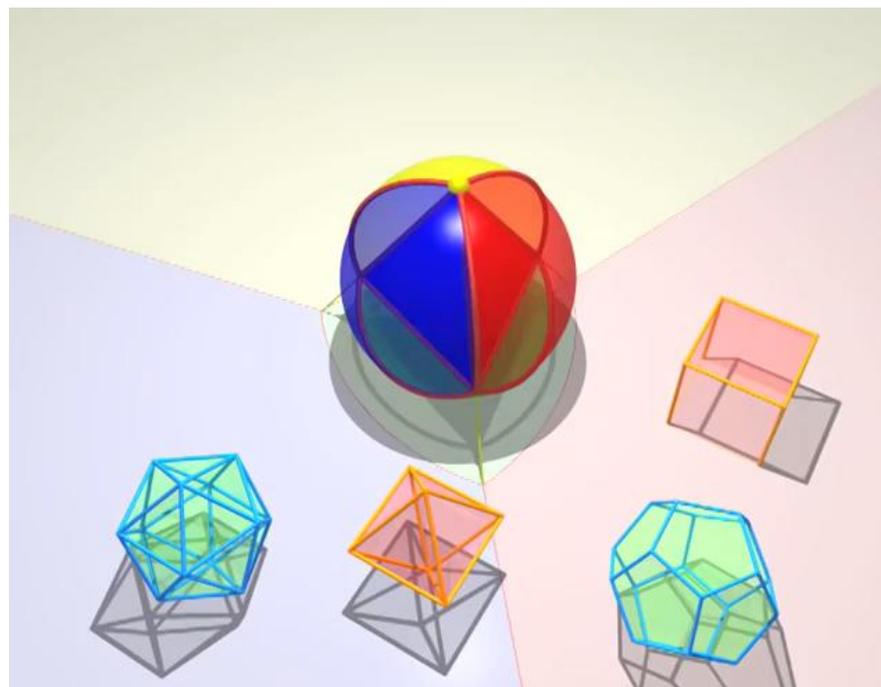
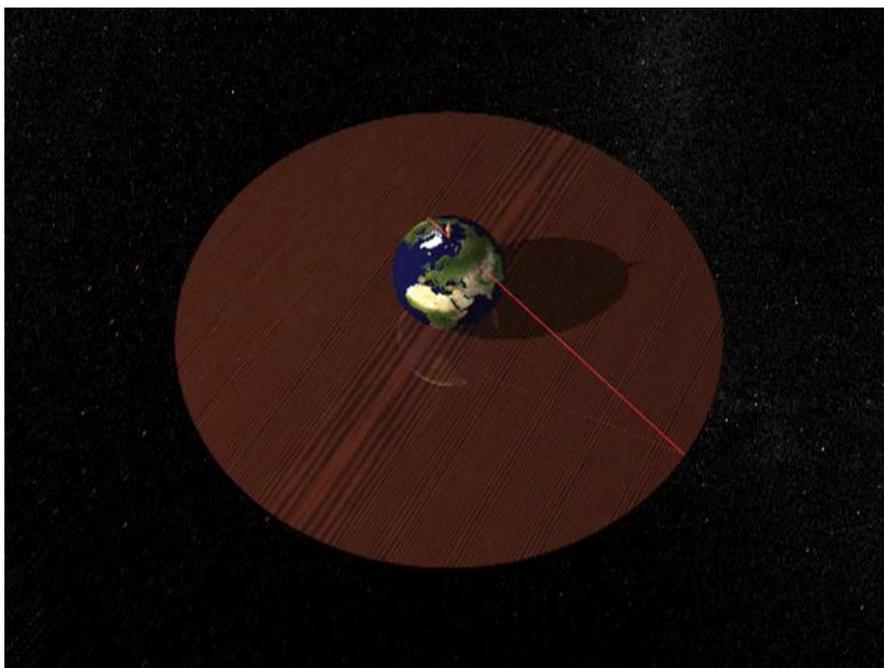


corrispondenza biunivoca tra la superficie della sfera di dimensione N (meno il polo nord) e lo spazio di dimensione N



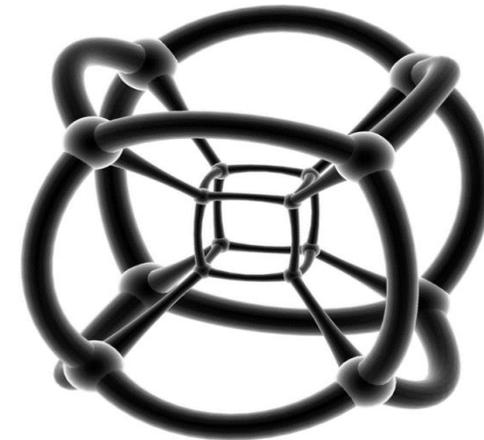
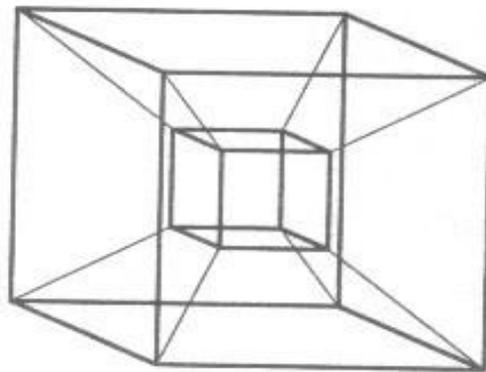
Esempi di proiezioni stereografiche di solidi

Le figure ottenute mediante la proiezione stereografica dei poliedri regolari preservano il numero di vertici, spigoli e facce del solido da cui sono state generate

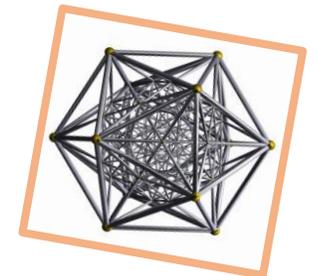


La quarta dimensione

La Proiezione Stereografica dell'Ipercubo . Proiettiamo stereograficamente l'ipercubo, con le sue 8 celle 3D, 24 facce, 32 spigoli, 16 vertici. Procediamo per passi:
Inscriviamo l'ipercubo nella 3-sfera - "Gonfiamo" l' ipercubo sulla 3-sfera - Proiettiamo stereograficamente l'ipercubo.

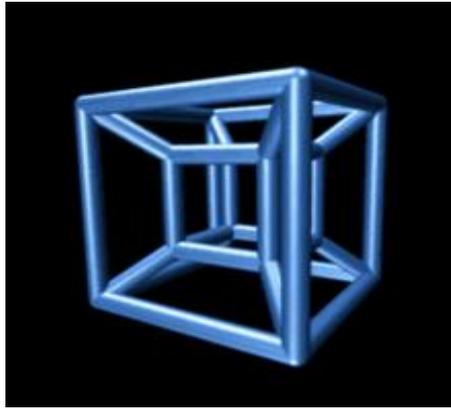


Possiamo applicare **la proiezione stereografica ad un policoro quadridimensionale:** otteniamo una figura quadridimensionale che conserva il numero di vertici spigoli e facce del policoro iniziale.



<https://youtu.be/OB47X0DgkSs?list=PLw2BeOjATqrsOTdDhfDNPLUf-9vhqhDaj>

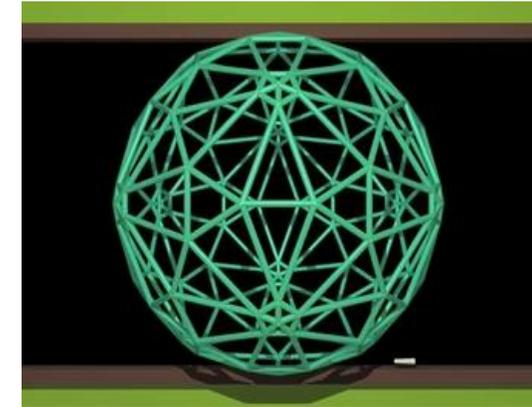
I policori regolari



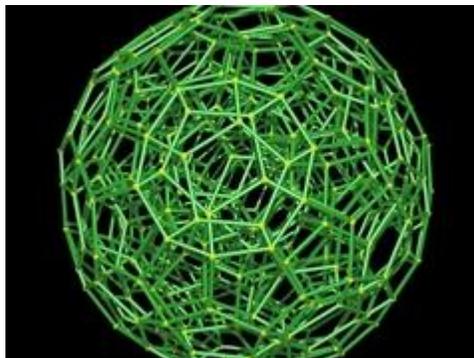
Ipercubo

- 16 vertici
- 32 spigoli
- 2D 24 facce
- 3D 8 cubi

- 600 vertici
- 1200 spigoli
- 2D 720 pentagoni
- 3D 120 dodecaedri

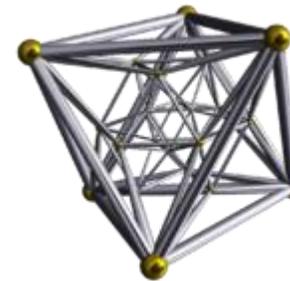


Centoventicelle



Seicentocelle

- 120 vertici
- 720 spigoli
- 2D 1200 pentagoni
- 3D 600 tetraedri



Ventiquattrocelle

- 24 vertici
- 96 spigoli
- 2D 96 triangoli
- 3D 24 ottaedri

In geometria quadridimensionale, l'ipertetraedro è uno dei sei policori regolari.

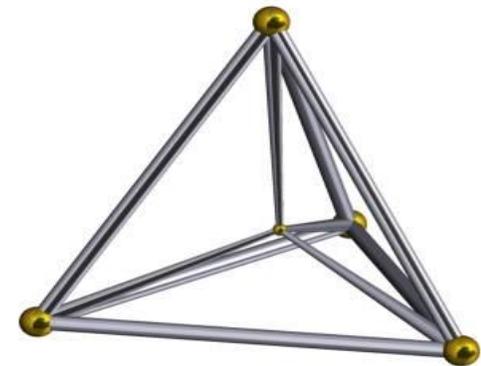
È il policoro regolare più semplice, la naturale estensione in dimensione 4 del triangolo e del tetraedro.

L'ipertetraedro regolare è delimitato da tetraedri regolari, ed è uno dei sei politopi regolari, rappresentato dal simbolo di Schläfli {3.3.3}.

Con le coordinate cartesiane (x, y, z, w) sulla sfera e (X, Y, Z) le coordinate dello spazio, la proiezione e la sua inversa sono date dalle seguenti formule :

$$(X, Y, Z, W) = \left(\frac{2x_1}{1-w}, \frac{2y_1}{1-w}, \frac{2z_1}{1-w}, -1 \right)$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{2X}{1+X^2+Y^2}, \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, \frac{-1+X^2+Y^2}{1+X^2+Y^2} \right).$$



il Semplice

(...stiamo sconfinando nella **Dimensione Topologica**)

è il politopo n -dimensionale col minor numero di vertici.

Il semplice di dimensione zero è un singolo punto, il semplice bidimensionale un triangolo e quello tridimensionale un tetraedro. Il semplice n -dimensionale ha $n + 1$ vertici.

Come tutti i politopi, il semplice ha facce di ogni dimensione: queste sono tutte a loro volta semplici.

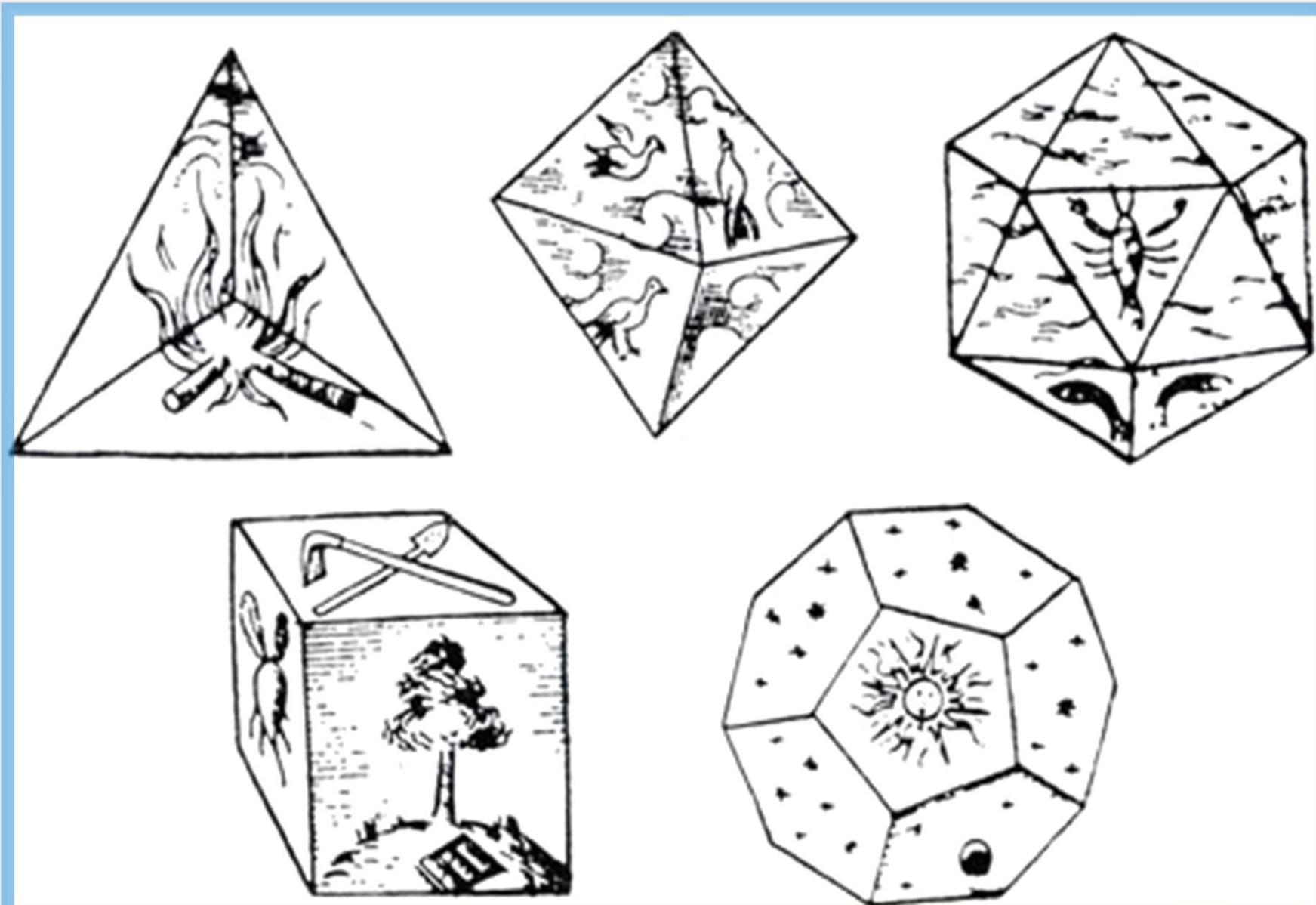
Per la sua semplicità, il semplice è generalmente ritenuto il "blocco base" con cui costruire spazi-dimensionali più complicati tramite un processo detto triangolazione.

Ad esempio

- Un semplice 1-dimensionale è l'involuppo di due punti, ovvero un segmento.
- Un semplice 2-dimensionale è l'involuppo di tre punti non allineati, ovvero un triangolo.
- Un semplice 3-dimensionale è l'involuppo di quattro punti non complanari, ovvero un tetraedro.
- Un semplice 4-dimensionale ha 5 vertici ed è chiamato ipertetraedro.

Dai solidi platonici alla Quarta dimensione

<http://progettosigma.it/wp-content/uploads/2017/02/LICEO-SOLIDI-PLATONICI-E-ARCHIMEDEE.L.P.P.I.>



l'etere o quintessenza o equilibrio

Il **dodecaedro** iniziò a rappresentare fin dal Rinascimento, l' **etere** o “**Quintessenza**” come concetto di forza vitale ed immortalità ma anche come mezzo attraverso il quale si propagava la luce nell' Universo.

<https://youtu.be/xgR6h43XyCo>

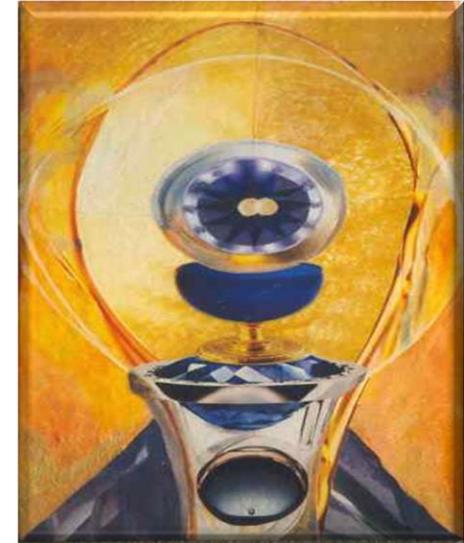
Alchimisti

Elementi naturali

Sintonia



quintessenza



La sequenza astrologica degli elementi rappresenta il modello su cui si manifesta l'energia per la nostra vita, ai quattro regni, ai quattro evangelisti, alle quattro stagioni, ai quattro punti cardinali.

Anche nel cosmo abbiamo le quattro stelle: Antares, Aldebaran, Regolo e Formalhaut che erano considerate i guardiani dei solstizi e per questo poste ai quattro angoli del cielo

...e così il quinto elemento ingloba tutto l'universo in esso.

- **Aristotele:** tre sono tutte le dimensioni possibili e 'tre volte' equivale a dire 'da tutte le parti'
- **Tolomeo:** cerca di dimostrare la non esistenza di uno spazio di dimensione quattro, concepito solo in uno spazio non visibile
- **Wallis:** la quarta dimensione è 'mostro della natura più improbabile di una chimera o di un centauro...lunghezza, ampiezza e spessore riempiono lo spazio intero: nemmeno la fantasia può immaginare come potrebbe esistere una quarta dimensione di luogo più in là di queste tre'
- **Henry More:** gli spiriti hanno quattro dimensioni
- **Kant:** 'se è possibile che esistano regioni con altre dimensioni, è anche molto probabile che Dio le abbia portate all'esistenza. Tali spazi superiori non apparterrebbero, senza dubbio, al nostro mondo, ma a mondi separati'.

Matematica  Filosofia

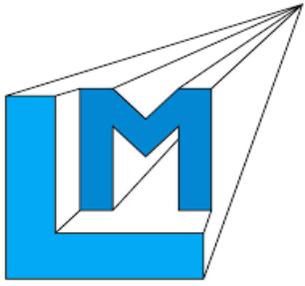
Fino alla Teoria delle Stringhe

- è una teoria che tenta di conciliare la meccanica quantistica con la relatività generale e che potrebbe costituire una teoria del tutto
- si fonda sul principio secondo cui la materia, la radiazione, lo spazio e il tempo siano la manifestazione di entità fisiche fondamentali che sono chiamate *stringhe*
- descrive oggetti che possono avere dimensioni nulle (quindi punti), una dimensione (stringhe), due dimensioni (membrane) o possedere un numero D di dimensioni maggiore di due (D-brane).

Il termine "teoria delle stringhe" si riferisce sia alla teoria bosonica a 26 dimensioni, sia alla teoria supersimmetrica a 10 dimensioni (teoria delle superstringhe).

https://youtu.be/Y_THXlaXgwc

<https://youtu.be/Da-2h2B4faU?t=476>



Liceo Matematico



Unione
Matematica
Italiana

Sembra sempre impossibile finché non viene realizzato

(Nelson Mandela)

Continuerò ad azzardare, a cambiare, ad aprire la mente e gli occhi, rifiutando di lasciarmi incasellare e stereotipare. Ciò che conta è liberare il proprio io: lasciare che trovi le sue dimensioni, che non abbia vincoli (Virginia Woolf)

grazie dell'attenzione

