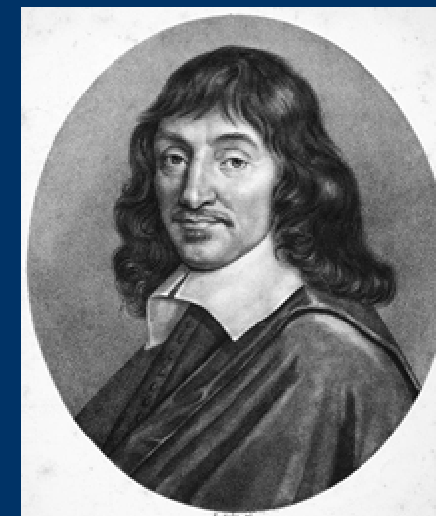
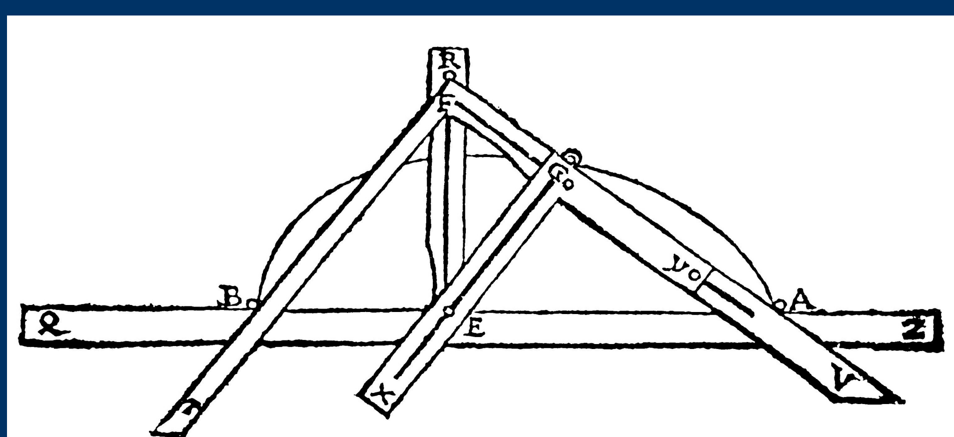
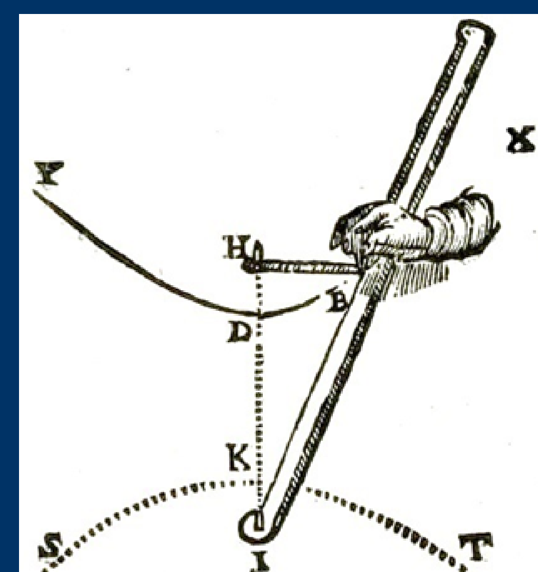
Università di Firenze

Elisabetta Ulivi

Il tracciamento delle curve fino a Descartes







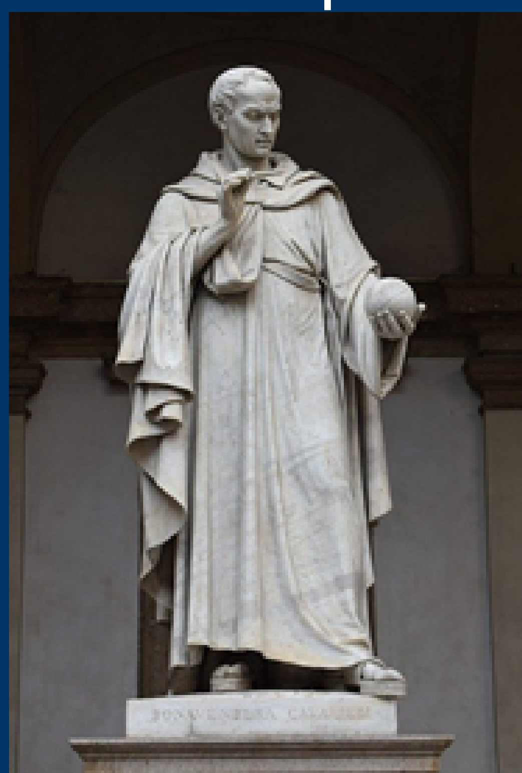
Bonaventura Cavalieri: *Lo Specchio ustorio,* 1632

Costruzioni delle coniche

Per invenzione solida: con strumenti mobili nello spazio

Per punti continuati: con riga e compasso

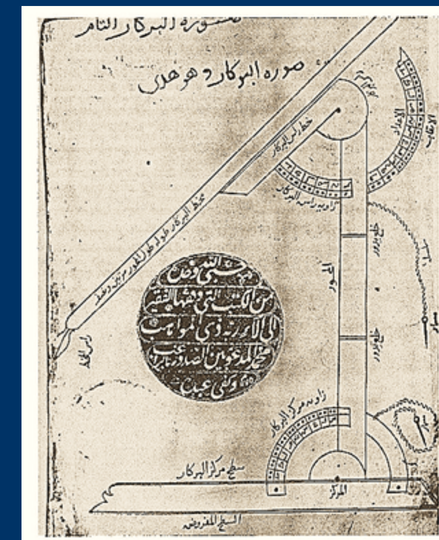
Per invenzione piana vera: con sole righe o con il filo




LO
SPECCHIO
VSTORIO
OVERO
TRATTATO
Delle Settioni Coniche,
ET ALCVNI LORO MIRABILI EFFETTI
Intorno al Lume, Caldo, Freddo, Suono, e Moto ancora.
DEDICATO
A GL'ILLVSTRISSIMI
SIGNORI SENATORI
DI BOLOGNA
Da F. Bonauentura Caualieri Milanese Giesuato di S. GIROLAMO
AVTORE
E Matematico Primario nell'Inclito Studio dell'istessa Città.

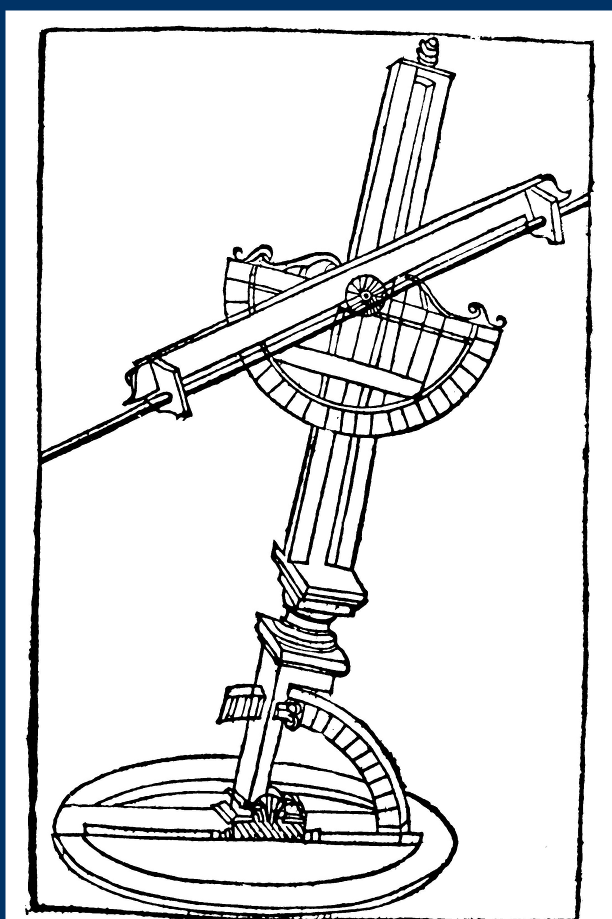
In Bologna, presso Clemente Ferroni 1632.
Con licenza de' Superiori.

Costruzioni delle coniche per invenzione solida
Compassi mobili nello spazio



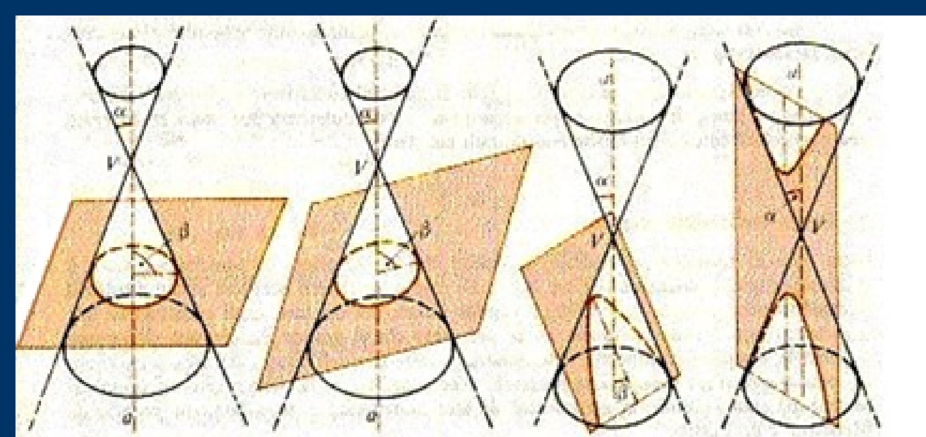
Compassi perfetti degli Arabi (sec. X)

G. B. Benedetti, *De gnomonum usu liber*, 1574
P. Scheiner, *Exegeses fundamentorum gnomonicorum*, 1615
Cavalieri, *Specchio ustorio*, 1632



Apollonio (III-II sec. a.C.), *Coniche*

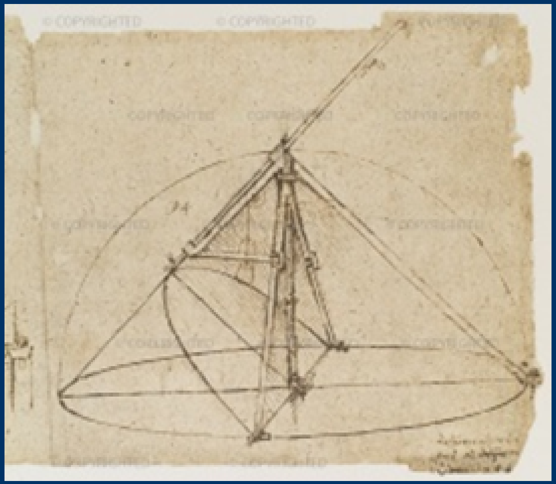
Definizione delle coniche come sezioni di una superficie conica mediante un piano oportunamente inclinato rispetto all'asse

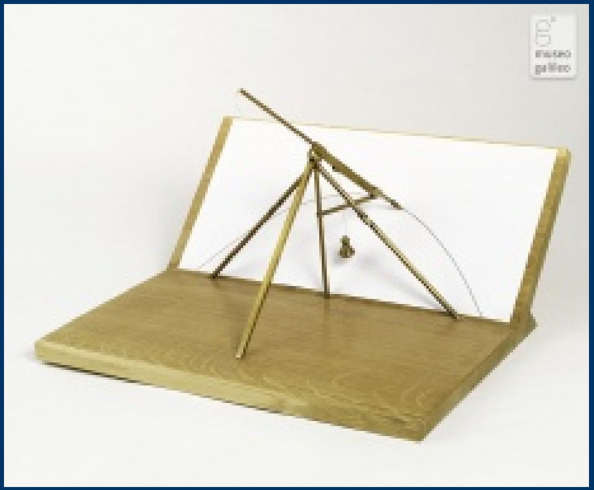


Compassi mobili nello spazio

Compasso perfetto:
ricostruzione del *Giardino di Archimede, un Museo per la matematica*

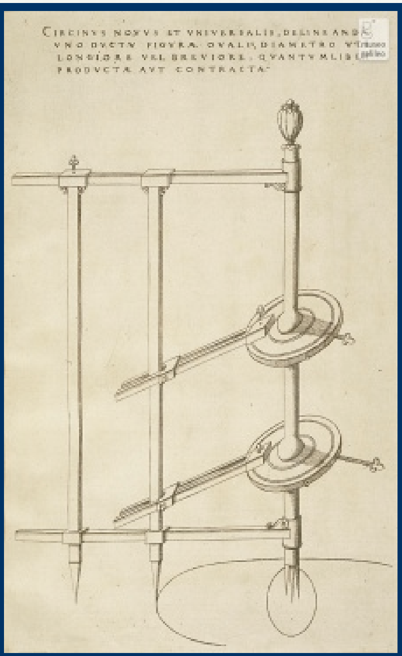
Leonardo da Vinci, *Codice Atlantico*:
compasso parabolico
ricostruzione del *Museo Galileo*





Variante: compasso per tracciare l'ellisse come sezione obliqua di un cilindro:

J. Besson, *Theatrum instrumentorum et machinarum*, 1578

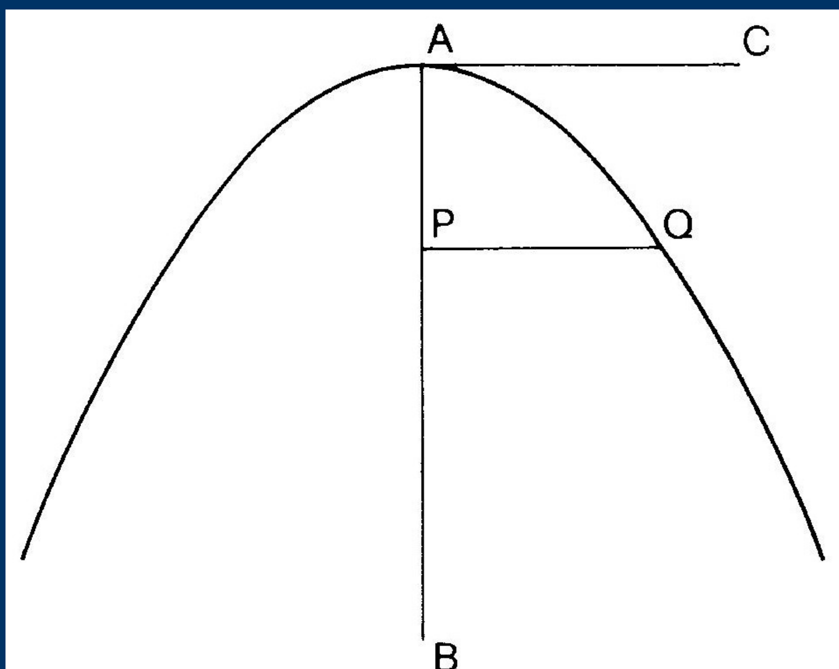


Costruzioni per punti delle coniche:
Tracciamento per medie proporzionali

AC = lato retto

$PQ^2 = AC \bullet AP$ Apollonio, *Coniche*: Prop. I, 11

$x^2 = ay$ Parabola



Eutocio, *Commento alle Coniche di Apollonio* (secc. V-VI)

J. Werner, *Libellus super XXII Elementis conicis*, 1522

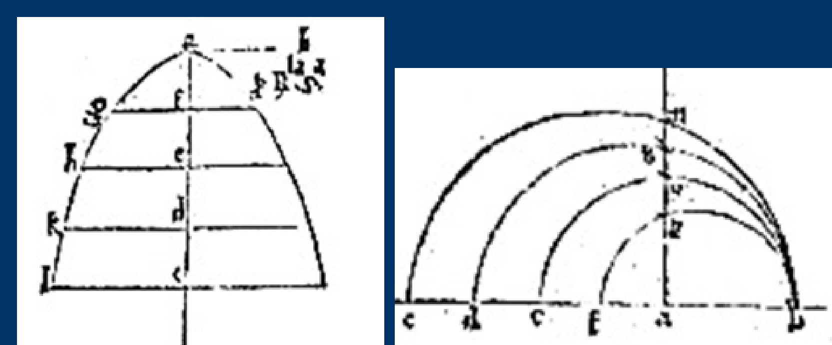
O. Finé, *De speculo ustorio*, 1551

F. Aguillon, *Opticorum libri sex*, 1613

V. Léotaud, *Elementa geometrie practice*, 1631

C. Mydorge, *Prodromus catoptricorum et dioptricorum*,1631

B. Cavalieri, *Lo Specchio ustorio*, 1632



Mydorge, *Prodromus*

Coniche: Prop. I, 13

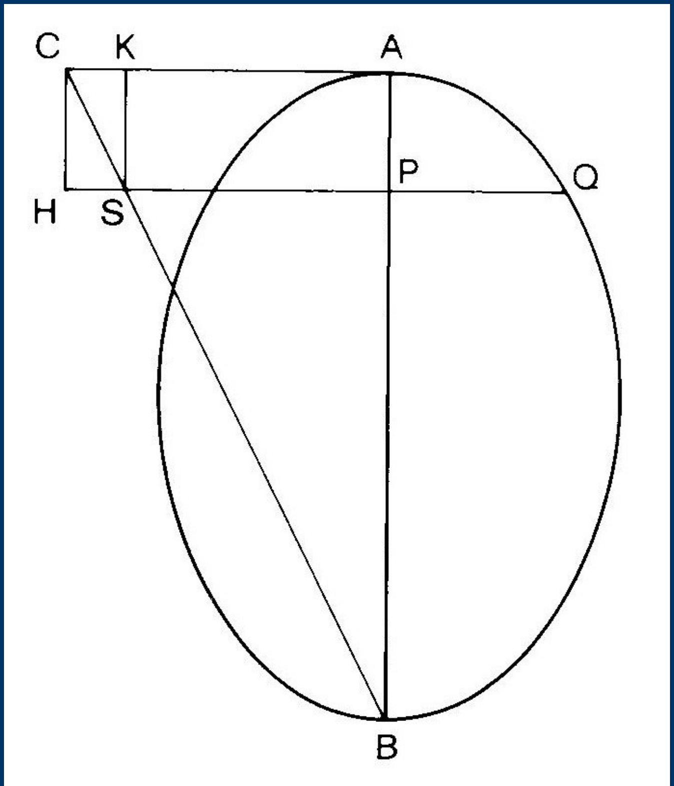
Ellisse

$$PQ^2 = PS \bullet AP = AC \bullet AP - CK \bullet AP = AC \bullet AP - AC/AB \bullet AP^2$$

$$x^2 = ay - a/b \;\; y^2$$

AC = lato retto

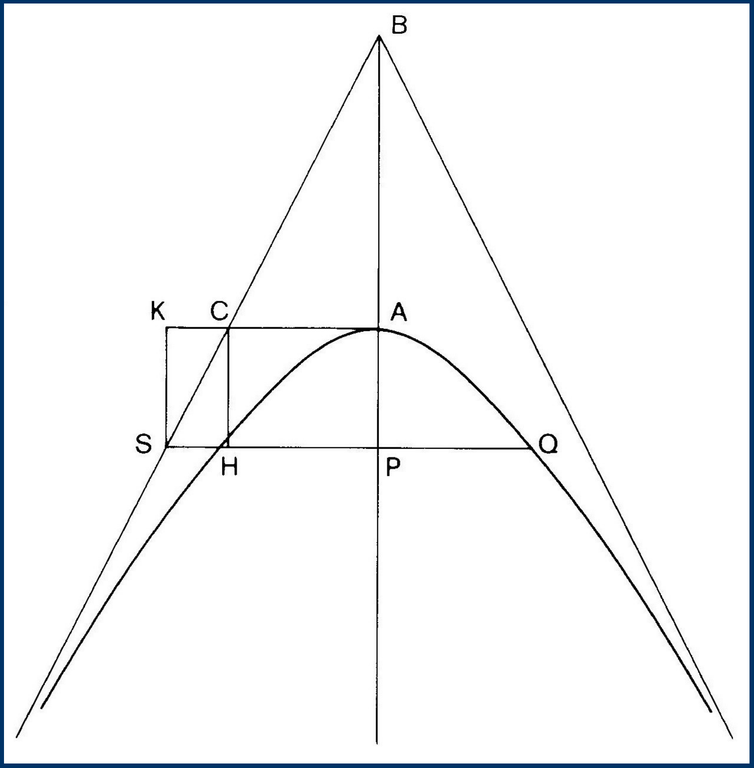
AB = lato trasverso

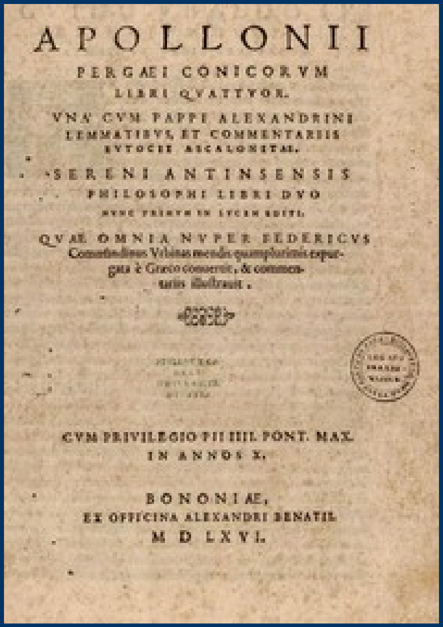


Coniche: Prop. I, 12

Iperbole

$$x^2 = ay + a/b \;\; y^2$$





APOLLONII
PERGAEI CONICORVM
LIBRI QVATTVOR.
VNA CVM PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATIBVS, ET COMMENTARIIS
EVTOCII ASCALONITAE.
SERENI ANTINSENSIS
PHILOSOPHI LIBRI DVO
NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.
QVAE OMNIA NVPER FEDERICVS
Commandinus Vrbinas mendis quamplurimis expurgata è Graeco conuertit, & commentariis illustrauit.

CVM PRIVILEGIO PII IIII. PONT. MAX.
IN ANNOS X.

BONONIAE,
EX OFFICINA ALEXANDRI BENATII.
M D LXVI.

Costruzione per punti di curve algebriche di ordine superiore al secondo prima di Descartes

Cissoide di Diocle

Concoide di Nicomede

Proporzionatrice prima

Proporzionatrice seconda
(o figura ovata)


DELL'ARMONIA
ASTRONOMICA,
ET GEOMETRICA
Di Theofilo Bruni Veronese.

PARTE SECONDA.

Nella quale si contengono tutte le operationi Geometriche all'uso humano utili, & necessarie parte dagli Antichi, & Moderni scrittori latini raccolte, & facilitate, & molte nouamente trouate, specialmente circa'l corpo, & figura del ouo, & quattro proportionali, & quadratura del circolo, come nel seguente foglio sommariamente il tutto sarà esposto.

Dottrina sottilissima, & utilissima à gl'Architetti, Geometri Prattici, Intendenti di Guerra, & Artefici, che à loro seruono, & ad ogni curioso ingegno.

DEDICATA ALL'ILLVSTRISS. SIG.
GIOVANNI GIVSTINIANO.

mihi æquale quadratum, & circulum, & corpora alia exhibeo in capite XI.
GEOMETRICES ABDITA PANDIT.
Omnigenas proportiones pario, &

In VICENZA, Per li Heredi di Francesco Grossi. 1631.
Con licenza de' Superiori.

Cissoide di Diocle

Diocle (secc. II-I a.C.)

Eutocio, *Commento al De sphaera et cylindro di Archimede*

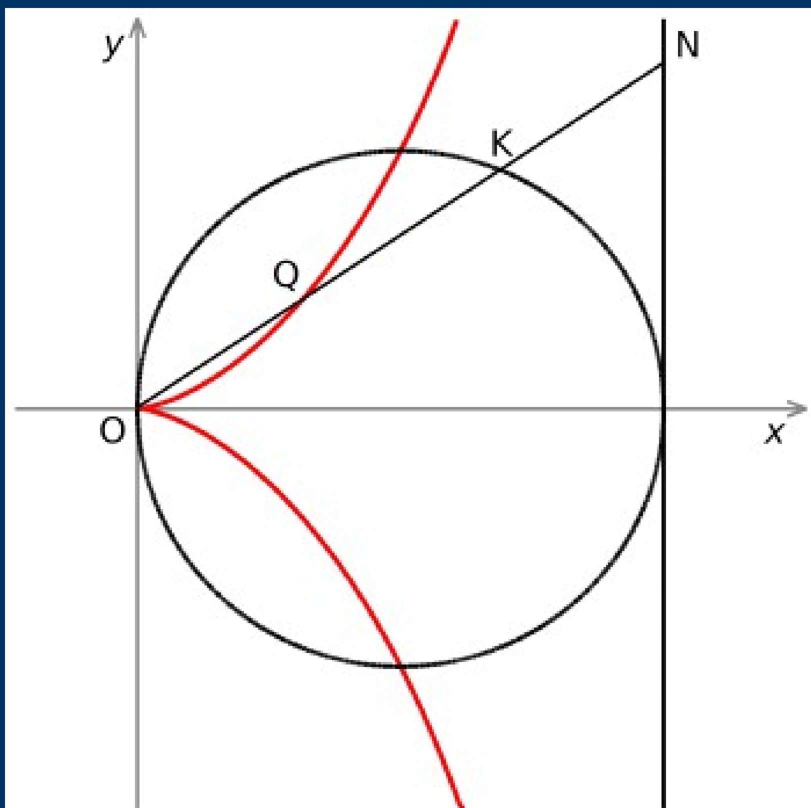
Basilea, 1544

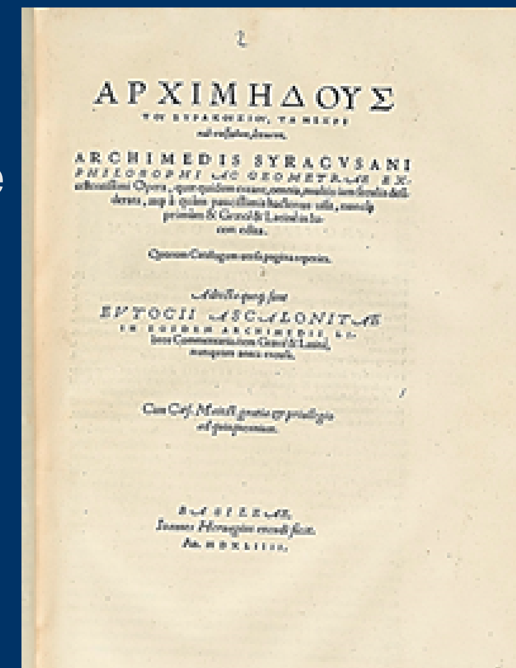
$\kappa\acute{\iota}\sigma\sigma\grave{o}\varsigma$ = edera

Inserzione di due medie proporzionali

Duplicazione del cubo

$OQ = KN$




ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ARCHIMEDIS SYRACVSANI

PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX-

EVTOCII ASCALONITAE

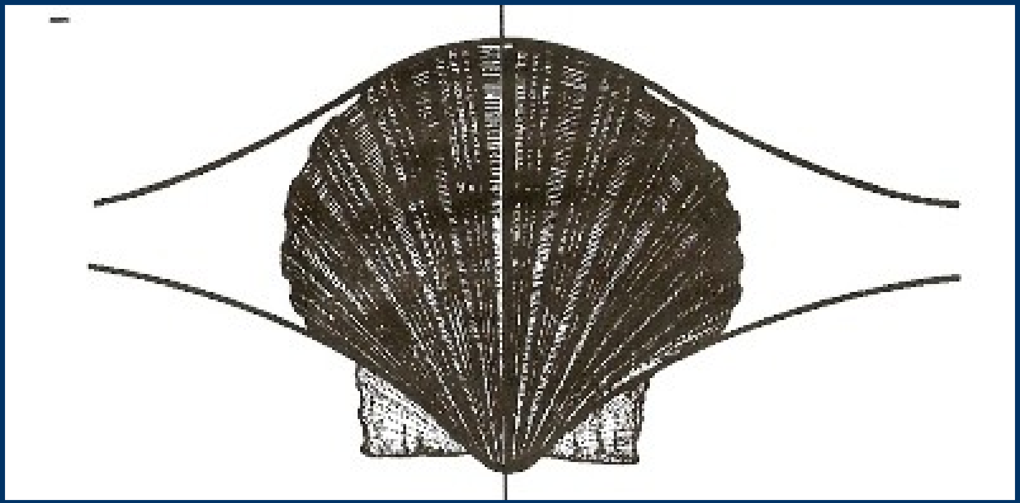
$Q = (\rho, \theta)$

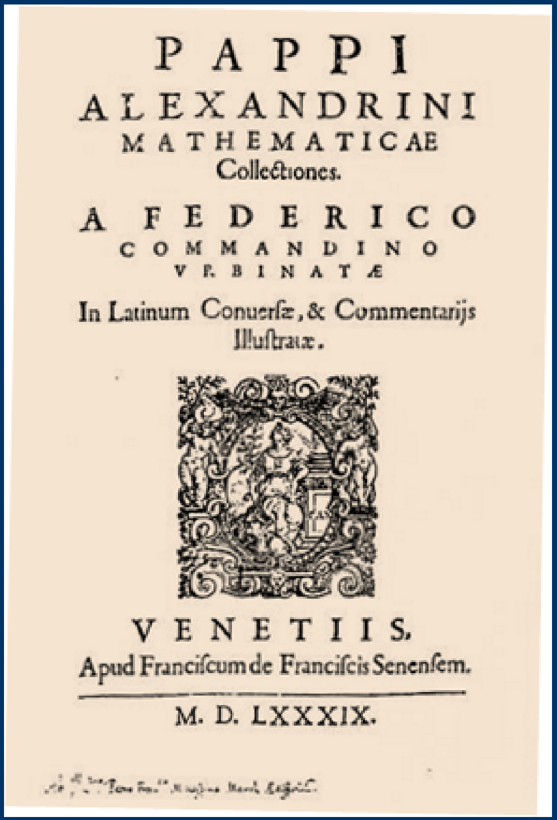
$\rho = OQ = KN = ON - OK = 2r/\cos\theta - 2r\cos\theta$

$\rho = 2r\,\mathrm{sen}^2\theta/\cos\theta$

$x(x^2 + y^2) = 2ry^2$

Concoide di Nicomede





PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.

VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

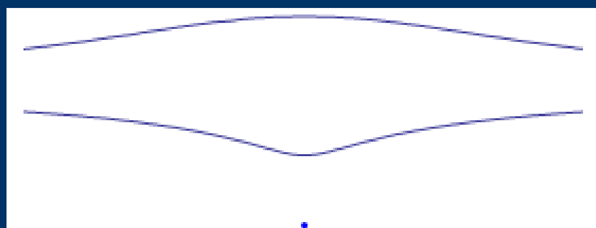
Nicomede (circa 250 -150 a.C.)

Pappo, *Collezioni matematiche*, Venezia 1589

κοχύλι = conchiglia

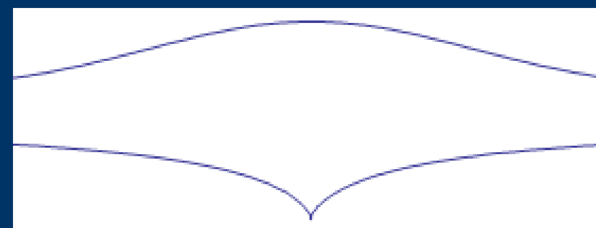
Duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) - l^2x^2 = 0$$



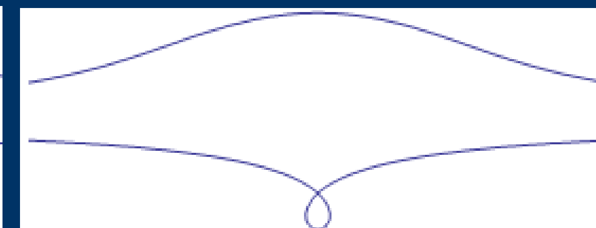
$l < a$

Concoide con punto isolato



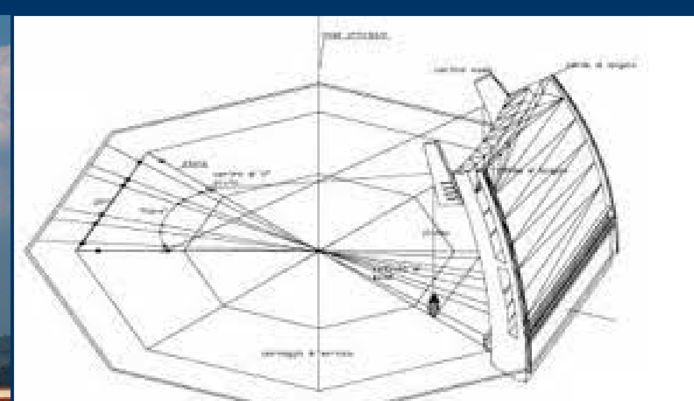
$l = a$

Concoide cuspidata



$l > a$

Concoide nodata



Ipotesi sull'impiego della concoide nel progetto del Brunelleschi per la costruzione della cupola di Santa Maria del Fiore (1420-1436)

Proporzionatrice seconda

G. Villalpando, *In Ezechielem explanationes*, 1604

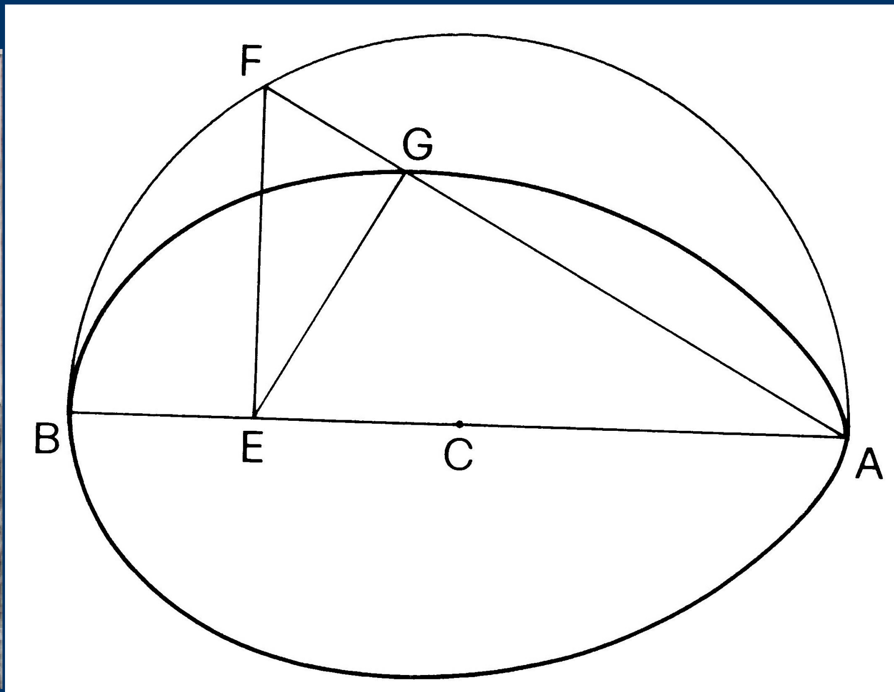
Figura ovata

$$(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$$

T. Bruni, *De naturali et vero corpore ovato*, 1627

Dell'armonia astronomica et geometrica, Parte II, 1631

Inserzione di due medie proporzionali



Tracciamento per moto continuo di curve algebriche

Strumenti rigidi

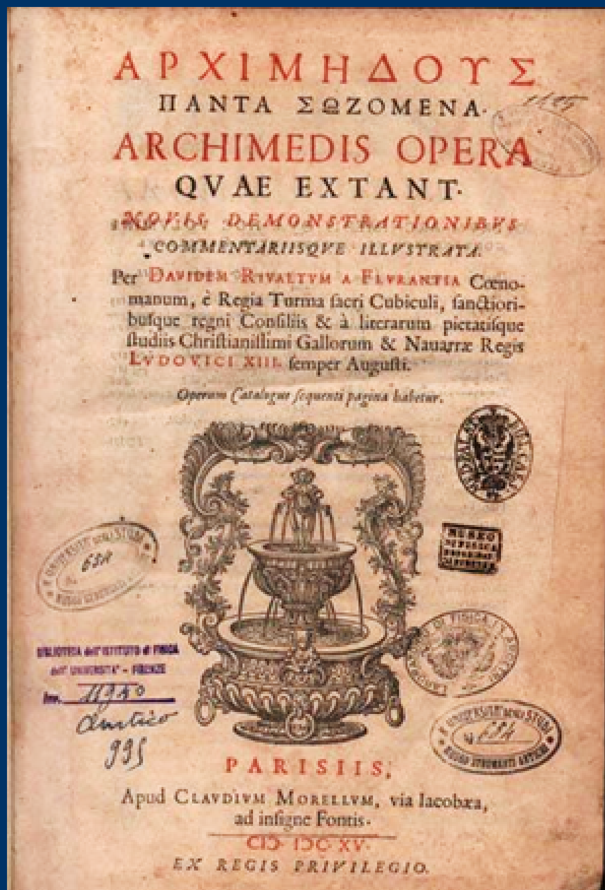
Compassi di due tipi:

1° tipo: un supporto fisso di varia forma e una sola riga scorrevole (compasso per tracciare la concoide, ellissografo di G. Dal Monte, compasso di D. Rivault per la concoide del cerchio)

2° tipo: sistemi composti da squadre e righe, in parte fisse e in parte mobili dipendentemente tra loro (compassi di Cavalieri per tracciare le coniche, compasso di Bruni per la figura ovata)

Concoide di Nicomede

D. Rivault, *Archimedis Opera*,1615

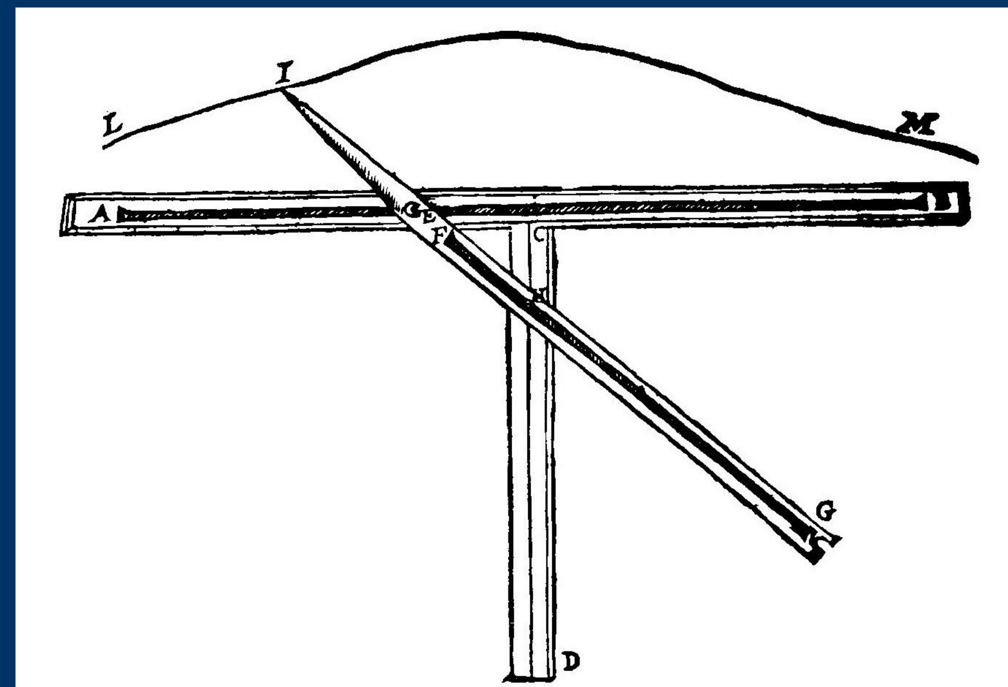


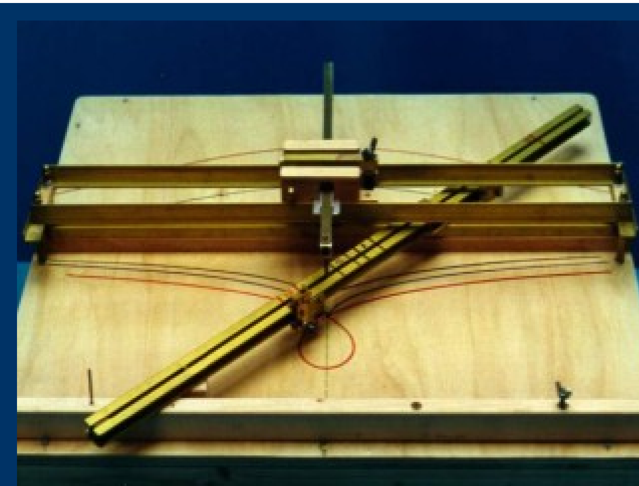
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΠΑΝΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.
ARCHIMEDIS OPERA
QVAE EXTANT.
NOVIS DEMONSTRATIONIBVS
COMMENTARIISQVE ILLVSTRATA.

Per DAVIDEM RIVALTVM A FLVRANTIA Cœnomanum, è Regia Turma sacri Cubiculi, sanctioribusque regni Consiliis & à literarum pietatisque studiis Christianissimi Gallorum & Nauarræ Regis LVDOVICI XIII. semper Augusti.

Operum Catalogus sequenti pagina habetur.

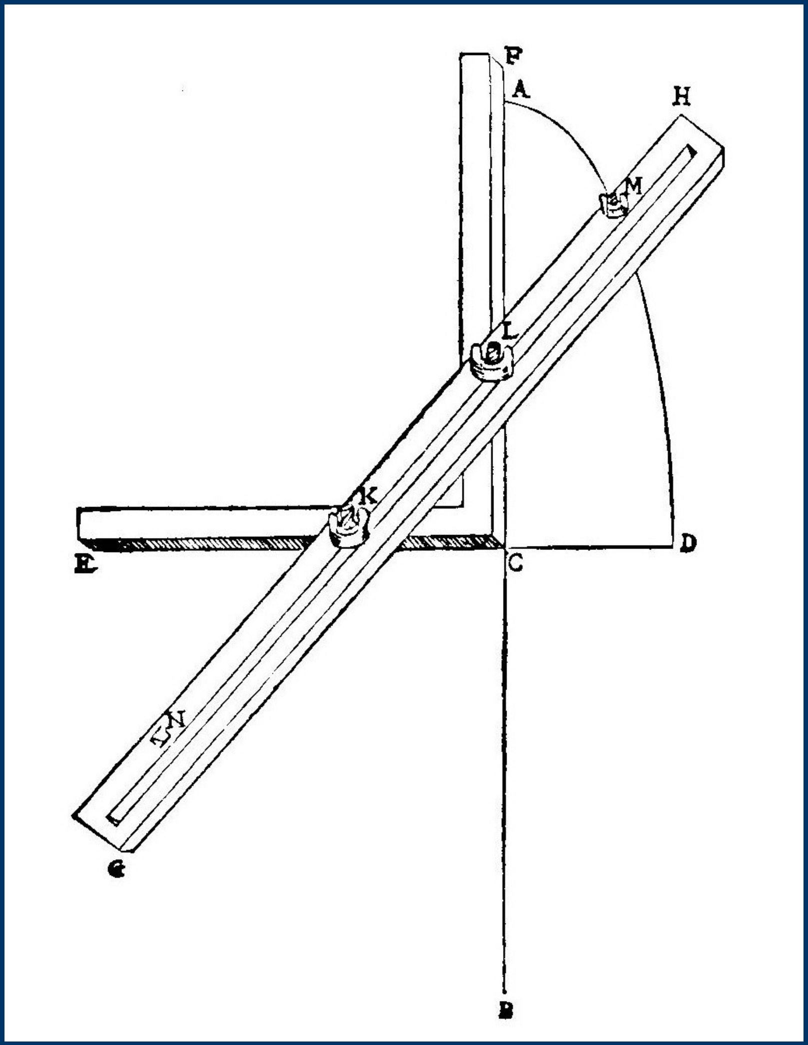
PARISIIS,
Apud CLAVDIVM MORELLVM, via Iacobæa, ad insigne Fontis.
CIϽ IϽC XV.
EX REGIS PRIVILEGIO.

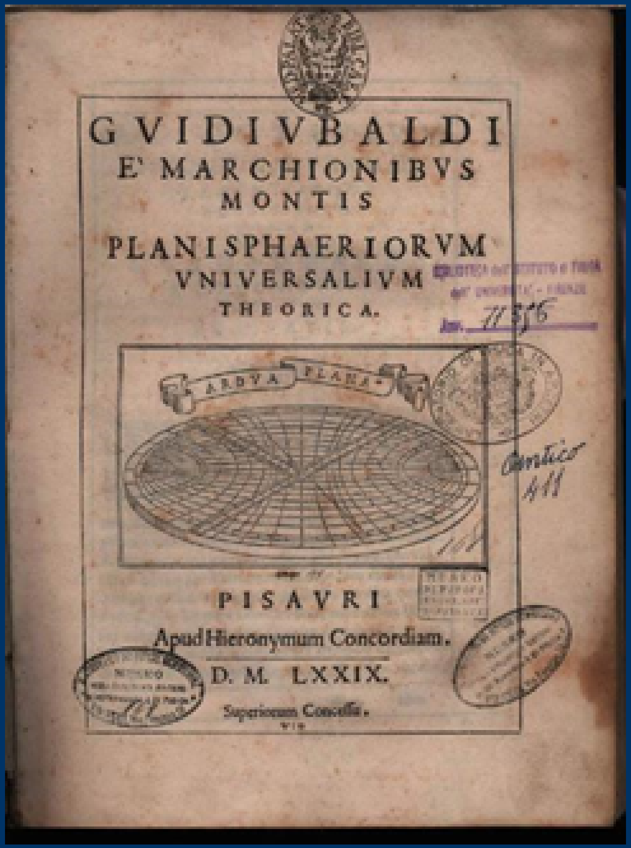




Ellisse

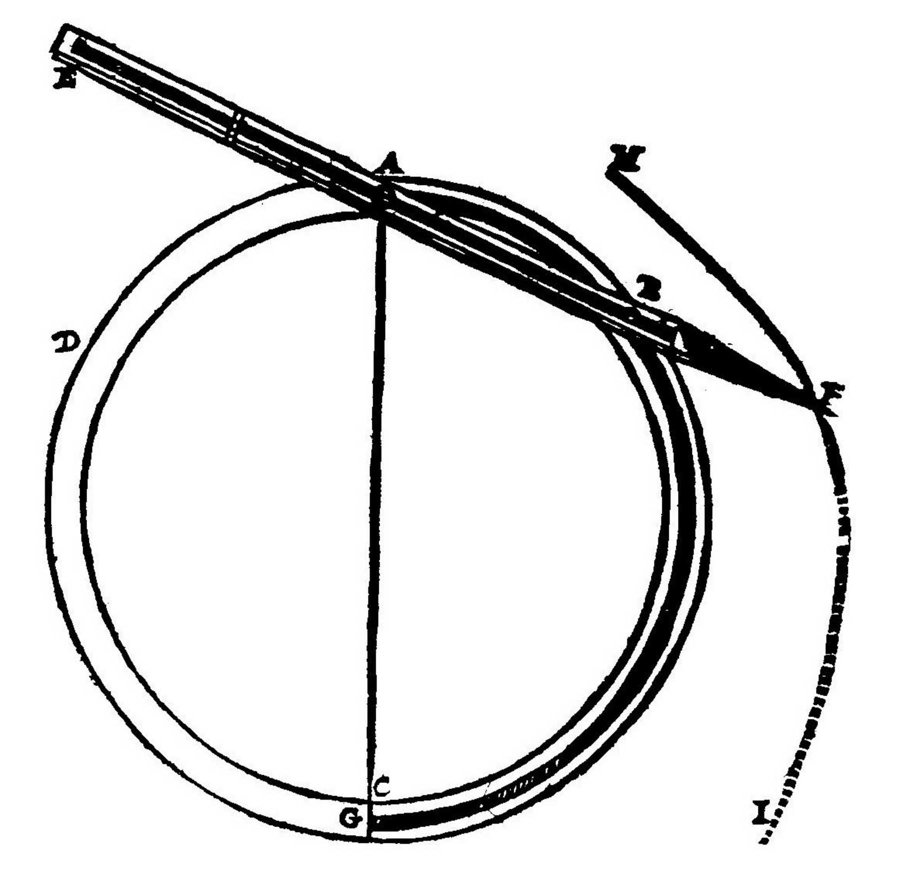
G. Del Monte, *Planisphaeriorum universalium theorica*,1579
Cavalieri, *Specchio ustorio*, 1632



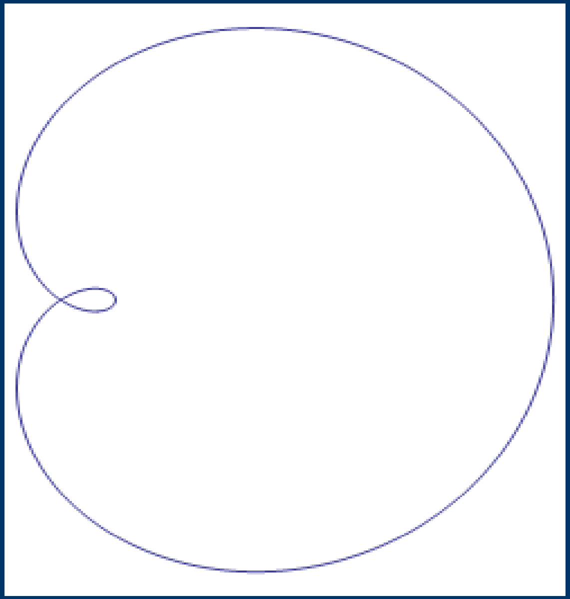


KM = AC
LM = CD

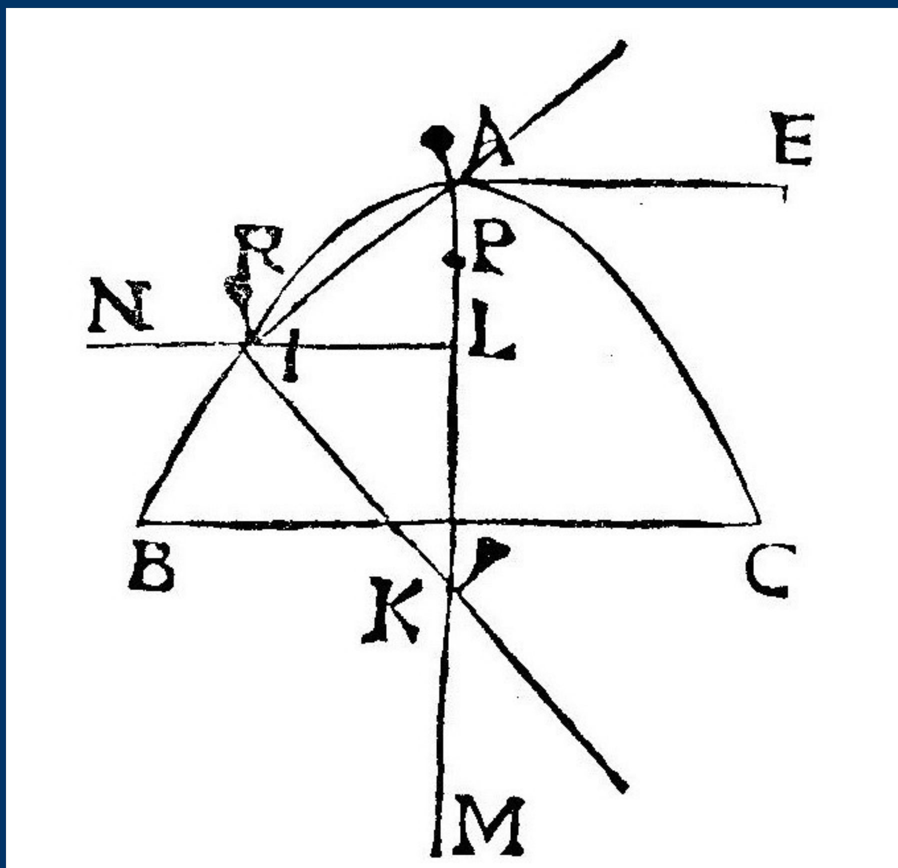
Concoide del cerchio (Lumaca di Pascal o Cardioide)

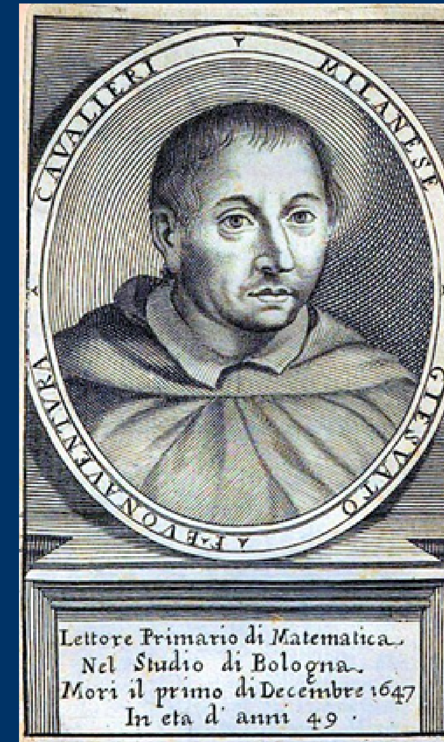


D. Rivault, *Archimedis Opera,*1615



Coniche: Parabola



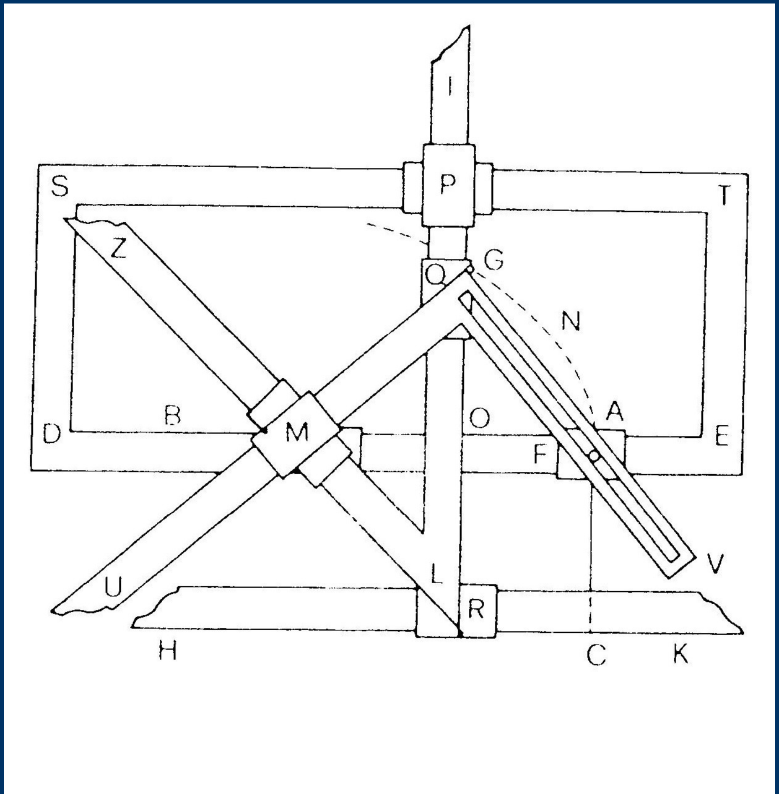


Cavalieri, *Specchio ustorio*, 1632

Squadre AIK, NLM con LK = AE

$IL^2 = AL \cdot LK = AL \cdot AE$

Parabola, ellisse e iperbole

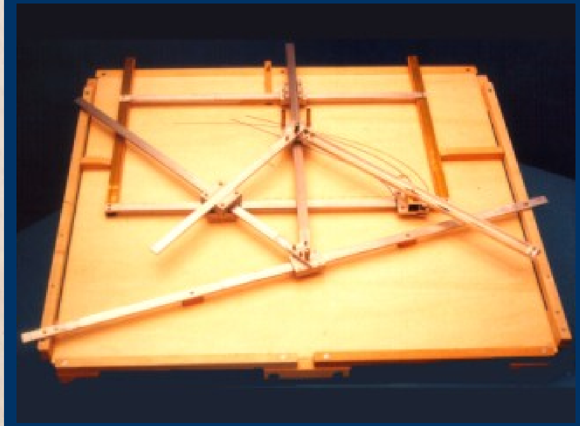


Meccanismo ideato da Felice Paciotti prima del 1579, in grado di tracciare tutte e tre le coniche, e descritto in M. Oddi, *De gli horologi solari*, 1638

Costituito da nove righe: variando la posizione del“reggitore” HK si tracciano le tre diverse coniche.


DE GLI
HOROLOGI
SOLARI
NELLE SVPERFICIE PIANE
TRATTATO
DI MVTIO ODDI
DA VRBINO.

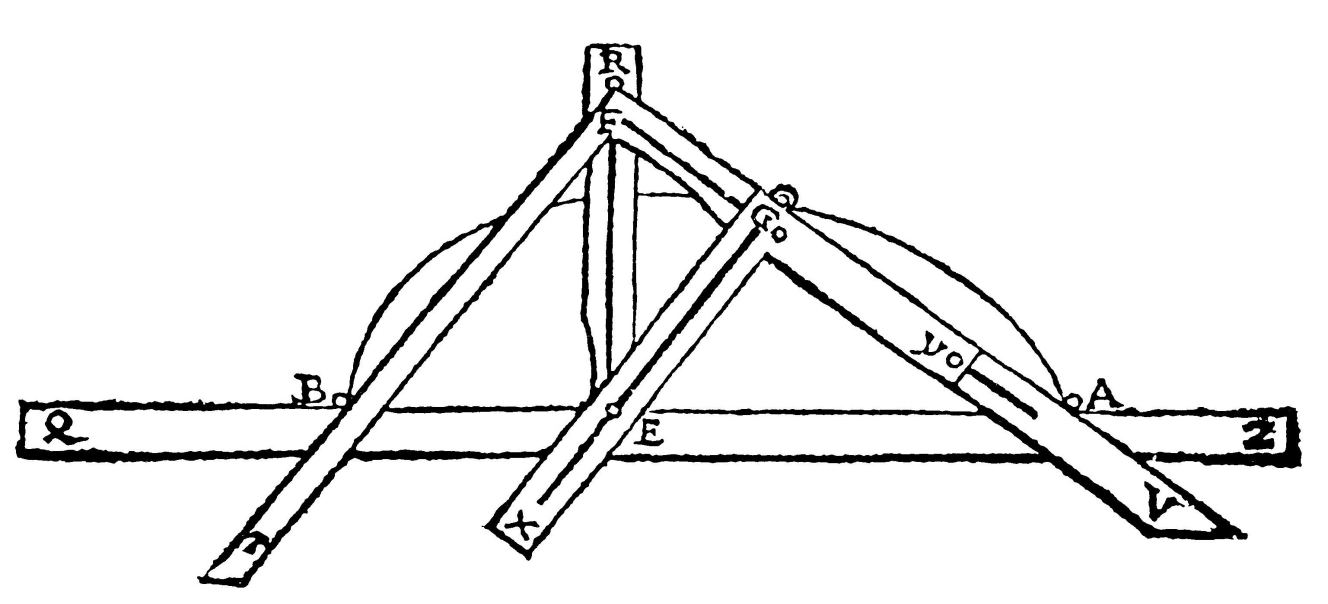
IN MILANO, Per Giacomo Lantoni
L'ANNO M. DC. XIV.



Iperbole

Parabola di lato retto AC
MO = AC

Figura ovata



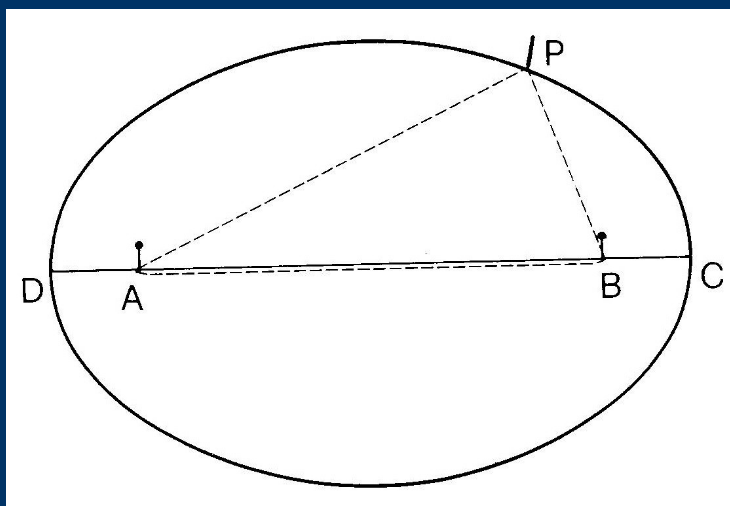
T. Bruni, *De naturali et vero corpore ovato*, 1627

Squadre TFV, XGY

Tracciamento con il filo

Ellisse (costruzione del giardiniere)

Cavalieri, *Specchio ustorio,* 1632
Descartes, *Dioptrique*, 1637



Clavio
Gnomonices

Antemio di Tralles (VI sec.)
con varianti pratiche:
C. Clavio, *Gnomonices libri octo*, 1581
J. Kepler, *Ad Vitellionem Paralipomena*, 1604

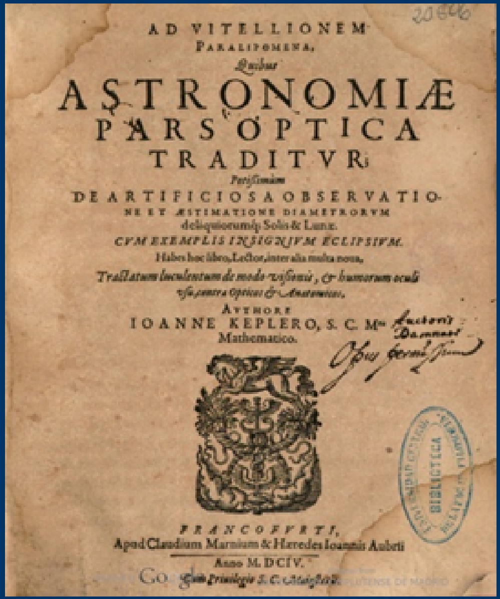
A e B = fuochi *l* = 2AC

AP + PB = CA + CB = CD (*Coniche*: Prop. III, 52)

Tracciamento con il filo

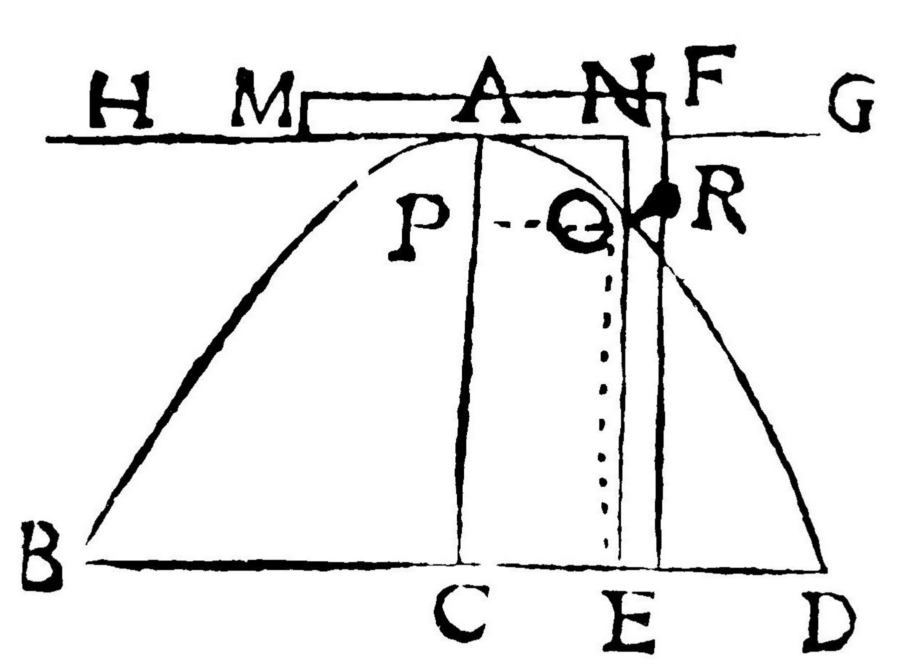
Parabola

Kepler, *Ad Vitellionem Paralipomena*, 1604
Cavalieri, *Specchio ustorio*, 1632



P = fuoco
l = NE + AP = AC + AP

EO + OP = l



Tracciamento con il filo
Iperbole

Kepler, *Ad Vitellionem Paralipomena*, 1604
Cavalieri, *Specchio ustorio*, 1632

Descartes, *Dioptrique,* 1637

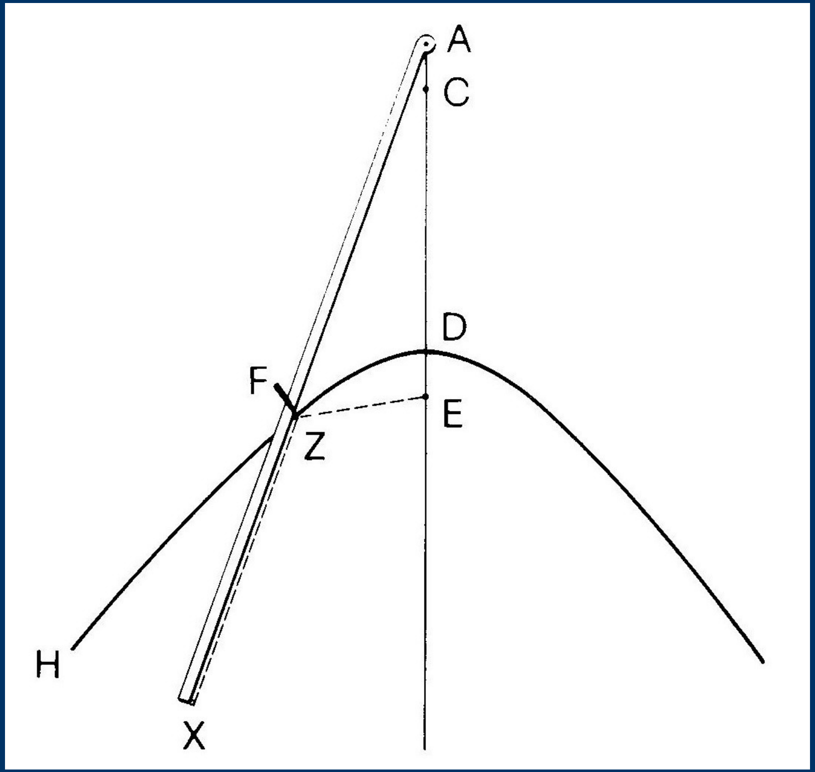
A ed E = fuochi

CD = asse trasverso

l = AX - CD

ZA - ZE = CD

(*Coniche*: Prop. III, 51)

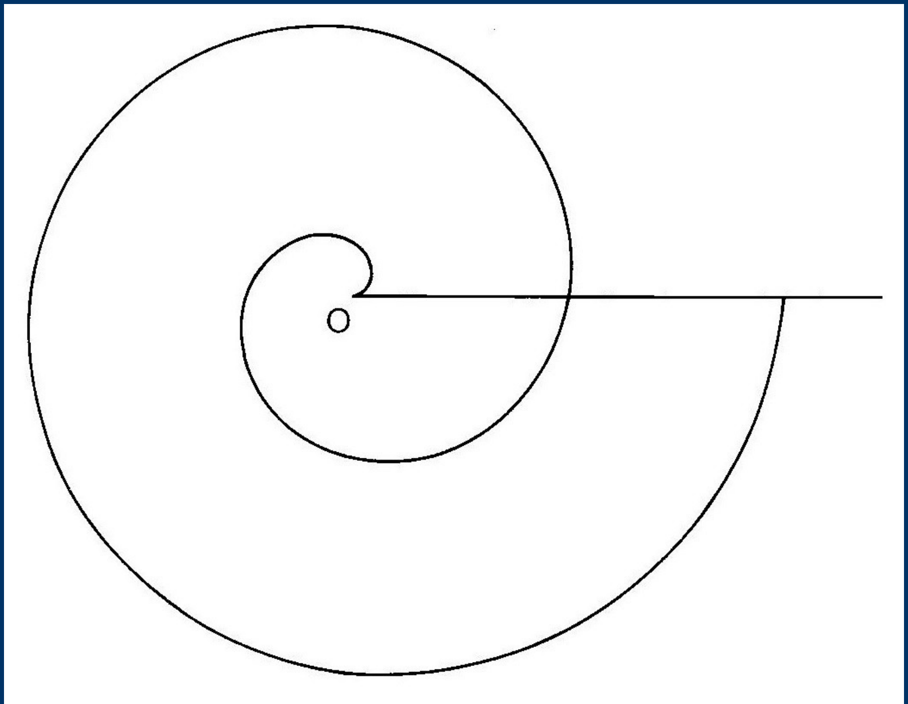


Tracciamento di curve trascendenti

Spirale di Archimede

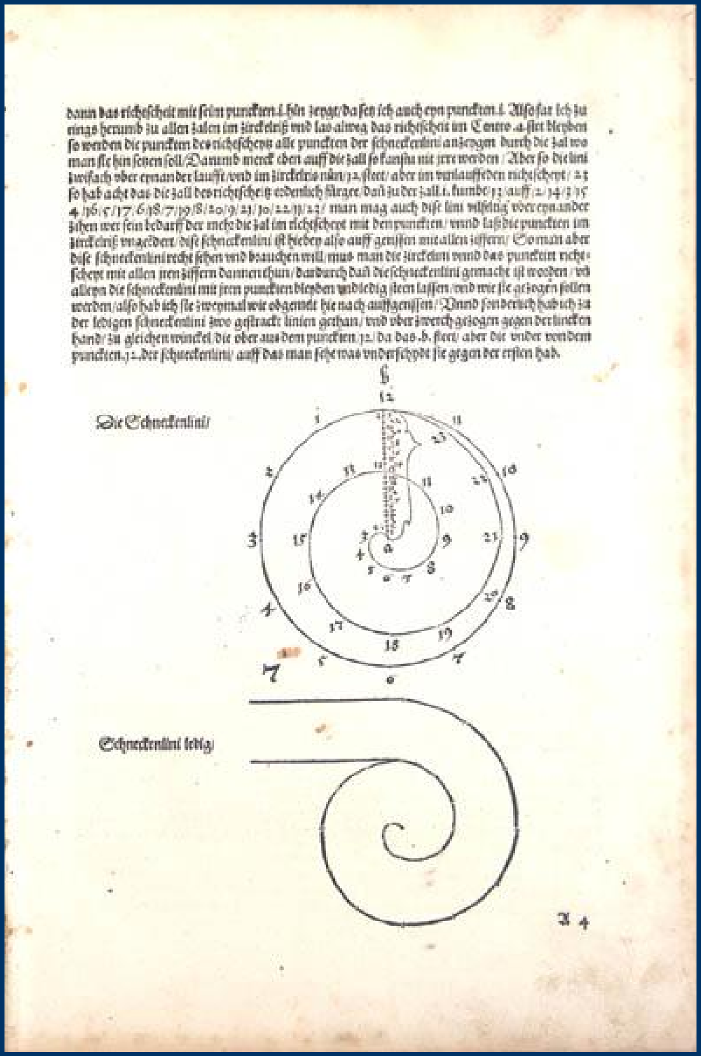
Archimede (287- 212 a.C.)
De spiralibus

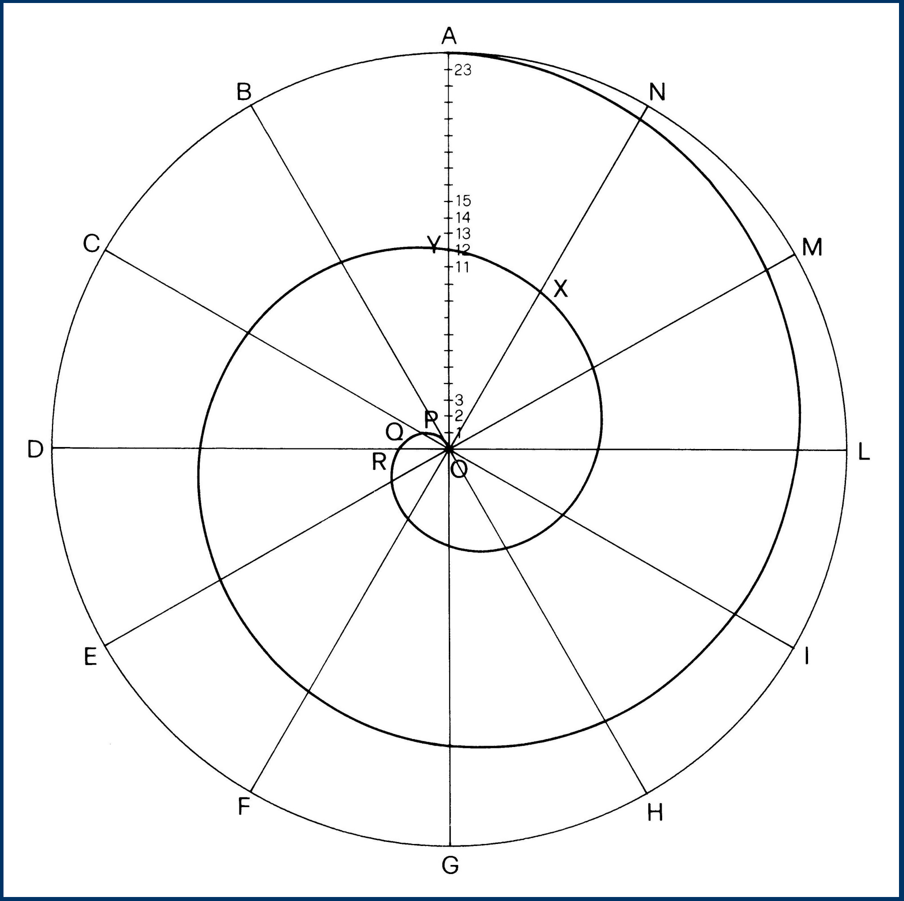
Trisezione dell'angolo



A. Dürer, *Unterweisung der Messung*, 1525

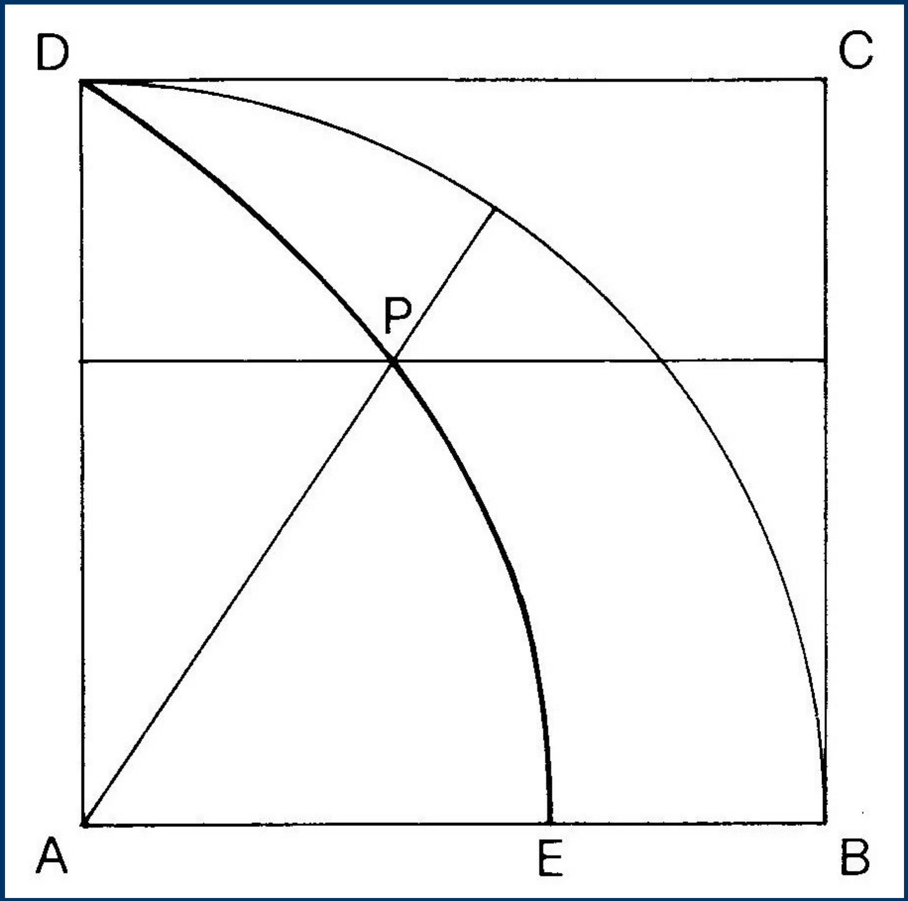
Costruzione per punti della spirale





Tracciamento di curve trascendenti:

Quadratrice di Dinostrato



Ippia di Elide (secc. V-IV a.C.)

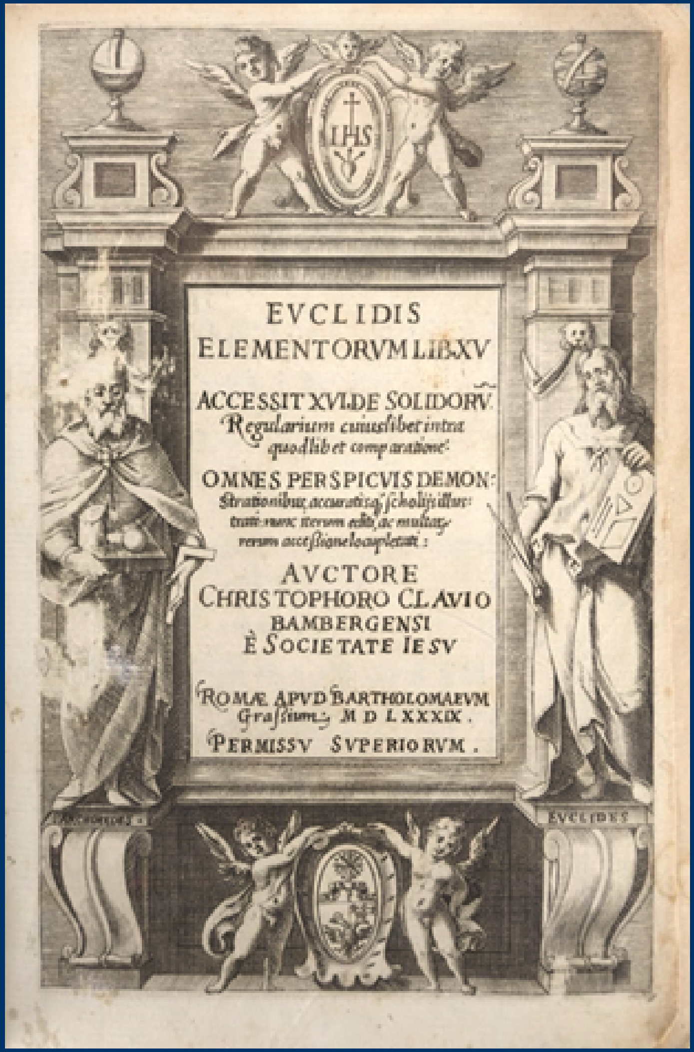
Dinostrato (sec. IV a.C.)

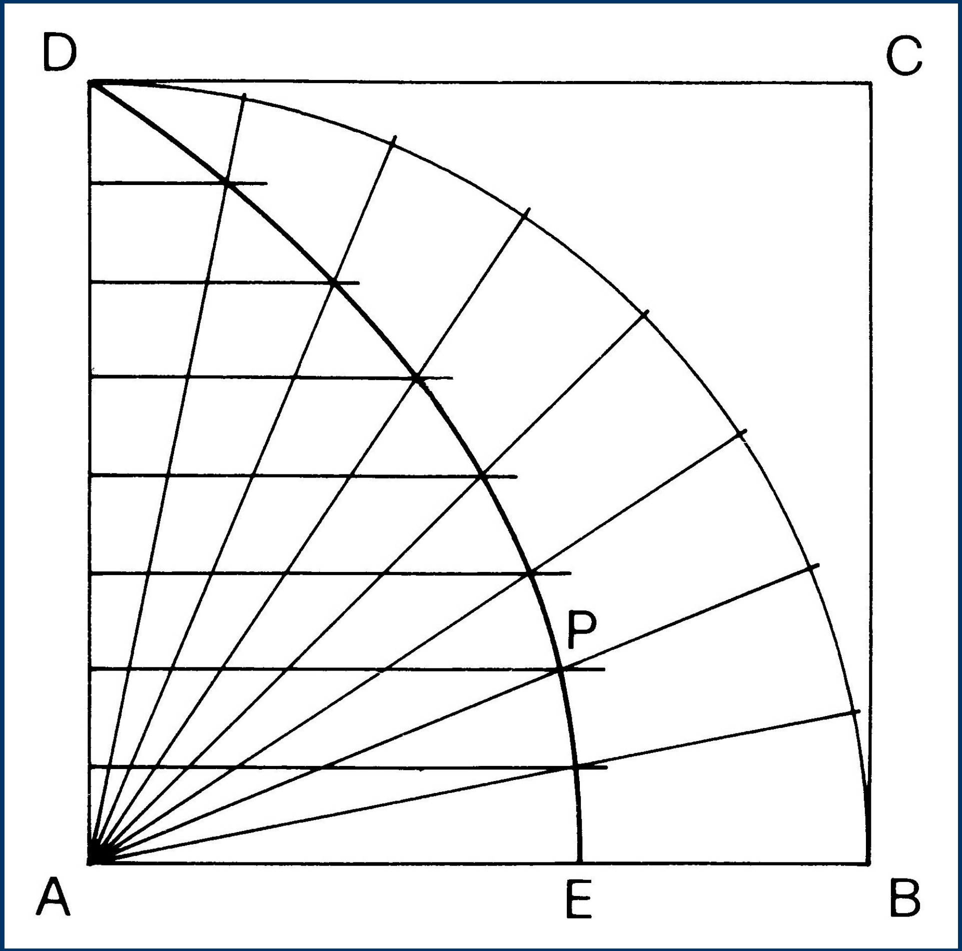
Pappo, *Collezioni matematiche*

Quadratura del cerchio
Trisezione dell'angolo

C. Clavio, *Euclidis Elementorum lib. XV*, 1589

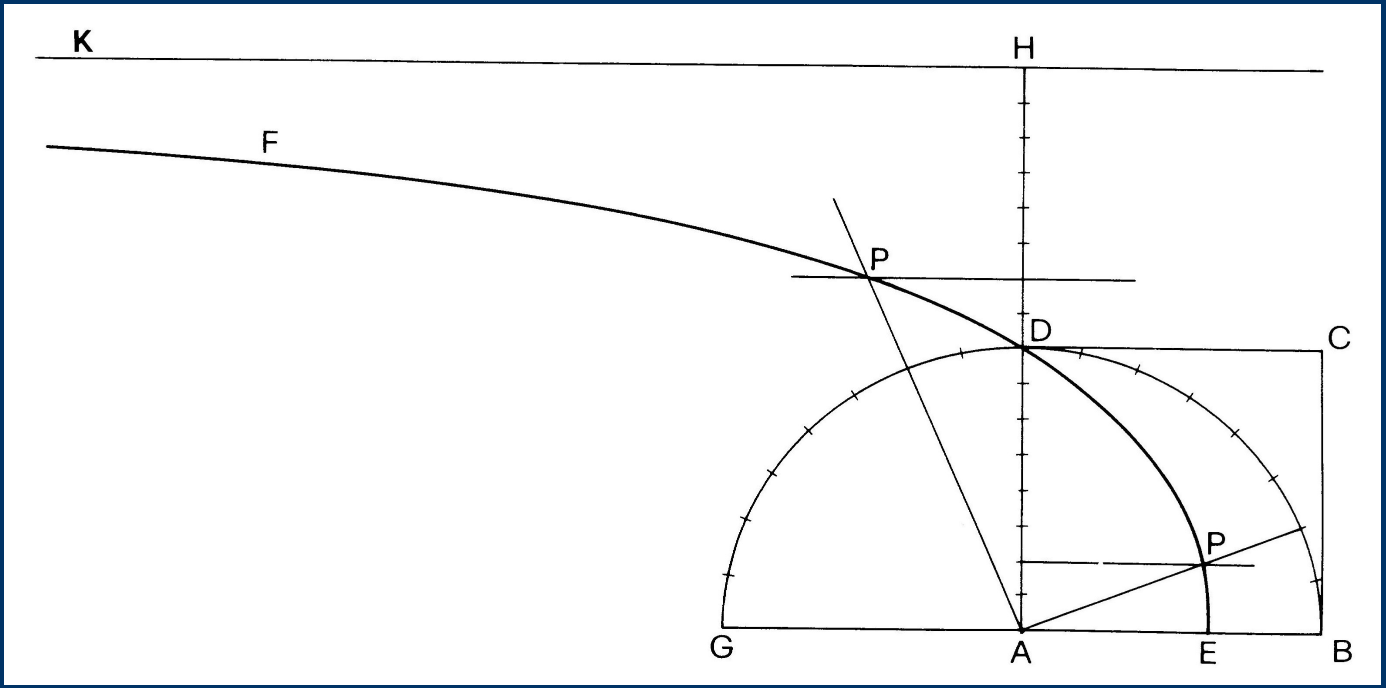
Costruzione per punti della quadratrice


EVCLIDIS
ELEMENTORVM LIB. XV
ACCESSIT XVI. DE SOLIDORV.
Regularium cuiuslibet intra
quodlibet comparatione.
OMNES PERSPICVIS DEMON-
strationibus, accuratisq. scholijs illu-
strati: nunc iterum editi, ac multarum
rerum accessione locupletati:
AVCTORE
CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI
È SOCIETATE IESV
ROMAE APVD BARTHOLOMAEVM
Grassium. M D LXXXIX.
PERMISSV SVPERIORVM.



V. Léotaud, *Elementa geometrie practice*, 1631

Estensione della quadratrice



Asintoto KH

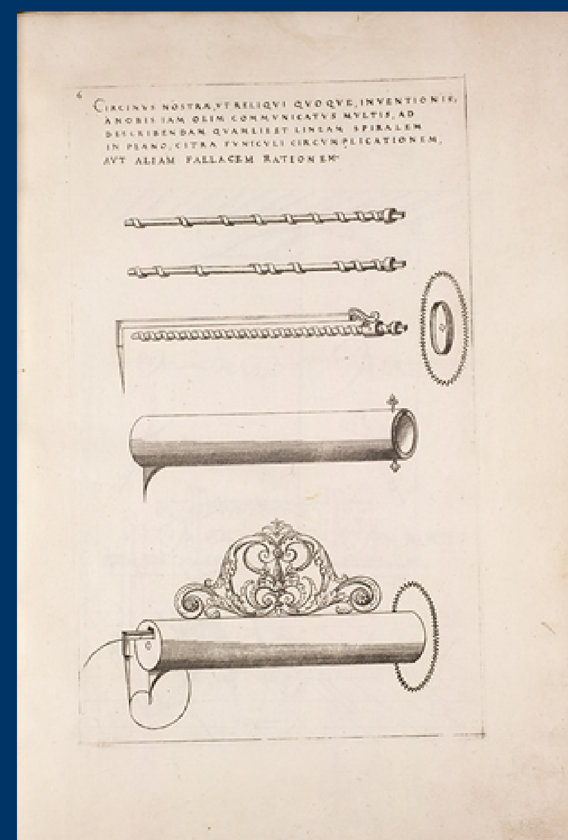
DH = AD

Spirale di Archimede

Due costruzioni meccaniche

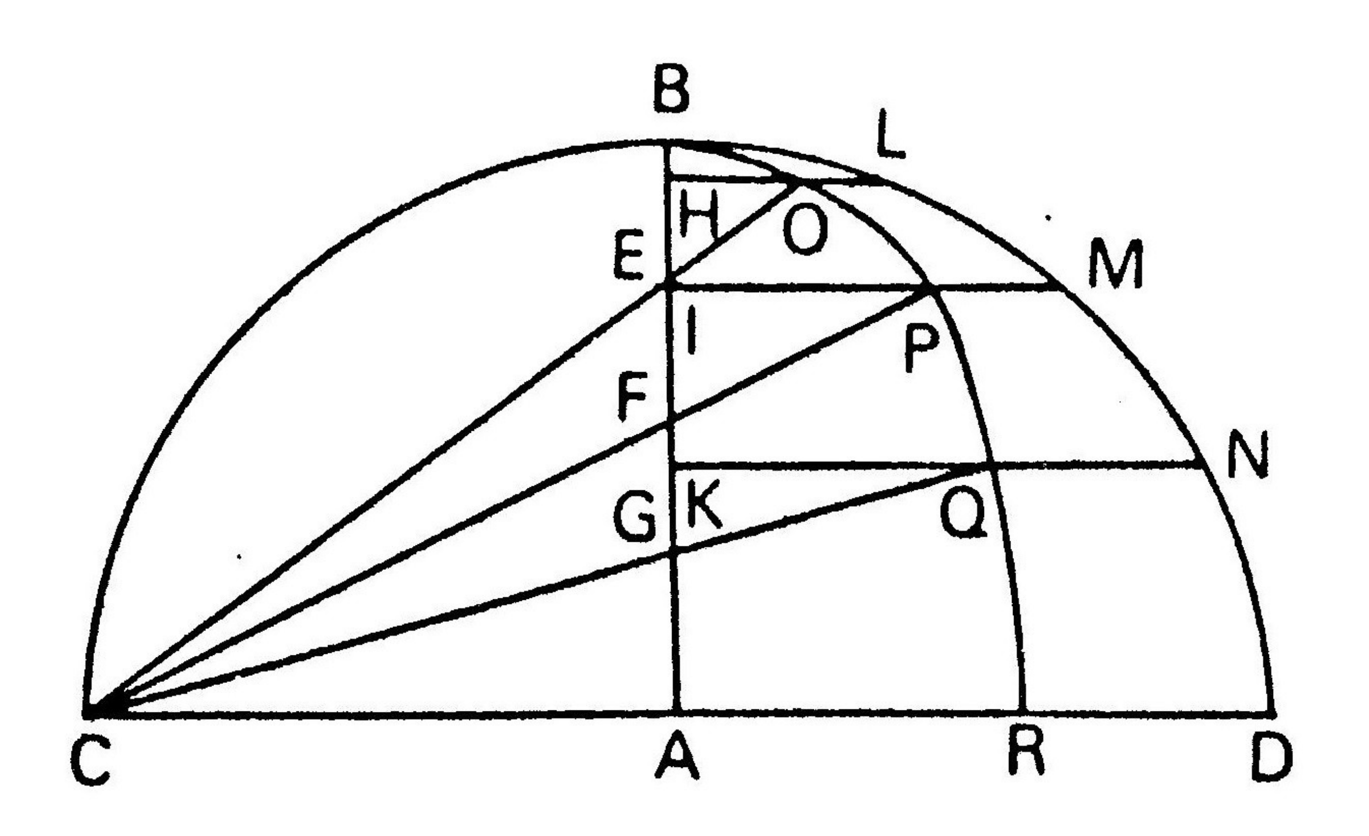
Con il filo
D. Schwenter, *Geometria practica,* 1618

Strumento basato sulla rotazione di una vite di passo costante J. Besson, *Theatrum instrumentorum et machinarum*,1578



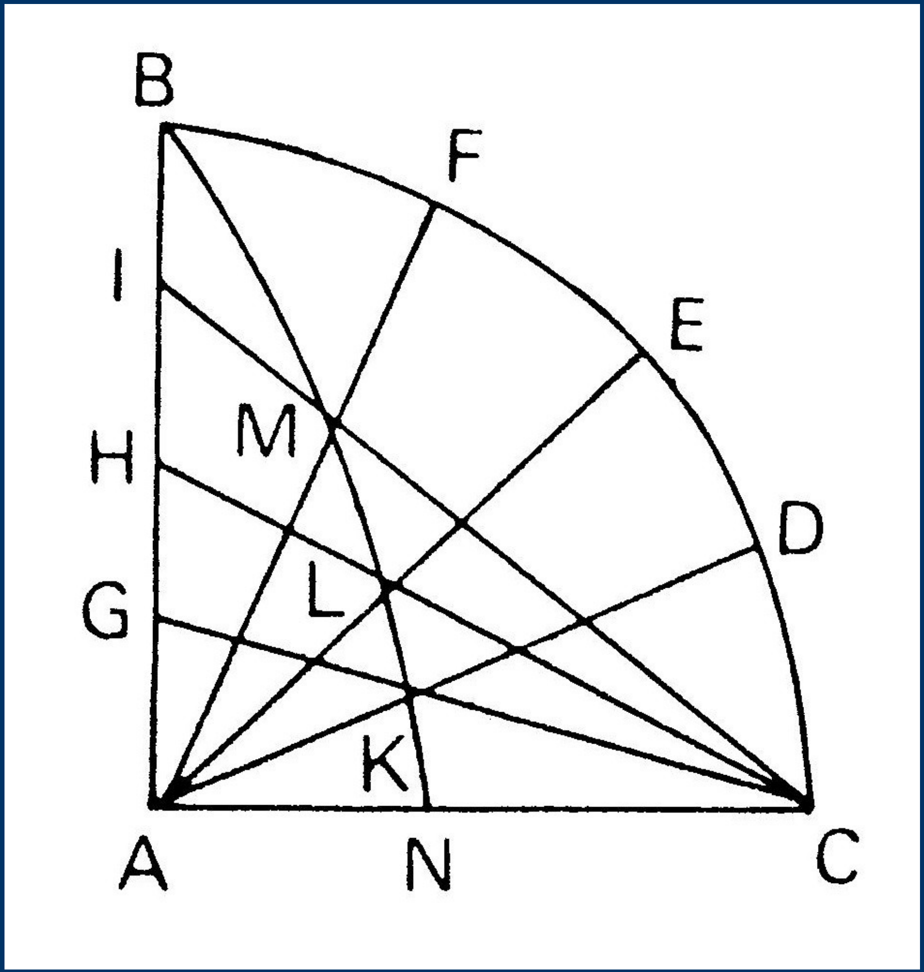
B. Sovero, *Curvi ac recti proportio*, 1630

Quadratrice differenziale



B. Sovero, *Curvi ac recti proportio*, 1630

Quadratrice divisiva



René Descartes

***Discours de la Méthode, plus La Dioptrique, Les Météores et La Géométrie*, 1637**

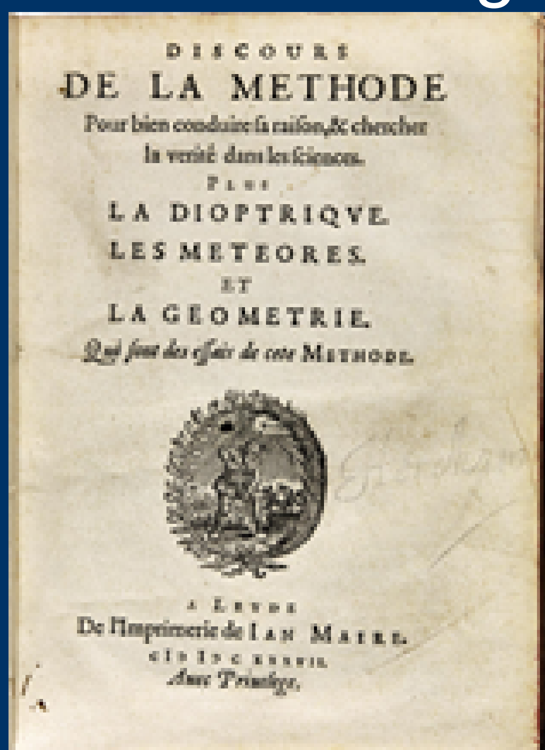
***Cogitationes private*, 1619**

Curve geometriche (algebriche)

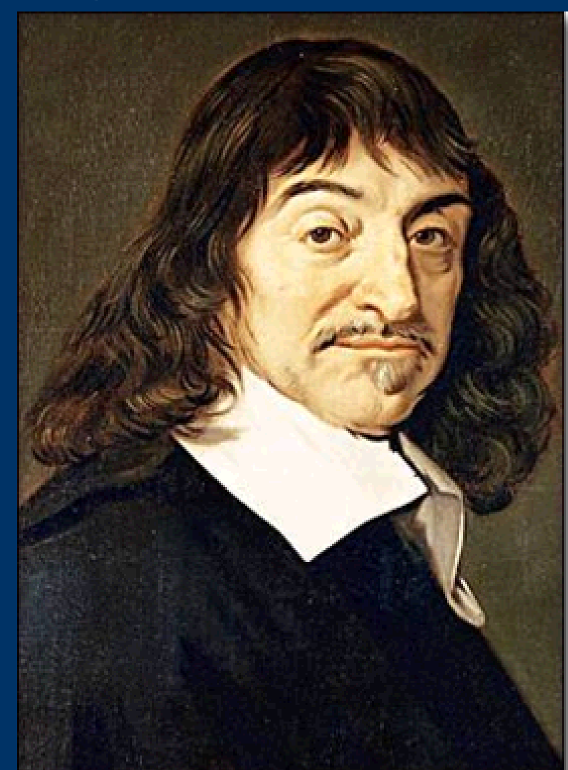
Per invenzione solida

Per punti

Con strumenti rigidi o col filo


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.



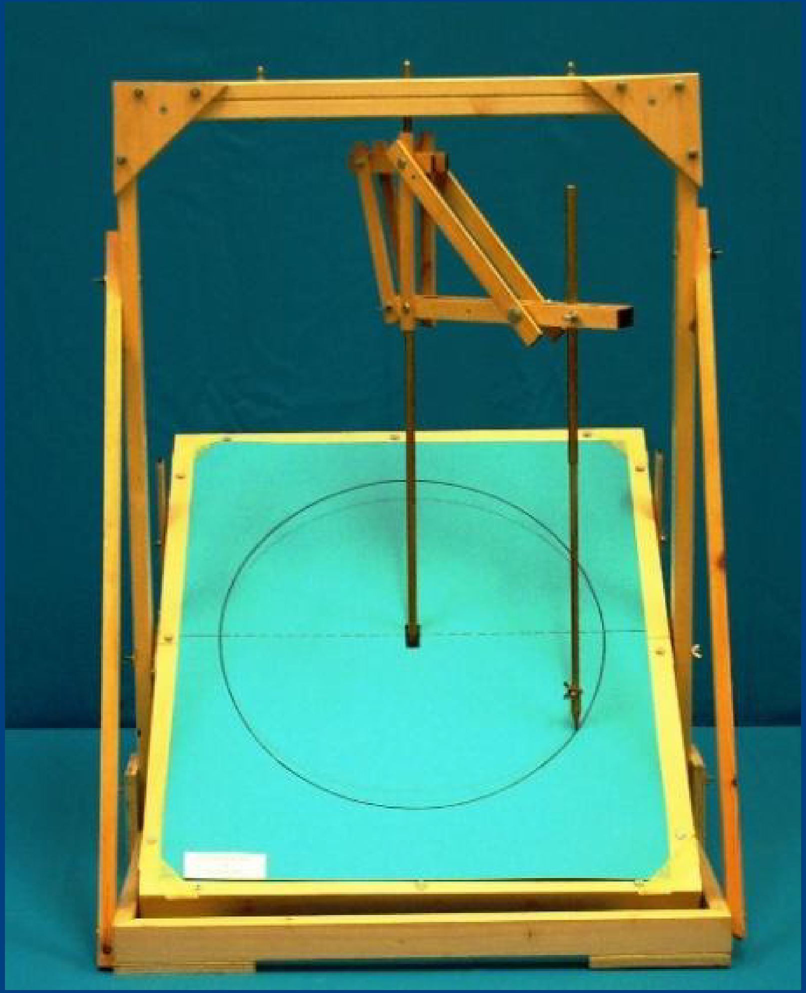
Descartes: *Cogitationes private*, 1619

Dioptrique, 1637

Costruzioni per invenzione solida

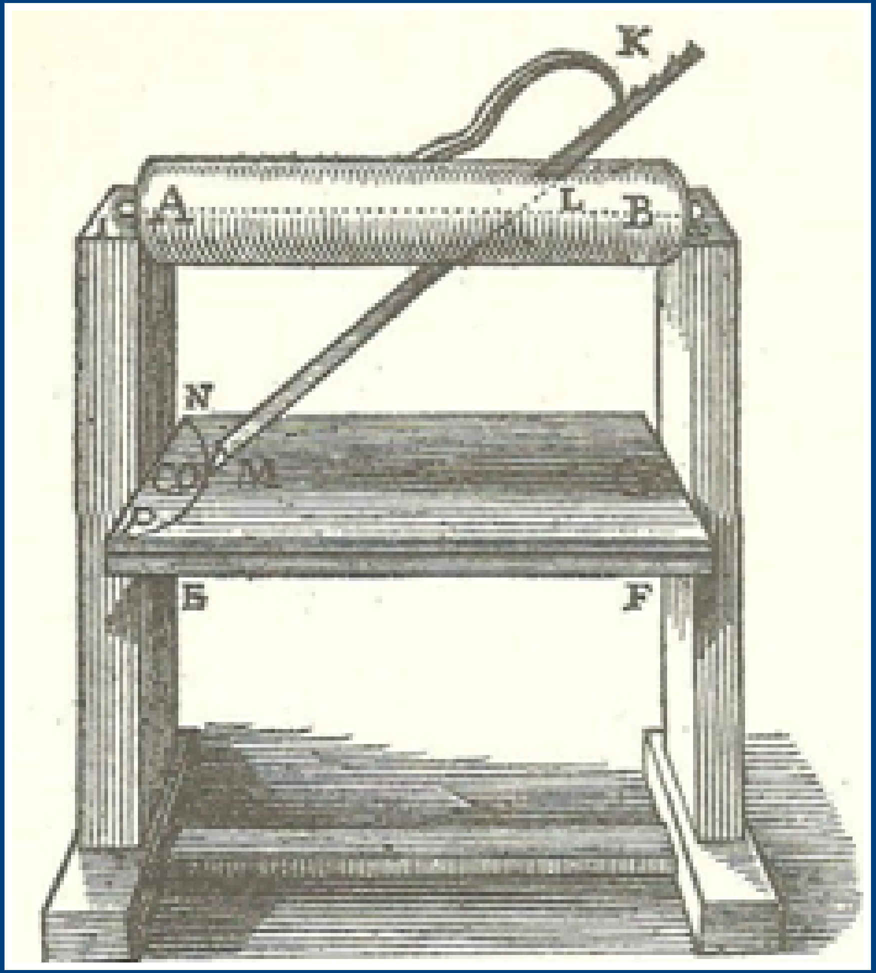
Ellisse

generazione della curva come sezione di un cilindro



Iperbole

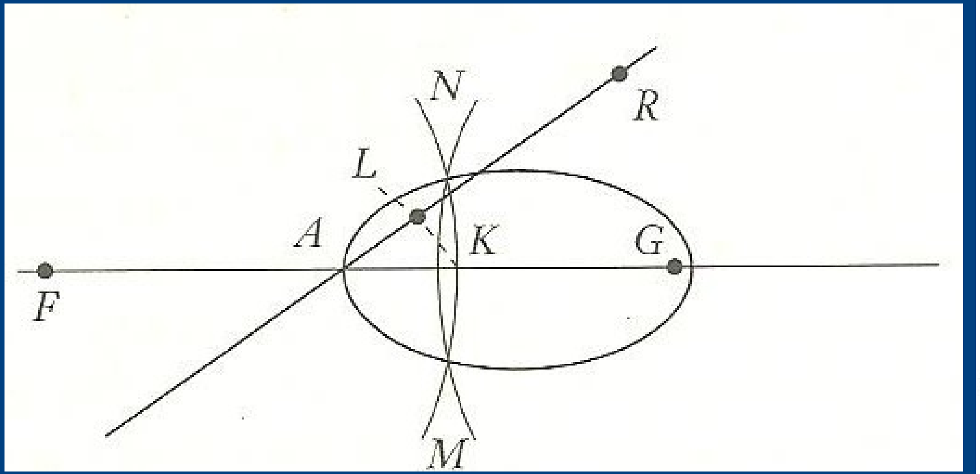
come sezione di un cono

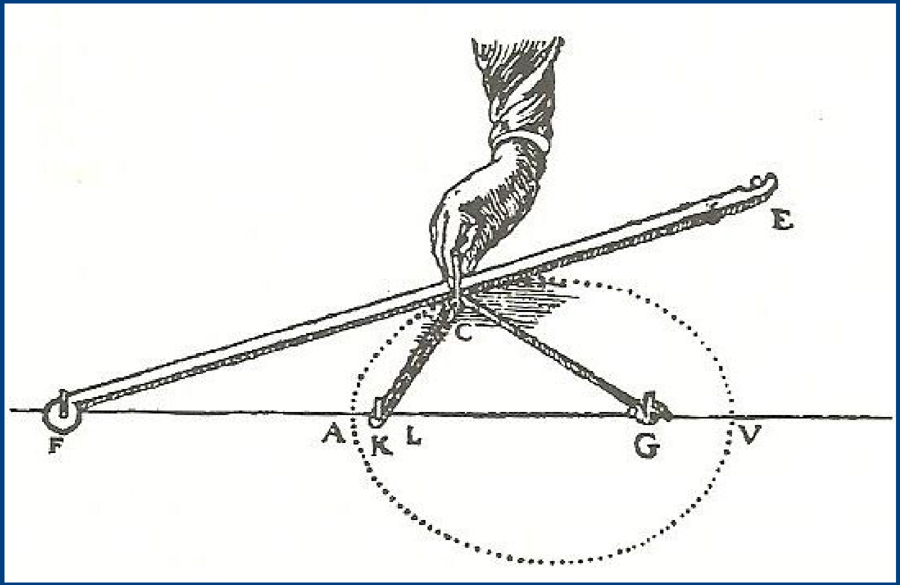


Descartes, *Géométrie*
Costruzioni per punti e col filo

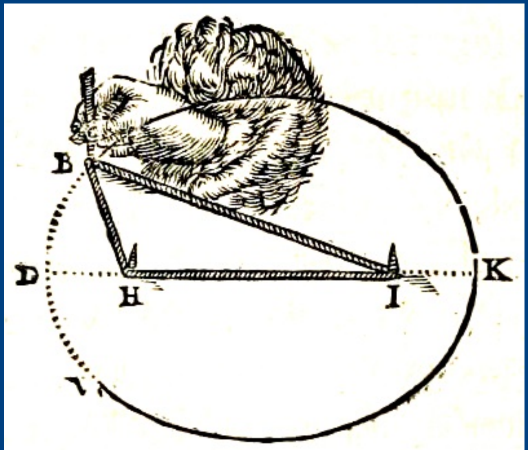
Ovali

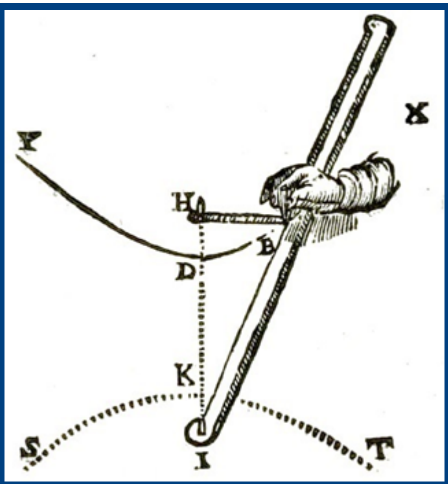
$a\, \mathrm{MF} + b\, \mathrm{MG} = c$ quartiche





Decartes, *Dioptrique*
Costruzioni col filo
ellisse e iperbole





Descartes, *Géométrie*
Costruzione con strumenti rigidi
Compasso proporzionale

Luogo descritto da D:

Inserzione di più medie proporzionali

$YB = a$

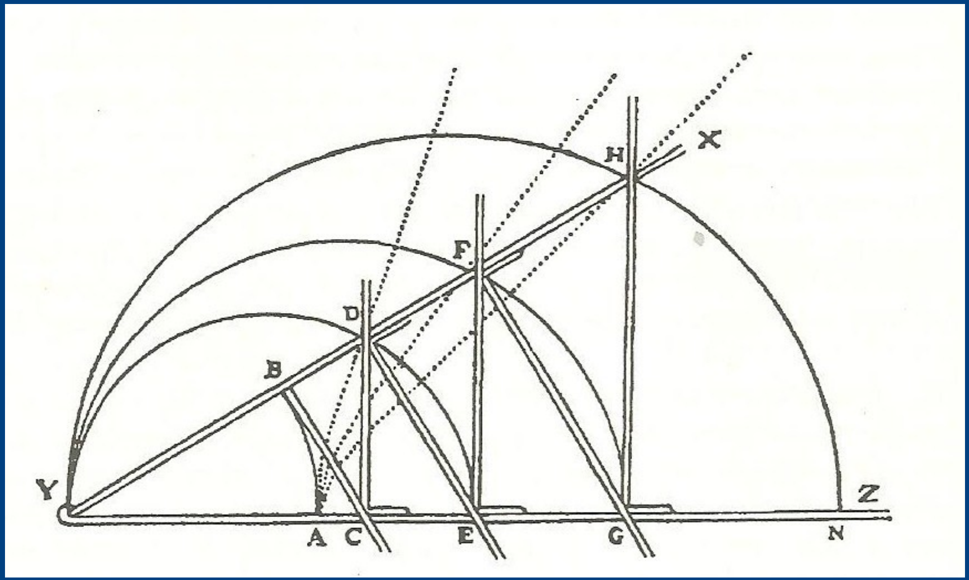
Il punto B descrive una semicirconferenza, i punti D, F, H

$YC = x \quad DC = y$

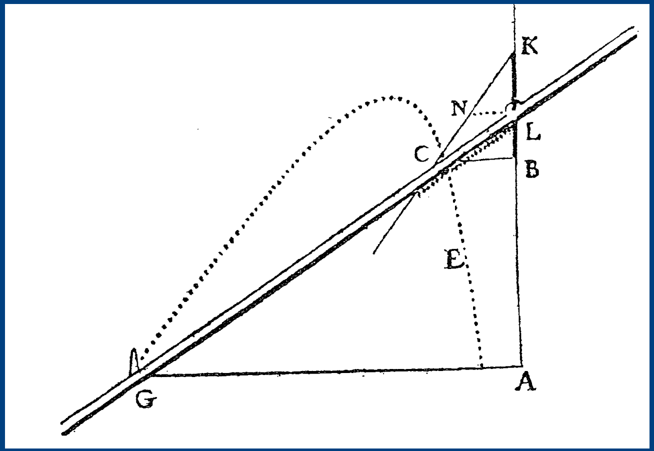
descrivono curve di quarto, ottavo e dodicesimo ordine

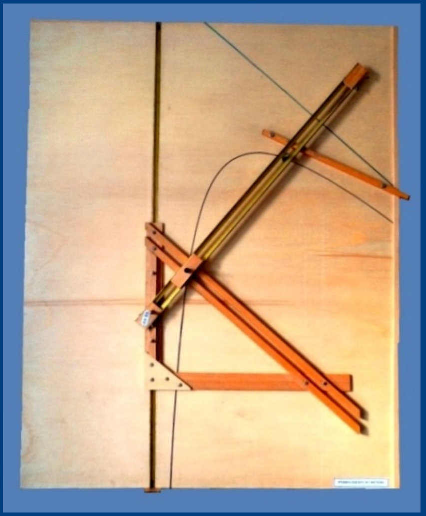
$YC^2 = YB \cdot YD$

$x^4 = a^2 (x^2 + y^2)$



Iperbolografo





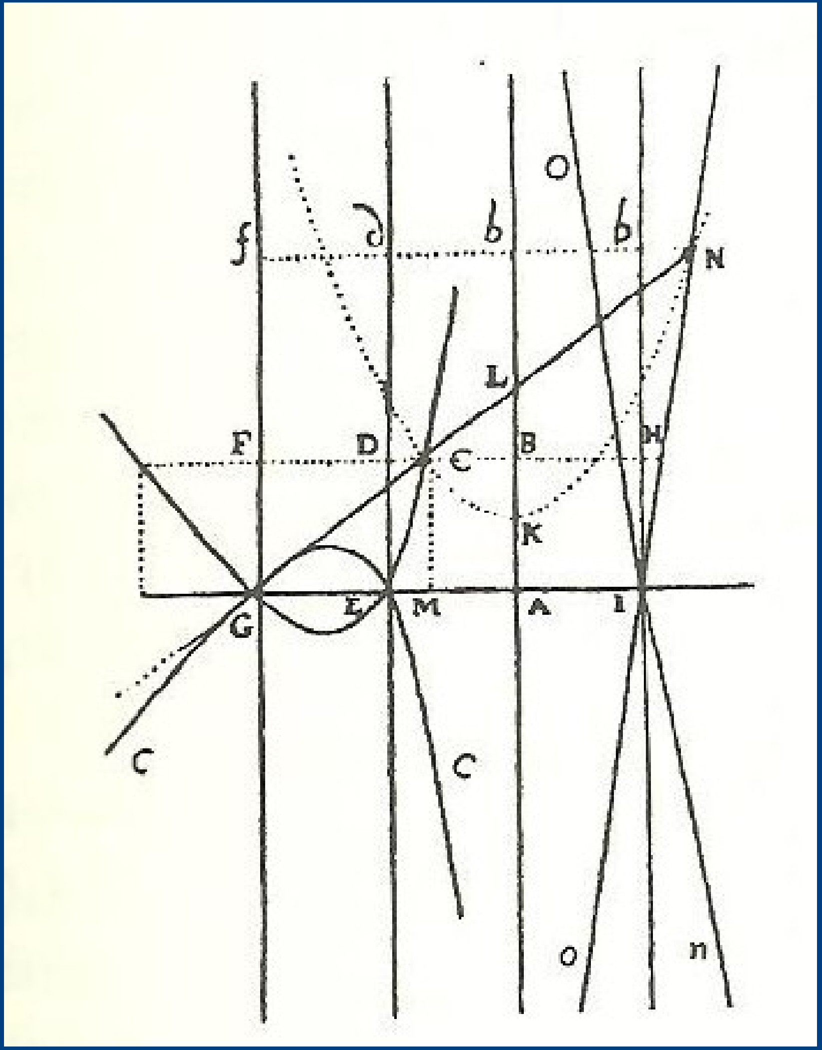
Descartes, *Géométrie*

Costruzioni con strumenti rigidi
Compasso con elementi a forma di retta e parabola

La curva è prima ottenuta come soluzione del Problema di Pappo nel caso di cinque rette, quattro parallele e una ad esse ortogonale. Ossia come luogo dei punti C tali che

$$CF \cdot CD \cdot CH = DB \cdot CB \cdot CM$$

Poi come luogo descritto dallo stumento costituito dalla riga GN e dalla parabola CKN di lato retto LK = a
La GN ruota attorno a G e la parabola scorre lungo il suo asse AL.



Descartes pone

$GA = 2a$ $CM = x$ $CB = y$
Sfrutta la similitudine dei triangoli GMC e CBL
e la proprietà caratteristica della parabola
$CB^2 = LK \cdot BK$

Tridente o parabola cartesiana

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$$

Bibliografia

G. Loria, *Curve piane speciali, algebriche e trascendenti,* Milano, Hoepli, 1930, 2 voll .

E. Ulivi, *Sulla "proporzionatrice seconda di G.B. Villalpando*, in "Archimede", fasc. 2-3, 1985, pp. 119-128.

E. Ulivi, *Le fonti di Bonaventura Cavalieri: la costruzione delle Coniche fino allo "Specchio Ustorio" (1632)*, in "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", vol. VII, fasc. 1, 1987, pp. 117-179.

E. Ulivi, *Il tracciamento delle curve prima di Descartes,* in *"Descartes: il Metodo e i Saggi,* Atti del Convegno per il 350° anniversario della pubblicazione del *Discours de la Méthode* e degli Essais" (Lecce, 21-24 ottobre 1987)",vol. II, Roma , Ist. della Enciclopedia Treccani, 1990, pp. 517-541.

E. Ulivi, *Le quadratrici di Bartolomeo Sovero*, in "L' Educazione Matematica", anno XI, serie III, vol. 1, n° 2, agosto 1990, pp. 103-121.