

Attività 2: scheda docente

Le immagini come funzioni

Introduzione

“Una immagine digitale è una tabella a due dimensioni di punti (detti pixel) ciascuno dei quali contiene la codifica di un colore.” Che cosa sarebbe il web senza immagini? Quel web nel quale gli alunni navigano per la maggior parte del tempo?

Da queste considerazioni nasce un percorso che presenta le immagini come particolari tabelle, in cui ciascuna cella è associata a un colore, e le tabelle come funzioni della forma

$$\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \text{Insieme}$$

L'Attività 2 sollecita lo studente a fare della matematica uno strumento di interpretazione della realtà in ambito quotidiano e a sviluppare autonomamente modelli matematici di situazioni concrete che si trova ad affrontare, con spirito critico e quindi cosciente dei limiti insiti in tali modelli. L'obiettivo è fare in modo che la matematica faccia parte a pieno titolo del bagaglio culturale degli studenti.

Le schede propongono esercizi che impiegano i concetti appresi nell'Attività 1, applicandoli a contesti differenti da quelli già affrontati e richiedendo quindi un certo sforzo di rielaborazione. Si consiglia come prerequisito la nozione di funzione, ma le attività possono facilmente essere modificate rendendole introduttive alla nozione stessa di funzione. La possibilità di associare un'informazione (numero, lettera, colore, ...) a ogni cella di una griglia è stata per altro già percorsa nell'Attività 1.

Nel dettaglio, l'attività 2.1 introduce in modo concreto la nozione di funzione dipendente da due variabili, associando a ogni cella di una griglia una certa quantità di monete, in base a leggi assegnate. Sempre con attività concrete, si sollecita a riconoscere la presenza di leggi che semplificano la descrizione di una funzione.

L'attività 2.2 costituisce un passo importante per comprendere la modalità con cui le immagini sono codificate per la riproduzione digitale: si mette in evidenza che le informazioni contenute in una griglia con celle colorate possono essere espresse tramite una funzione avente per dominio il prodotto cartesiano formato dalle coppie ordinate degli indici di riga e di colonna delle celle e per codominio l'insieme dei colori che sono utilizzati nella griglia.

L'attività 2.3 può essere utilizzata come occasione di consolidamento, per condurre lo studente a ripercorrere la nozione di *funzione tabella* relativa a una griglia colorata; lo studente viene inoltre sollecitato a riconoscere come la descrizione della funzione possa essere talora semplificata in presenza di particolari regolarità.

L'attività 2.4 rivede l'associazione tra celle e informazioni già utilizzata nell'Attività 1, inquadrandola nel linguaggio delle funzioni.

L'attività 2.5 costituisce un approfondimento, sollecitando così l'osservazione che, nel modellizzare un oggetto reale tramite una griglia, è necessario operare delle scelte.

Prerequisiti consigliati

- Conoscere la sintassi propria delle griglie che identifica ogni cella con la coppia ordinata di indice di riga e indice di colonna (i, k) (vedere attività 1.4);

- Riconoscere la corrispondenza biunivoca tra celle di una griglia e il prodotto cartesiano dell'insieme degli indici di riga e l'insieme degli indici di colonna (vedere attività 1.7 e 1.8);
- Conoscere il concetto di funzione (dominio, codominio). Tale nozione può essere introdotta nell'ambito dell'attività.

Obiettivi disciplinari dell'Attività 2

- Acquisire la nozione di *funzione tabella* come funzione a due variabili;
- Riconoscere dominio e codominio della *funzione tabella*;
- Saper utilizzare differenti rappresentazioni di funzioni con dominio e codominio finito.

Obiettivi trasversali dell'Attività 2

- Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica, i cui strumenti permettono di affrontare situazioni reali;
- Proporre attività e metodologie in cui l'alunno è attivo, formula ipotesi, discute e argomenta le proprie scelte;
- Creare un ambiente di apprendimento dove sviluppare i due aspetti della matematica: quello applicativo e quello teorico;
- Formulare domande e fornire risposte pertinenti;
- Interagire con il compagno;
- Aspettare il proprio turno per parlare;
- Collaborare e rispettare le consegne dell'attività.

Riassunto delle principali definizioni relative all'Attività 2

- *Coppia ordinata degli indici di una cella* in una griglia: è la coppia (i, k) ove i è l'indice di riga e k è l'indice di colonna.
- *Funzione tabella*: funzione avente per dominio il prodotto cartesiano dell'insieme degli indici di riga e di quello degli indici di colonna di una griglia, per codominio un insieme.
- *Tabella*: una griglia "compilata", in cui in ogni cella è inserito l'elemento associato.
- *Funzione immagine*: è una funzione tabella che prende valori in un insieme di colori.
- *Immagine digitale*: una tabella a valori in un insieme di colori. La rappresentazione di un'immagine è costituita da una griglia in cui le celle sono colorate. A ogni immagine resta associata la funzione immagine avente per dominio l'insieme delle coppie ordinate degli indici delle celle della griglia e per codominio l'insieme dei colori che compaiono nell'immagine.

La terminologia deriva dall'utilizzo corrente: dal punto di vista della funzione immagine, la griglia colorata potrebbe essere assimilata al grafico.

Indice attività

Attività 2.1	Celle e monete: la tabella come funzione di due variabili
Attività 2.2	Dall'immagine alla funzione
Attività 2.3	Immagini e funzioni
Attività 2.4	Dalla funzione alla tabella
Attività 2.5	Descrivere con una immagine

ATTIVITÀ 2.1 Celle e monete: la tabella come funzione di due variabili

Introduzione

Questa attività di laboratorio introduce il concetto di *funzione tabella* giocando con le relazioni tra la coppia di indici (dominio) e l'immagine da individuare.



Obiettivi dell'attività

- Operare con “elementi” da inserire nelle celle per realizzare funzioni (come relazioni tra variabili);
- Modellizzare la tabella come funzione a due variabili;
- Introdurre la nozione di *funzione tabella*;
- Argomentare utilizzando le conoscenze possedute in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere;
- Interagire con il compagno;
- Collaborare e rispettare le consegne dell'attività.

Software usato

Non è richiesto supporto informatico.

Prerequisiti

- Riconoscere l'insieme delle coppie ordinate di indici delle celle di una griglia;
- Conoscere il concetto di funzione;
- Conoscere il valore assoluto di un numero (in alternativa, omettere il quesito 4 che lo utilizza);
- Saper lavorare in coppia o in piccoli gruppi;
- Saper ascoltare.

Spazi: *aula tradizionale*

Tempo medio per svolgere l'attività in classe: *45 minuti complessivi*

Modalità:

- Lavoro individuale;
- Lavoro in coppia;
- Discussioni collettive.

Materiale

- Scheda con una tabella le cui celle sono vuote;

- Almeno 54 elementi abbastanza piccoli e impilabili (monete, gettoni o cartoncini spessi possibilmente a forma di disco oppure “Lego”, ...). Nella scheda, tali elementi sono detti “monete”;
- Penna o matita.

Descrizione attività

L'attività è suddivisa in tre parti: nella prima gli alunni lavorano individualmente, nella seconda e nella terza a coppie, per risolvere la sfida.

Nella prima parte, si consegna a ogni alunno una scheda con una griglia e una certa quantità di “elementi” (monete, cartoncini, Lego, ...) da impilare sulla griglia, in base alla legge indicata nella scheda. Nella scheda studenti sono proposte 3 differenti relazioni. Ribadiamo che nella scheda gli elementi sono chiamati *monete*.

Dopo la fase di brainstorming, durante la quale è bene sottolineare l'associazione creata tra coppie ordinate e numeri (intesi come pile di monete), si creano delle coppie di studenti. Una volta sorteggiato chi è **A** e chi **B**, si chiede ad **A** di individuare una “legge” che consentirà allo studente **B** di collocare le monete sulla griglia in modo tale che tutte le pile della prima colonna siano più basse di quelle della seconda, tutte le pile della seconda colonna siano più basse di quelle della terza, e così via. Lo studente **A** darà poi la descrizione matematica di questa legge allo studente **B** che costruirà le pile seguendo le istruzioni e insieme verificheranno se la condizione richiesta è soddisfatta.

Nella terza parte lo studente **B** disporrà gli elementi sulla griglia, secondo una relazione che ha pensato, e il suo compagno **A** dovrà cercare di ricavare la legge osservando le pile di elementi sopra le celle della tabella.

Al termine, la discussione permetterà di individuare la nozione di *funzione tabella*, cioè una funzione avente:

- come dominio, un prodotto cartesiano di insiemi di indici (in corrispondenza biunivoca con le celle di una griglia);
- come codominio della funzione tabella, un insieme finito in cui vengono presi i valori e sul quale non è necessario porre limitazioni: ad esempio, numeri, monete, oppure (caso di particolare rilievo nel seguito) colori.

Si evita di utilizzare il termine *immagine* di un elemento, perché il termine verrà utilizzato per descrivere tabelle (intese come *griglie riempite*) a valori in un insieme di colori (in linea con la definizione di immagine digitale).

Metodologie: *learning by doing, peer to peer*

L'attività 2.1 vede gli studenti in un apprendimento attivo e, attraverso il gioco con gli elementi (monete, cartoncini, Lego, ...), rafforza e approfondisce (o introduce) il modello matematico di tabella come funzione di due variabili, cioè degli indici i e k .

Si consigliano momenti di discussione e di confronto, per evidenziare che il numero associato alla singola cella viene stabilito in base alla coppia ordinata di indici che caratterizza la cella stessa. La legge utilizzata associa quindi, a ciascuna coppia ordinata, un ben individuato numero: una tale legge permette pertanto di definire una funzione sul prodotto cartesiano degli insiemi di indici di riga e di colonna (in corrispondenza biunivoca con le celle, in base all'attività 1.7 e 1.8). In questa procedura, risulterà chiaro che il codominio della funzione è costituito da un opportuno insieme numerico, atto a contenere i valori che si sono scelti in corrispondenza di ciascuna cella.

Il lavoro che viene svolto per trascrivere l'elenco dei valori ottenuti mette in luce uno dei modi di rappresentare la funzione, che è quello cosiddetto *per elencazione*. In questo primo momento dell'attività, la legge è già assegnata all'interno del quesito. Nelle parti successive, invece, lo studente è sollecitato a compiere il percorso inverso, a partire da una situazione concreta. È bene che la discussione metta in evidenza che non sempre è possibile riassumere la legge della funzione tramite un'unica espressione.

Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti

PARTE A

1. Quale/quali casella/e ha/hanno più monete? Perché?

La casella con più monete è quella con $i + k$ maggiore: la $(3, 4) \rightarrow 7$; infatti la somma cresce quando gli addendi crescono e nella casella $(3, 4)$ entrambi gli indici di riga e di colonna sono i maggiori possibili.

2. Quale/quali casella/e ha/hanno meno monete? Perché?

La casella con meno monete è quella con $i + k$ minore: la $(1, 1) \rightarrow 2$; infatti nella casella $(1, 1)$ entrambi gli indici di riga e di colonna sono i minori possibili.

3. Riporta il numero di monete messo in ogni cella, in modo da poterne tenere memoria:

$(1, 1) \mapsto 2$	$(1, 2) \mapsto 3$	$(1, 3) \mapsto 4$	$(1, 4) \mapsto 5$
$(2, 1) \mapsto 3$	$(2, 2) \mapsto 4$	$(2, 3) \mapsto 5$	$(2, 4) \mapsto 6$
$(3, 1) \mapsto 4$	$(3, 2) \mapsto 5$	$(3, 3) \mapsto 6$	$(3, 4) \mapsto 7$

4. Ora toglì le monete dalla griglia. Poi, riempila di nuovo secondo la seguente legge:

$$(i, k) \mapsto |i - k|$$

e rispondi alle domande 1 e 2 anche in questo caso.

In ogni cella, il numero di monete da inserire è pari alla differenza tra l'indice più grande e quello più piccolo. Il numero di monete per ogni cella è così descritto:

$(1, 1) \mapsto 0$	$(1, 2) \mapsto 1$	$(1, 3) \mapsto 2$	$(1, 4) \mapsto 3$
$(2, 1) \mapsto 1$	$(2, 2) \mapsto 0$	$(2, 3) \mapsto 1$	$(2, 4) \mapsto 2$
$(3, 1) \mapsto 2$	$(3, 2) \mapsto 1$	$(3, 3) \mapsto 0$	$(3, 4) \mapsto 1$

Quale/quali casella/e ha/hanno più monete? Perché?

La casella con più monete è quella con la differenza maggiore, cioè $(1, 4)$.

Quale/quali casella/e ha/hanno meno monete? Perché?

Le caselle con meno monete sono quelle sulla diagonale, con indici uguali $i = k$ e zero monete.

5. Infine, ripeti ancora l'attività utilizzando la relazione $(i, k) \mapsto 2i$ e rispondi nuovamente alle domande 1 e 2.

In ogni cella, il numero di monete da inserire è pari al doppio dell'indice di riga. In particolare, tutte le celle della stessa riga contengono lo stesso numero di monete. La disposizione ottenuta è:

$(1, 1) \mapsto 2$	$(1, 2) \mapsto 2$	$(1, 3) \mapsto 2$	$(1, 4) \mapsto 2$
$(2, 1) \mapsto 4$	$(2, 2) \mapsto 4$	$(2, 3) \mapsto 4$	$(2, 4) \mapsto 4$
$(3, 1) \mapsto 6$	$(3, 2) \mapsto 6$	$(3, 3) \mapsto 6$	$(3, 4) \mapsto 6$

Quale/quali casella/e ha/hanno più monete? Perché?

Le caselle con più monete sono tutte quelle della riga 3, con 6 monete: infatti, 3 è il maggiore indice di riga possibile.

Quale/quali casella/e ha/hanno meno monete? Perché?

Le caselle con meno monete sono tutte quelle della riga 1, con 2 monete: infatti, 1 è il minore indice di riga possibile.

PARTE B e C: The challenge

La soluzione non è unica; il docente lascia gli alunni liberi di esprimersi e osserva il modo di operare e collaborare. Nella parte B, una soluzione possibile è ad esempio quella di mettere 1 moneta in ogni cella della prima colonna, 2 in ogni cella della seconda colonna, 3 nella terza, 4 nella quarta. La legge diventa $(i, k) \mapsto k$.

ATTIVITÀ 2.2 Dall'immagine alla funzione

Introduzione

In questa attività si formalizza la nozione di *funzione tabella* introdotta intuitivamente nella precedente scheda. L'attività vuole portare gli studenti a individuare il concetto di funzione come strumento per descrivere un'immagine composta da una griglia a celle colorate.

NOTA. L'attività può essere introdotta per definire il concetto di funzione, prendendo spunto dalla situazione reale rappresentata dall'immagine.

Obiettivi dell'attività

- Consolidare e formalizzare la visualizzazione della corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle celle di una griglia e il prodotto cartesiano degli insiemi di indici, espressa dalla coppia ordinata di indici associata alle celle;
- Introdurre il concetto di *funzione tabella*, riconoscendo il prodotto cartesiano come suo dominio e un insieme di colori come codominio;
- Individuare la relazione tabella-funzione;
- Rappresentare una funzione tramite rappresentazione grafica con frecce e diagrammi di Eulero-Venn;
- Collaborare e rispettare le consegne dell'attività.

Software usato

L'attività può essere svolta con carta e penna. Tuttavia è possibile anche utilizzare GeoGebra (si vedano le risorse didattiche ad integrazione di questo percorso).

Prerequisiti

- Conoscere il prodotto cartesiano di insiemi;
- Riconoscere le coppie ordinate della tabella;
- Conoscere la nozione di funzione (consigliato, ma non necessario).

Spazi: *aula tradizionale*

Se si decide di utilizzare GeoGebra, è richiesto l'uso del computer personale dello studente e/o del laboratorio di informatica.

Tempo medio per svolgere l'attività in classe: 15 minuti complessivi

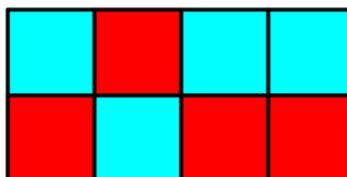
Modalità: *lavoro singolo, discussione collettiva*

Materiale

- Scheda con una tabella le cui celle hanno come elementi i colori;
- In alternativa è possibile utilizzare GeoGebra per la simulazione e la verifica autonoma degli errori.

Descrizione attività

Ciascuno studente lavora avendo a disposizione una scheda operativa in cui è disegnata una griglia colorata come ad esempio la seguente.



Agli studenti è richiesto di scrivere la legge che associa a ogni coppia di indici (che individuano una cella) il colore della cella corrispondente.

Presentata la funzione nella forma:

$$f: \{1, 2\} \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{\text{azzurro}, \text{rosso}\}$$

(1,1) -->

(1,2) -->

(1,3) -->

(1,4) -->

(2,1) -->

(2,2) -->

(2,3) -->

(2,4) -->

si chiede di inserire la parola *azzurro* o *rosso* nel riquadro associato a una coppia di indici.

Se si usa la corrispondente scheda sviluppata con GeoGebra, la cella corrispondente a ciascuna coppia di indici apparirà colorata del colore inserito.

Nel punto successivo, è richiesto di rappresentare graficamente tale legge, tramite frecce che collegano elementi dell'insieme degli indici e dell'insieme dei colori, rappresentati tramite diagrammi di Eulero-Venn.

Nella scheda viene introdotta la denominazione di *funzione tabella* e ne vengono esplicitamente indicati il dominio e il codominio.

Metodologie: *learning by doing, trial and error, discussione*

È possibile svolgere l'attività dividendo i ragazzi in coppie e dando a ciascun componente della coppia una griglia colorata in maniera differente; ogni membro della coppia, tenendo nascosta la griglia, ne produrrà una descrizione tramite la corrispondenza indice-colore; scambiando, infine, tra i ragazzi le descrizioni prodotte, è possibile verificare se le descrizioni permettono di ricostruire l'immagine iniziale. A tal fine nel file contenente i materiali per gli studenti sono fornite due schede identiche a meno dell'immagine colorata.

In alternativa, è possibile utilizzare GeoGebra: in tal caso ciascuno studente lavora inizialmente in modo autonomo, con la possibilità di verificare la correttezza delle proprie proposte.

L'elenco completo delle coppie di indici delle celle è fornito, per consentire di concentrarsi sulla legge che descrive la corrispondenza. L'attività proposta consente di tradurre in un linguaggio formale ciò che viene suggerito in modo molto evidente dalla tabella di colori

(ovvero di quale colore è quale casella). In seguito, GeoGebra può essere utilizzato anche per riprodurre differenti immagini, su iniziativa dello studente o su suggerimento del docente.

Si consiglia di prevedere un momento di discussione plenaria in cui analizzare con il gruppo classe la relazione tra tabelle e funzioni, condividendo i termini *dominio/codominio*; si consiglia, inoltre, di analizzare e confrontare le modalità grafiche adottate dagli studenti nella rappresentazione della *funzione tabella*: i ragazzi possono usare linee e non frecce, differenziare con il colore le frecce a seconda della destinazione, utilizzare linee curve per cercare di evitare intrecci,

Si suggerisce inoltre di non utilizzare, negli esempi proposti, tabelle con caselle bianche; gli studenti potrebbero infatti associare al bianco l'assenza di colore.

Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti

azzurro	rosso	azzurro	azzurro
rosso	azzurro	rosso	rosso

1. Trascrivi i valori da attribuire nella funzione corrispondente alla tabella, attribuendo a ogni coppia di indici il colore della corrispondente cella.

La funzione cercata è:

$$f: \{1, 2\} \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{\text{azzurro}, \text{rosso}\}$$

$$(1,1) \mapsto \text{azzurro}$$

$$(1,2) \mapsto \text{rosso}$$

$$(1,3) \mapsto \text{azzurro}$$

$$(1,4) \mapsto \text{azzurro}$$

$$(2,1) \mapsto \text{rosso}$$

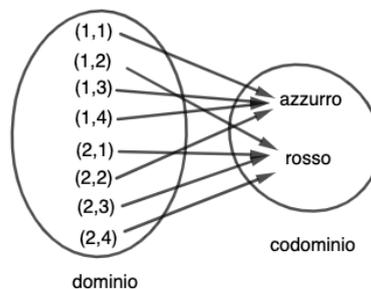
$$(2,2) \mapsto \text{azzurro}$$

$$(2,3) \mapsto \text{rosso}$$

$$(2,4) \mapsto \text{rosso}$$

3. Nella figura, l'insieme delle coppie di indici e l'insieme dei colori sono rappresentati da diagrammi di Eulero–Venn. Rappresenta la funzione f completando l'inserimento delle frecce che ne descrivono la legge.

Una possibile soluzione è data in figura:



ATTIVITÀ 2.3 Immagini e funzioni

Introduzione

In questa attività, come nella precedente 2.2, l'alunno ha a disposizione una scheda con una griglia le cui celle sono colorate; attraverso una serie di domande, gli alunni sono guidati e stimolati a individuare la *funzione tabella* che descrive l'associazione di un colore a ciascuna cella.

Rispetto all'attività 2.2, la griglia proposta presenta una maggiore complessità. L'alunno deve individuare autonomamente dominio e codominio della *funzione tabella* associata. Le maggiori dimensioni della griglia proposta e la disposizione dei colori suggerisce l'opportunità (ove possibile) di descrivere la legge della funzione utilizzando come variabili gli indici di riga e di colonna.

Obiettivi dell'attività

- Consolidare la visualizzazione della corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle celle di una griglia e il prodotto cartesiano degli insiemi di indici, espressa dalla coppia ordinata di indici associata alle celle;
- Riconoscere il prodotto cartesiano come dominio della *funzione tabella*;
- Riconoscere gli elementi associati a una cella (i colori) come elementi del codominio della *funzione tabella*;
- Individuare la legge che descrive la *funzione tabella*;
- Individuare la relazione tra la griglia colorata e la *funzione tabella*;
- Argomentare utilizzando le conoscenze possedute in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere;
- Interagire con il compagno;
- Collaborare e rispettare le consegne dell'attività.

Software usato

Non è richiesto supporto informatico.

È possibile utilizzare la web app Zaplycode (<https://www.zaplycode.it/play/home>) o altre analoghe, legate alla pixel art, per rappresentare la tabella con le celle colorate. La presenza dei numeri indicanti gli indici di riga non è un problema, dal momento che sono già stati introdotti nell'Attività 1. L'uso di una web app per pixel art facilita la creazione di griglie le cui celle sono colorate. In questo modo si sottolinea l'interpretazione di una immagine digitale come griglia colorata, che è lo sfondo motivazionale dell'Attività 2.

Prerequisiti

- Conoscere il prodotto cartesiano di insiemi;
- Riconoscere le coppie ordinate della tabella;
- Saper lavorare in coppia o in piccoli gruppi;
- Saper ascoltare.

Spazi: aula tradizionale

Se si decide di utilizzare web app legate alla pixel art, è richiesto l'uso del computer personale dello studente e/o del laboratorio di informatica. L'uso della web app permette lo svolgimento dell'attività online con la creazione di uno spazio condiviso.

Tempo medio per svolgere l'attività in classe: 20 minuti complessivi

Modalità:

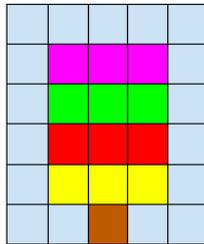
- Lavoro in coppia;
- Discussioni collettive.

Materiale:

- Scheda con una tabella le cui celle hanno come elementi i colori.

Descrizione attività

Si suddivide la classe in coppie e a ogni coppia si consegna una scheda con una tabella le cui celle sono di diversi colori.



Agli studenti è richiesto di individuare il prodotto cartesiano degli insiemi degli indici di riga e di colonna, l'insieme dei colori utilizzati nella tabella, la relazione che descrive la *funzione tabella* associata.

Si chiede inoltre di rispondere ad alcune domande stimolo e di argomentare le risposte insieme al compagno. Le argomentazioni proposte sono poi discusse insieme alla classe.

Metodologie: *learning by doing, peer to peer*

L'attività vuole portare gli studenti a individuare il concetto di funzione come strumento per descrivere un'immagine composta da una griglia a celle colorate.

Si consiglia di prevedere un momento di discussione plenaria in cui analizzare con il gruppo classe la relazione tra tabelle e funzioni. Nella discussione si consiglia di rivedere, nel contesto dello specifico esempio, la terminologia (dominio, codominio, legge) associata alla nozione di funzione.

Inoltre, si consiglia di far emergere dalla discussione che sono possibili molti modi per evidenziare "elementi di regolarità" nella descrizione dell'immagine; si può anche soffermarsi sulle criticità che emergono durante la descrizione della legge cercata (colonne con lo stesso colore, segmenti di riga con lo stesso colore, necessità di indicare con chiarezza i valori assunti dagli indici di riga e di colonna, ...)

Il termine *griglia colorata* può essere sostituito con *immagine digitale*.

È possibile far svolgere l'attività singolarmente, come compito a casa, e analizzare collettivamente in classe le soluzioni proposte.

È inoltre possibile sostituire l'immagine proposta con altre griglie colorate, in modo da differenziare il lavoro tra coppie differenti, o ripetere l'attività. Si suggerisce inoltre di non introdurre caselle bianche nelle griglie colorate proposte agli studenti; gli studenti potrebbero infatti associare al bianco l'assenza di colore.

Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti

1. Considerate l'immagine. Scrivete l'insieme degli indici di riga e l'insieme degli indici di colonna della griglia colorata.

insieme degli indici di riga = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

insieme degli indici di colonna = {1, 2, 3, 4, 5}

2. Come indicate il prodotto cartesiano fra questi insiemi e quali sono i suoi elementi?
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \dots, (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$ Tale prodotto cartesiano costituisce il dominio della funzione tabella associata all'immagine digitale.

3. Scrivete l'insieme dei colori presenti dell'immagine.

Insieme dei colori = {grigio, fucsia, verde, rosso, giallo, marrone}

Tale insieme di colori costituisce il codominio della funzione tabella associata all'immagine digitale.

4. Utilizzando le risposte nei punti 2 e 3, scrivete le istruzioni per riprodurre l'immagine. Formulate tali istruzioni nella forma di una *funzione tabella* a valori nell'insieme di colori definito nel punto 3 e descrivete, per ciascuna coppia ordinata, quale colore è a essa associato; ad esempio, $(1, 1) \mapsto$ grigio. È possibile rendere più compatto l'elenco?

Procedendo per elencazione, gli studenti possono proporre una soluzione del tipo

$f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{\text{grigio, fucsia, verde, rosso, giallo, marrone}\}$

*$(1; 1) \mapsto$ grigio; $(1, 2) \mapsto$ grigio; $(1, 3) \mapsto$ grigio; $(1, 4) \mapsto$ grigio; $(1, 5) \mapsto$ grigio;
 $(2, 1) \mapsto$ grigio; $(2, 2) \mapsto$ fucsia; $(2, 3) \mapsto$ fucsia; $(2, 4) \mapsto$ fucsia; $(2, 5) \mapsto$ grigio;
 $(3, 1) \mapsto$ grigio; $(3, 2) \mapsto$ verde; $(3, 3) \mapsto$ verde; $(3, 4) \mapsto$ verde; $(3, 5) \mapsto$ grigio;
 $(4, 1) \mapsto$ grigio; $(4, 2) \mapsto$ rosso; $(4, 3) \mapsto$ rosso; $(4, 4) \mapsto$ rosso; $(4, 5) \mapsto$ grigio;
 $(5, 1) \mapsto$ grigio; $(5, 2) \mapsto$ giallo; $(5, 3) \mapsto$ giallo; $(5, 4) \mapsto$ giallo; $(5, 5) \mapsto$ grigio;
 $(6; 1) \mapsto$ grigio; $(6, 2) \mapsto$ grigio; $(6, 3) \mapsto$ marrone; $(6, 4) \mapsto$ grigio; $(6, 5) \mapsto$ grigio.*

Oppure, fornire soluzioni più compatte, come ad esempio:

$(1, k) \mapsto$ grigio per $k = 1, \dots, 5$

$(i, 1) \mapsto$ grigio per $i = 2, \dots, 5$

$(6, k) \mapsto$ grigio per $k = 1, 2, 4, 5$

$(2, k) \mapsto$ fucsia per $k = 2, 3, 4$

$(3, k) \mapsto$ verde per $k = 2, 3, 4$

$(4, k) \mapsto$ rosso per $k = 2, 3, 4$

$(5, k) \mapsto$ giallo per $k = 2, 3, 4$

$(i, 5) \mapsto$ grigio per $i = 1, \dots, 6$

$(6, k) \mapsto$ marrone per $k = 3$

$(i, 3) \mapsto$ marrone per $i = 6$

Si osservi che è possibile scrivere più volte l'indicazione di quale colore sia associato a una cella ma è importante che le indicazioni siano coerenti.

5. Quali sono il dominio e il codominio della funzione descritta? È possibile associare alla stessa cella più di un colore?

Il dominio della funzione tabella è il prodotto cartesiano $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Il codominio è l'insieme dei colori {grigio, fucsia, verde, rosso, giallo, marrone}.

Non è possibile attribuire colori differenti alla stessa cella, perché per definizione di funzione a ogni elemento del dominio si può associare uno e un solo valore del codominio.

ATTIVITÀ 2.4 Dalla funzione alla tabella

Introduzione

Nelle attività precedenti, a partire da una comune griglia nella quale a ciascuna casella di indice (i, k) viene associata un'informazione (una pila di monete, un colore, ...), abbiamo definito una funzione che ha come dominio l'insieme delle coppie di indici della griglia e come codominio un insieme atto a descrivere l'informazione in questione (numero di monete, colore utilizzato, ...)

L'attività presente mostra che la procedura si può invertire: comunque venga assegnata una funzione avente per dominio l'insieme delle coppie di indici di una griglia, a tale funzione resta sempre associata una tabella, nel senso che è possibile rappresentare la funzione suddetta con una griglia in cui, in ciascuna casella, viene collocata la corrispondente immagine della funzione. Tale osservazione ripercorre e formalizza riflessioni ricorrenti nell'Attività 1, rendendo evidente che la funzione tabella è l'oggetto matematico adatto a formalizzare il concetto intuitivo di tabella compilata in ogni sua casella con un certo criterio. Quest'attività, pertanto, ci consente di completare il percorso didattico che supporta l'approccio ricorrente che definisce le tabelle (e le immagini digitali) come particolari funzioni.

Obiettivi dell'attività

- Comprendere la corrispondenza tra *tabelle* e *funzioni tabelle*;
- Individuare il possibile carattere suriettivo e/o iniettivo di una *funzione tabella*;
- Distinguere differenti funzioni;
- Argomentare utilizzando le conoscenze possedute in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere;
- Collaborare e rispettare le consegne dell'attività.

Software usato

Non è richiesto supporto informatico.

Prerequisiti

- Conoscere il prodotto cartesiano di insiemi di indici di una griglia;
- Riconoscere iniettività e suriettività di una funzione.

Spazi: *aula tradizionale*

Tempo medio per svolgere l'attività in classe: *15 minuti complessivi*

Modalità

- Lavoro individuale;
- Discussioni collettive.

Materiale

- Scheda con una tabella con celle vuote;
- Penna o matite per inserire gli elementi nelle celle seguendo le istruzioni stampate sulla scheda.

Descrizione attività

L'attività è svolta singolarmente dagli studenti, con una discussione conclusiva che coinvolge tutta la classe.

Si consegna a ogni alunno una scheda con una griglia “vuota”, con l'indicazione di una funzione che, per ogni cella, associa un elemento alla coppia di indici che caratterizza la cella.

$$f: \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{A, B, C, 9, 15, D\}$$

$(1,1) \mapsto A$	$(2,3) \mapsto D$
$(1,2) \mapsto B$	$(2,4) \mapsto D$
$(1,3) \mapsto C$	$(3,1) \mapsto 15$
$(1,4) \mapsto D$	$(3,2) \mapsto B$
$(2,1) \mapsto 9$	$(3,3) \mapsto C$
$(2,2) \mapsto 15$	$(3,4) \mapsto D$

Le istruzioni fornite e alcune domande guida stimolano lo studente a ragionare sulle caratteristiche della funzione e a come collegarla alla tabella. Si chiede se la funzione f è iniettiva/suriettiva.

Si chiede, inoltre, di determinare una funzione g (con dominio e codominio uguale a f) che sia differente da f ; in particolare, si domanda se è possibile fare in modo che g sia iniettiva.

Metodologie: *learning by doing, peer to peer*

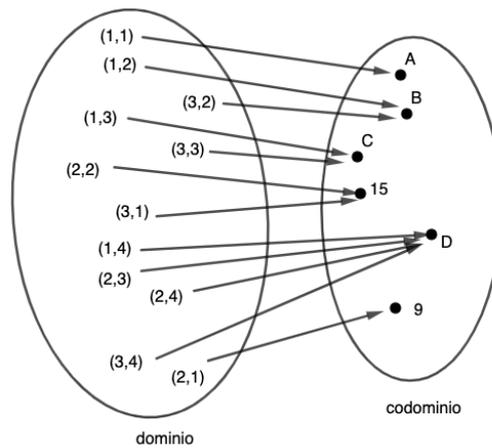
L'attività 2.4 è utile per far riflettere gli studenti su conoscenze e competenze già acquisite.

Si consiglia di prevedere un momento di discussione plenaria in cui analizzare con il gruppo classe la relazione tra tabelle e funzioni, oltre che sulle caratteristiche delle funzioni.

In particolare, si ritiene utile che la discussione metta in evidenza che, per poter affermare che due funzioni sono differenti, è sufficiente che assumano valori differenti su un particolare elemento del dominio.

NOTA CRITICA: molto più difficile è, invece, in questo contesto, far passare l'idea che funzioni con codominio diverso siano differenti tra loro. Infatti, se lo studente è arrivato a immaginare una griglia le cui caselle sono colorate in vario modo come una possibile rappresentazione di una funzione di due variabili intere, non sarà facile convincerlo che, ad esempio, ampliando l'insieme dei colori, l'oggetto matematico sia formalmente differente.

È possibile anche discutere una rappresentazione grafica di f in cui dominio e codominio siano rappresentati con diagrammi di Eulero-Venn, come riportato nell'immagine seguente.



Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti

A	B	C	D
9	15	D	D
15	B	C	D

2. I valori attribuiti alle celle sono tutti gli elementi di $\{A, B, C, 9, 15, D\}$?
Si: A è associato ad esempio a (1,1); B a (1,2), C a (1,3); D a (1,4); 9 a (2,1); 15 a (2,2).
3. La funzione f è iniettiva (cioè, celle diverse sono associate a oggetti diversi)?
 È suriettiva (cioè, tutti gli elementi del codominio sono associati almeno ad una cella)? È biiettiva?
La funzione f è suriettiva per quanto commentato al punto precedente. Non è iniettiva perché (2,3) e (2,4) sono coppie di indici tra loro distinte cui è associato lo stesso valore D. Non essendo iniettiva, la funzione f non può essere biiettiva.
4. Descrivi una funzione $g: \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{A, B, C, 9, 15, D\}$ differente da f .
 È possibile scegliere g in modo che sia iniettiva?
Ad esempio, è possibile considerare la funzione

$$g: \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{A, B, C, 9, 15, D\}$$

$$(i,k) \mapsto A \text{ per ogni } i = 1, 2, 3 \text{ e ogni } k = 1, 2, 3, 4.$$
Tale funzione è detta funzione costante A.
La funzione g non può essere scelta in modo da essere iniettiva, perché il codominio ha meno elementi del dominio, e quindi necessariamente devono esistere due differenti elementi del dominio cui viene associato lo stesso elemento nel codominio.

ATTIVITÀ 2.5 Descrivere con una immagine

Introduzione

Questa attività vede gli alunni impegnati nel consolidare e approfondire il concetto di funzione tabella. L'attività svolge, inoltre, un ruolo di ponte rispetto alle successive Attività 3 e 4: viene infatti messo in evidenza che, nella convenzione delle immagini digitali e delle *funzioni tabelle*, ruotare una immagine digitale produce, in generale, una nuova immagine, con una nuova funzione tabella associata. Impareremo nelle attività successive come confrontare queste due immagini: per ora, lo studente è invitato a prendere consapevolezza delle scelte che compie nel riprodurre una immagine.

Nell'attività proposta, gli alunni operano un processo di modellizzazione matematica, in modo che un oggetto sia sostituito da un modello e, esaminando questo modello, si possano ottenere delle informazioni relative all'oggetto o alla situazione data in origine.

L'attività richiede, quindi, di impiegare i concetti appresi applicandoli a contesti differenti da quelli già affrontati.

Obiettivi dell'attività

- Ricavare un modello di immagine digitale in un contesto figurativo tridimensionale;
- Riprodurre una immagine digitale e la funzione tabella associata;
- Argomentare utilizzando le conoscenze possedute in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere;
- Stabilire dei criteri condivisi;
- Interagire con il compagno.

Software usato

Non è richiesto supporto informatico; l'immagine digitale può essere rappresentata con web app per pixel art.

Prerequisiti

- Saper operare con le griglie;
- Conoscere il concetto di funzione tabella;
- Saper lavorare in coppia o in piccoli gruppi.

Spazi: aula tradizionale

Se si decide di utilizzare una web app è richiesto l'uso di un device personale dello studente o del laboratorio di informatica.

Tempo medio per svolgere l'attività in classe: 30 minuti complessivi

Modalità:

- Lavoro individuale o in piccoli gruppi in ottica peer to peer;
- Discussioni collettive.

Materiale

- Scheda con un'immagine "tridimensionale" o materiali quali il cubo di Rubik o un cubo di Lego;

- Penna o matita.

Descrizione attività

L'attività è suddivisa in due parti, intervallate da una fase di discussione.

Agli alunni, divisi in piccoli gruppi, è fornita una scheda con immagini "tridimensionali".

In alternativa possono essere forniti un cubo di Rubik o una costruzione a parallelepipedo realizzata con dei Lego, permettendo in tal modo una esperienza più immediata e completa.



Agli alunni è richiesto di rappresentare la superficie superiore (vista dall'alto) come una immagine digitale e di scrivere la *funzione tabella* associata.

Alcune domande guida invitano a riflettere sul fatto che sia possibile operare scelte differenti nel riprodurre l'immagine. Si può per esempio chiedere quale vertice sia stato scelto per diventare quello in alto a sinistra nell'immagine digitale.

Segue una discussione collettiva per condividere e consolidare tale osservazione.

Nella seconda parte dell'attività viene fornita una immagine differente, che non ha una faccia superiore piana ma che vista dall'alto appare comunque come un'immagine con quadretti colorati. Gli studenti, sempre lavorando in piccoli gruppi, riproducono l'immagine dall'alto da due diversi punti di vista, poi condividono con il resto della classe le loro scelte e le loro osservazioni.



Metodologie: *learning by doing, peer to peer*

Il momento di brainstorming risulta particolarmente significativo per il processo di modellizzazione.

Dopo la fase di formalizzazione da parte degli alunni, al docente è richiesto di analizzare e discutere le soluzioni fornite e le loro modalità, aprendo una fase di discussione e riflessione, osservando, per esempio, se gli alunni hanno indicato l'orientamento utilizzato per rappresentare la faccia superiore e/o hanno condiviso il punto di vista usato.

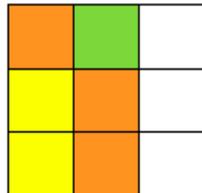
Anche questa seconda parte porta ad analizzare le precedenti criticità legate alla scelta della casella (1, 1) e possono sorgere le stesse considerazioni precedenti.

Un'ulteriore discussione può emergere in merito alla “figura con gradini” presentata; la visione dall'alto, tuttavia, dovrebbe invitare gli studenti a modellizzare la tabella 3 x 3 facendo prevalere l'elemento “colore” della cella da visualizzare.

Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti

Parte A

Esempi di soluzioni diverse



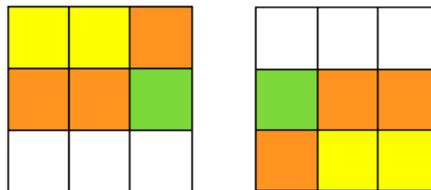
$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{bianco, verde, giallo, arancione}\}$$

$$(1,1) \mapsto \text{arancione} \quad (1,2) \mapsto \text{verde} \quad (1,3) \mapsto \text{bianco}$$

$$(2,1) \mapsto \text{giallo} \quad (2,2) \mapsto \text{arancione} \quad (2,3) \mapsto \text{bianco}$$

$$(3,1) \mapsto \text{giallo} \quad (3,2) \mapsto \text{arancione} \quad (3,3) \mapsto \text{bianco}$$

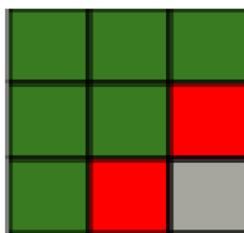
Altre possibili soluzioni:



Il dominio e il codominio sono gli stessi, ma la legge che descrive la funzione tabella cambia. Come immagini digitali, tali immagini sono considerate differenti.

Parte B

Per la seconda figura, due possibili immagini differenti che rappresentano la faccia superiore sono:

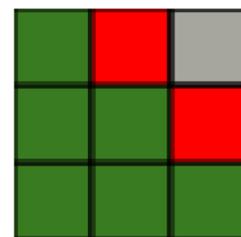


$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{grigio, rosso, verde}\}$$

$$(1,1) \mapsto \text{verde}; (1,2) \mapsto \text{verde}; (1,3) \mapsto \text{verde}$$

$$(2,1) \mapsto \text{verde}; (2,2) \mapsto \text{verde}; (2,3) \mapsto \text{rosso}$$

$$(3,1) \mapsto \text{verde}; (3,2) \mapsto \text{rosso}; (3,3) \mapsto \text{grigio}$$



$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{grigio, rosso, verde}\}$$

$$(1,1) \mapsto \text{verde}; (1,2) \mapsto \text{rosso}; (1,3) \mapsto \text{grigio}$$

$$(2,1) \mapsto \text{verde}; (2,2) \mapsto \text{verde}; (2,3) \mapsto \text{rosso}$$

$$(3,1) \mapsto \text{verde}; (3,2) \mapsto \text{verde}; (3,3) \mapsto \text{verde}$$