

## Attività 3: scheda docente

### Composizione di funzioni e cambio di colore

---

#### Introduzione

Le attività che seguono si concentrano su una possibile trasformazione di un'immagine, trasformazione che cambia i colori attraverso l'applicazione di filtri o l'uso di una palette<sup>1</sup> differente (si pensi a quanto accade nei programmi di editing di diapositive). Dal punto di vista formale questa trasformazione si può descrivere attraverso la composizione della *funzione tabella* (che descrive l'immagine iniziale) con una funzione tra insiemi di colori: la composizione "a valle" consente di associare a ciascun colore originario un altro colore secondo una certa regola (ad esempio, potrebbe portare a sostituire le celle bianche con celle rosse).

Gli studenti sono guidati a formalizzare quest'idea gradualmente attraverso le attività seguenti. Tali attività possono essere supportate in varie situazioni dall'utilizzo di strumenti informatici che favoriscano il lavoro in autonomia dei singoli studenti e il riconoscimento degli errori.

Le attività proposte possono essere utilizzate come introduzione alla nozione di composizione tra funzioni e forniscono una occasione per introdurre elementi di calcolo combinatorio: in particolare, introducono al problema di come determinare la cardinalità dell'insieme delle funzioni biiettive di un insieme finito in sé o, più in generale, come determinare la cardinalità dell'insieme delle funzioni iniettive da un insieme finito in un altro.

Nelle attività 3.1 e 3.2 gli studenti modificano immagini digitali tramite applicazioni sul cellulare o su calcolatore e riflettono su come descrivere la loro attività nel contesto delle *funzioni tabelle*. Questa fase operativa contribuisce a chiarire la correlazione tra la pratica quotidiana e la descrizione matematica del *cambio di colori* operata dalla composizione a valle di cui abbiamo detto sopra.

L'attività 3.3 introduce il *cambio di colore* tramite una funzione preassegnata tra insiemi di colori. L'attività sollecita la riflessione su quale sia il legame tra la funzione tabella dell'immagine iniziale, quella dell'immagine modificata e la funzione che descrive il cambio di colori: la discussione collettiva che la completa fa emergere la nozione di composizione.

L'attività 3.4 consolida la nozione di composizione tra funzioni e illustra come, componendo una *funzione tabella* con una *funzione di cambio dei colori*, si ottiene la *funzione tabella* dell'immagine modificata dal cambio di colori. Viene inoltre introdotta la rappresentazione grafica della composizione.

Nell'attività 3.5 si riflette ancora su quali caratteristiche debba avere un cambio di colore e si approfitta per consolidare la nozione di funzioni tabelle distinte tra loro.

Nell'attività 3.6 si opera sulla medesima immagine con vari cambi di colore, per riflettere su quali e quante modifiche (e quali effetti visivi) possono essere introdotti tramite il cambio di colori. Ci si limita a funzioni di cambio dei colori che siano iniettive, introducendo la discussione su come contare le funzioni di cambio (che sono funzioni biiettive o iniettive con un codominio finito assegnato).

---

<sup>1</sup> Nell'informatica, come nelle arti pittoriche, il termine inglese *palette* si usa come sinonimo di *tavolozza*, ovvero di gamma di colori.

L'attività 3.7 costituisce un approfondimento sulle tecniche di colorazione per passare da foto in bianco e nero a foto a colori e può essere omessa in un percorso di base.

### **Prerequisiti consigliati**

- Riconoscere la sintassi propria delle tabelle/matrici che identifica le celle con la coppia ordinata di indice riga e indice colonna  $(i, k)$ ;
- Conoscere il concetto di funzione (dominio, codominio, legge);
- Essere in grado di rappresentare una funzione tramite diagrammi di Eulero-Venn;
- Saper operare l'associazione tra immagini digitali (cioè griglie con celle colorate) e *funzioni tabelle* (vedi Attività 2).

### **Obiettivi disciplinari dell'Attività 3**

- Saper riconoscere e raggruppare gli elementi del dominio che hanno la stessa immagine tramite una funzione tra insiemi finiti;
- Saper comporre le funzioni tra insiemi finiti e saper rappresentare la composizione tramite diagrammi;
- Comprendere le modalità per distinguere e contare le funzioni tra insiemi finiti;
- Comprendere come operare in una immagine digitale per sostituzione dei colori.

### **Obiettivi trasversali dell'Attività 3**

- Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica, i cui strumenti permettono di affrontare situazioni reali;
- Proporre attività e metodologie in cui l'alunno è attivo, formula ipotesi, discute e argomenta le proprie scelte;
- Creare un ambiente di apprendimento in cui si intrecciano aspetti applicativi e teorici della matematica;
- Formulare domande che emergono dalle attività svolte e fornire risposte pertinenti;
- Interagire con il compagno;
- Aspettare il proprio turno per parlare;
- Collaborare e rispettare le consegne dell'attività.

### **Indice attività**

|              |                                                                         |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Attività 3.1 | Fotografie e filtri                                                     |
| Attività 3.2 | WebQuest: Pop Art                                                       |
| Attività 3.3 | Cambio di colore: dalla funzione all'immagine                           |
| Attività 3.4 | Cambio di colore: dall'immagine alla funzione                           |
| Attività 3.5 | Che immagini posso ottenere?                                            |
| Attività 3.6 | Quanti cambi di colore posso fare?                                      |
| Attività 3.7 | WebQuest: come sono stati trasformati a colori i film e le foto in B/N? |

## **ATTIVITÀ 3.1    Fotografie e filtri**

### **Introduzione**

In questa attività gli alunni possono lavorare in coppie con uno smartphone. In alternativa, è possibile lavorare in gruppi o utilizzando un calcolatore.

Si propone qui un'attività che nasce dall'utilizzo della fotocamera del cellulare e dei suoi filtri. Lo scopo è di creare un modello significativo di una trasformazione di immagini in cui si cambia solo la tavolozza ("palette") dei colori utilizzati in un contesto che gli studenti percepiscono come interessante e "amichevole".

Lo spunto proveniente dalla situazione reale pone la questione di come rappresentare la sostituzione sistematica di un colore con un altro (in tutta l'immagine) nel contesto delle *funzioni tabelle*.

### **Obiettivi dell'attività**

- Sollecitare l'individuazione di un modello per la trasformazione di immagini cambiando la tavolozza dei colori.

### **Software usato**

Cellulare/smartphone con possibilità di fare fotografie e di usare la "funzione" filtro; si può usare un computer e scattare selfie.

### **Prerequisiti**

Non sono richiesti particolari prerequisiti per la parte iniziale dell'attività, ma la discussione successiva prevede la conoscenza della *funzione tabella*.

**Spazi:** *aula tradizionale*

**Tempo medio per svolgere l'attività in classe:** *30 minuti complessivi*

### **Modalità**

- Lavoro individuale e di coppia;
- Discussione collettiva.

### **Materiale**

- Smartphone con possibilità di fare fotografie e la funzione filtro;
- (in alternativa) Computer con programma di grafica come Paint.

---

### **Descrizione attività**

Gli studenti lavorano in coppie o in piccoli gruppi. Agli studenti è richiesto di scattare, con uno smartphone, alcune foto dello stesso oggetto, ad esempio del banco, prima senza usare filtri e poi applicando due differenti filtri, e di provare a spiegare al compagno le differenze che si osservano.

Insieme, i due studenti cercano di formalizzare l'operazione di modifica effettuata, nel contesto della descrizione delle immagini digitali tramite *funzioni tabelle*.

Differenti gradazioni dello stesso colore vanno intese come "differenti colori".

---

**Metodologie: *learning by doing*, *interdisciplinarietà (digital skills)***

L'attività vuole introdurre una particolare modalità di modifica delle immagini digitali, sostituendo in tutta l'immagine uno stesso colore con un altro (secondo una legge preassegnata). Ci si attende che la manipolazione concreta dell'immagine chiarisca l'effetto delle trasformazioni considerate e l'ordine con cui le operazioni sono svolte.

Una domanda stimolo invita a riflettere su come descrivere e formalizzare la trasformazione. Ci si attende che i ragazzi consolidino l'idea che prima sia necessario individuare l'immagine (e quindi la *funzione tabella* associata) e solo in seguito si intervenga con una modifica: il cambio di colore avviene a valle della scelta dell'immagine, e consiste nella sostituzione di un colore (o più) con un altro (altri).

Si suggerisce di discutere collettivamente le proposte di formalizzazione individuate dagli studenti. Ci si attende che da tale discussione possa emergere la necessità di formalizzare il cambio di palette di colori con una funzione che ad ogni colore precedente associ il colore modificato.

---

**Soluzione degli esercizi proposti nella scheda studenti**

Non si forniscono soluzioni all'attività poiché è importante prendere spunto da quanto emerge dalle osservazioni degli alunni.

Le attività successive porteranno a chiarire che una formalizzazione può essere rappresentata dai seguenti passaggi:

- si associa a una immagine digitale la corrispondente funzione tabella  $f$
- si introduce una funzione di cambio  $g$ ; il dominio di  $g$  è il codominio di  $f$  (cioè l'insieme dei colori di  $f$ ), mentre il codominio di  $g$  è un insieme di colori (che può coincidere con l'insieme dei colori di  $f$ ). Nei casi che tratteremo,  $g$  sarà sempre iniettiva e quindi il numero di colori del codominio di  $g$  dovrà essere non inferiore a quello del suo dominio.
- la composizione  $f' = g \circ f$  è la funzione tabella dell'immagine dopo il cambio di colori.

Non ci si attende che gli studenti siano in grado di completare la formalizzazione, ma che la riflessione svolta apra la strada al percorso articolato nelle attività 3.3 e 3.4.

## **ATTIVITÀ 3.2    WebQuest: Pop Art**

### **Introduzione**

Si chiede di utilizzare il software PowerPoint (o un software analogo) per cambiare la tavolozza di colori ad immagini scaricate da Internet. Sebbene gli alunni siano autonomi nell'uso della tecnologia, questa attività aiuta a valorizzare le competenze digitali e a sottolineare l'importanza di un utilizzo consapevole del web come il rispetto del diritto d'autore (interdisciplinarietà).

### **Obiettivi dell'attività**

- Cercare, valutare e selezionare informazioni in rete;
- Organizzare e condividere informazioni in rete;
- Comprendere i cambiamenti di un'immagine applicando filtri di colore;
- Conoscere alcune applicazioni artistiche dei filtri di colore.

**Software usato:** *PowerPoint (o altri analoghi, in grado di cambiare la tavolozza colori)*

**Prerequisiti:** non sono richiesti prerequisiti

### **Spazi**

La ricerca online può essere proposta come attività da svolgere a casa come compito, oppure in classe se si dispone di pc o tablet con PowerPoint; in alternativa si utilizza il laboratorio informatico.

**Tempo medio per svolgere l'attività in classe:** si prevedono 30/45 minuti per lasciare che gli alunni lavorino in autonomia

### **Modalità**

- Lavoro individuale o per piccoli gruppi (a discrezione del docente)

### **Materiale**

- Computer (tablet, smartphone);
- PowerPoint o programma di grafica;
- Connessione Internet.

---

### **Descrizione attività**

Si chiede agli alunni di effettuare una ricerca in Internet delle famose immagini che Andy Warhol ha riprodotto su più gamme di colori e successivamente di utilizzare il programma PowerPoint selezionando uno stile di diapositiva e l'opzione che cambia la tavolozza ("palette") di colori.

Si chiede che i ragazzi trascrivano l'indirizzo del sito di provenienza delle immagini.

I lavori svolti vengono presentati e discussi collettivamente in classe.

A discrezione dell'insegnante, è possibile arricchire la ricerca discutendo il significato e la motivazione artistica delle rappresentazioni di Warhol.

---

**Metodologie:** *WebQuest, learning by doing*

L'attività può essere proposta insieme alla 3.1 o assegnata come lavoro individuale da svolgere a casa. Costituisce un consolidamento dell'attività precedente.

Si consiglia di riprendere l'attività in classe, visionando e discutendo le immagini prodotte dai ragazzi.

---

**Esempi**

<https://www.moma.org/artists/6246>

<https://www.moma.org/collection/works/61240>



<https://www.moma.org/collection/works/79809>



### ATTIVITÀ 3.3 Cambio di colore: dalla funzione all'immagine

#### Introduzione

Questa attività costituisce un primo passo verso una descrizione formale della modifica delle immagini tramite sostituzione dei colori. Essa conduce gli alunni all'introduzione di una funzione tra insiemi di colori che descrive la regola di cambio (per sostituzione) dei colori, che viene chiamata *funzione di cambio*.

L'attività si conclude con una riflessione che predispone all'attività seguente, chiedendo di indagare il ruolo della funzione di cambio dei colori nella determinazione della *funzione tabella* dell'immagine modificata.

#### Obiettivi dell'attività

- Operare "un cambio di colori" utilizzando il linguaggio delle funzioni, individuando una funzione che descriva il cambio di colore;
- Imparare a suddividere gli elementi del dominio di una funzione, raggruppando in sottoinsiemi tutti gli elementi con la stessa immagine (cioè raggruppando gli indici delle celle che hanno lo stesso colore);
- Rappresentare una funzione mediante diagrammi di Eulero-Venn.

#### Software usato

Non è richiesto supporto informatico; tuttavia, l'immagine-tabella può essere rappresentata con web app per pixel art come Zaplycode (<https://www.zaplycode.it/>).

#### Prerequisiti

- Conoscere il lessico specifico delle *funzioni tabelle* (dominio, codominio, coppia di indici);
- Saper operare con i diagrammi di Eulero-Venn;
- Riconoscere se la funzione è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

**Spazi:** aula tradizionale oppure laboratorio di informatica

**Tempo medio per svolgere l'attività in classe:** 30 minuti complessivi

#### Modalità

- Lavoro individuale;
- Discussione collettiva.

#### Materiale

- Scheda con tabelle quadrate  $3 \times 3$ ;
- Foglietti colorati tagliati a quadretti da porre sopra le celle della tabella. Si suggerisce di utilizzare un numero di quadretti colorati (bianco, nero, giallo, azzurro, rosso, verde) superiore al numero di celle (almeno 3 quadretti bianchi, 4 neri, 2 gialli, 3 azzurri, 4 rossi, 2 verdi);
- Penne o matite (eventualmente matite colorate).

---

### Descrizione attività

L'attività è suddivisa in tre parti; in ciascuna di esse l'alunno opera in modo individuale per poi discutere con i compagni il lavoro svolto.

Nella prima parte (Parte A), si consegna a ogni alunno una scheda con due griglie "vuote"  $3 \times 3$  e una certa quantità di quadretti colorati (grandi come le celle). Viene inoltre fornita la descrizione di una *funzione tabella*, chiedendo di riprodurre l'immagine associata. I ragazzi utilizzano una griglia come copia di lavoro, appoggiando i quadretti colorati sulle celle, in accordo con quanto prescritto dalla funzione tabella. Poi, riportano sull'altra griglia l'esito del loro lavoro (colorando la griglia o inserendo in ogni cella la lettera iniziale del colore).

In seguito, per ciascun colore utilizzato, individuano in quali posizioni esso compare nell'immagine. Infine, completano la rappresentazione grafica della *funzione tabella*, inserendo le frecce che descrivono la legge, e discutono se tale funzione sia iniettiva/suriettiva/biiettiva.

Nella seconda parte (Parte B) viene proposto un cambio di colori descritto a parole: si chiede agli studenti di sovrapporre i nuovi colori ai precedenti, seguendo la regola assegnata, e di riportare l'immagine nella nuova griglia che viene fornita.

Nella terza parte (Parte C) viene introdotta la funzione di *cambio dei colori* e gli studenti sono invitati a correlare tale funzione con le funzioni tabelle dell'immagine iniziale e dell'immagine modificata.

---

### Metodologie: *learning by doing*

L'uso dei foglietti colorati tagliati a quadretti è preferibile alla colorazione diretta delle celle, in quanto permette di correggere eventuali errori senza dover cancellare. Permette, inoltre, di sovrapporre il *nuovo* colore a quello precedente nella fase del cambio.

È possibile proporre la stessa attività utilizzando griglie di dimensioni maggiori. Inizialmente si suggerisce di tenere disgiunti l'insieme dei colori dell'immagine da quello dei colori per il cambio; successivamente, è possibile introdurre cambi utilizzando anche qualche colore già presente nell'immagine (ma in una differente posizione): in tal caso, l'utilizzo dei quadretti colorati permette di distinguere chiaramente i colori già modificati dai colori originari.

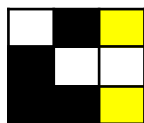
Si suggerisce di discutere collettivamente le proposte degli studenti su quale possa essere la relazione tra la funzione tabella  $f$  dell'immagine originaria, di quella  $f'$  dell'immagine modificata e della funzione di cambio  $g$ . Ci si attende che i ragazzi siano in grado di proporre che  $f'$  debba essere equivalente a operare  $f$  e poi  $g$ . Se i ragazzi conoscono la composizione di funzioni, questo passo risulta facilitato.

L'attività successiva condurrà in modo esplicito a scoprire la relazione  $f' = g \circ f$  (e a fornire un simbolo per descriverla) e non vi è necessità di anticipare tale informazione, qualora non venga fornita dagli studenti.

Si suggerisce di analizzare insieme agli studenti le caratteristiche dell'immagine modificata: ad esempio, è possibile osservare che, nella figura modificata, non sono cambiati i sottoinsiemi formati dagli indici delle celle colorate allo stesso modo.

## Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti

### Parte A



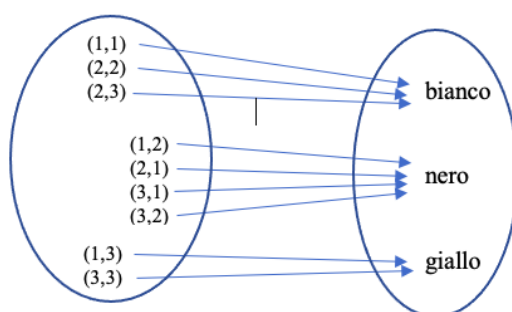
Le celle colorate in bianco hanno indici (1,1), (2, 2), (2, 3)

Le celle colorate in nero hanno indici (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2)

Le celle colorate in giallo hanno indici (1, 3), (3, 3)

La funzione  $f$  è suriettiva ma non è iniettiva: infatti, ad esempio, come osservato in precedenza, alle coppie distinte (1,3) e (3,3) è associato lo stesso colore (il giallo).

La rappresentazione grafica è riportata in figura e ha la caratteristica che le frecce non si intrecciano tra loro; infatti, gli elementi del dominio sono stati disposti raggruppando le coppie di indici delle celle colorate allo stesso modo. Tale rappresentazione semplifica la lettura e il disegno dell'immagine.



### Parte B



### Parte C

La *funzione tabella*  $f'$  dell'immagine nella Parte B è  $f' = g \circ f$ , definita da

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) .$$

Nel dettaglio,  $f': \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{azzurro}, \text{rosso}, \text{verde}\}$

(1,1)  $\mapsto$  azzurro

(1,2)  $\mapsto$  rosso

(1,3)  $\mapsto$  verde

(2,1)  $\mapsto$  rosso

(2,2)  $\mapsto$  azzurro

(2,3)  $\mapsto$  azzurro

(3,1)  $\mapsto$  rosso

(3,2)  $\mapsto$  rosso

(3,3)  $\mapsto$  verde

### ATTIVITÀ 3.4 Cambio di colore: dall'immagine alla funzione

#### Introduzione

Questa attività prosegue quella precedente e completa la formalizzazione della modifica dell'immagine digitale tramite cambio di colore: si evidenzia che la funzione tabella dell'immagine modificata è la composizione della funzione tabella dell'immagine iniziale con la funzione di cambio di colore.

#### Obiettivi dell'attività

- Rappresentare la funzione che individua il cambio di colore;
- Operare la composizione di funzioni;
- Usare la rappresentazione grafica di Eulero-Venn;
- Elaborare un modello matematico che descriva la modifica di un'immagine digitale ottenuta sostituendo i colori.

#### Software usato

Non è richiesto supporto informatico; tuttavia, l'immagine-tabella può essere rappresentata con web app per pixel art come Zaplycode (<https://www.zaplycode.it/>)

#### Prerequisiti

- Conoscere il lessico proprio delle *funzioni tabelle*;
- Saper rappresentare graficamente una funzione tra insiemi finiti tramite diagrammi di Eulero-Venn.

**Spazi:** *aula tradizionale oppure laboratorio di informatica*

**Tempo medio per svolgere l'attività in classe:** *30 minuti complessivi*

#### Modalità

- Lavoro individuale;
- Discussione collettiva.

#### Materiale

- Una scheda che riporta due differenti immagini digitali A e B, tali che B sia ottenuta da A per cambio di colori;
- Penne o matite.

---

#### Descrizione attività

All'alunno viene richiesto di rappresentare graficamente la funzione che descrive il cambio di colore che mette in relazione due immagini digitali A e B. In seguito, viene proposta la rappresentazione della composizione tra la *funzione tabella* dell'immagine A e la funzione di cambio: l'alunno completa tale rappresentazione e confronta la composizione descritta con la *funzione tabella* dell'immagine modificata B. La scheda introduce il termine *composizione* e il simbolo  $g \circ f$ .

---

### Metodologie: *learning by doing, mastery learning*

La scheda proposta permette all'allievo di verificare la comprensione di quanto presentato e elaborato in precedenza e di attivare ragionamenti che permettono di verificare la correttezza o meno delle affermazioni proposte.

La notazione  $f(x)$ , con cui si indica il valore associato a  $x$  dalla funzione  $f$ , non è stata utilizzata in precedenza in questo contesto: si consiglia quindi di commentarla e illustrarla.

La verifica della coincidenza tra la composizione e la *funzione tabella* dell'immagine modificata permette di consolidare la nozione di composizione e di uguaglianza tra funzioni.

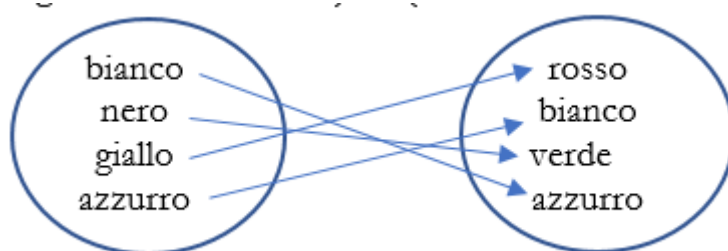
Si suggerisce di percorrere la rappresentazione della composizione con il movimento del dito, affiancandone la lettura, per evidenziare la sequenza dei passaggi.

---

### Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti

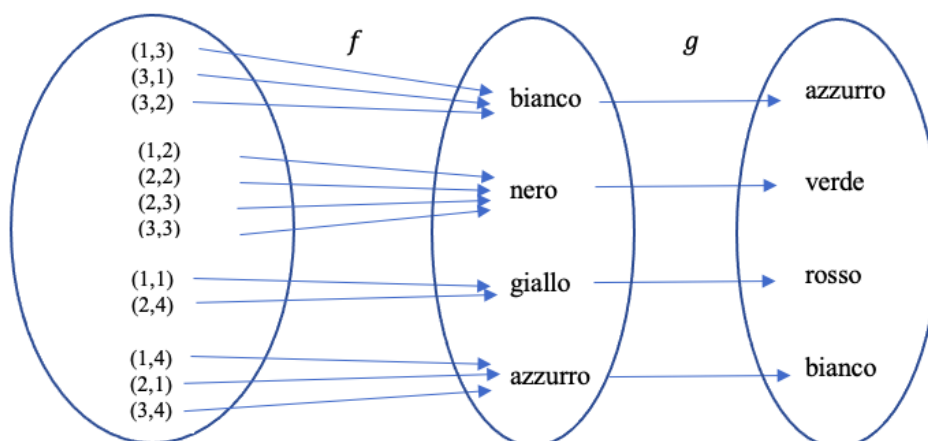
1. La trasformazione è biiettiva:

$$g: \{\text{bianco, giallo, azzurro, nero}\} \rightarrow \{\text{rosso, bianco, verde, azzurro}\}$$



- 2.

$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{f} \{\text{bianco, giallo, azzurro, nero}\} \xrightarrow{g} \{\text{rosso, bianco, verde, azzurro}\}$$



### **ATTIVITÀ 3.5 Che immagini posso ottenere?**

#### **Introduzione**

L'attività costituisce un consolidamento della nozione di cambio di colori in un'immagine digitale.

#### **Obiettivi dell'attività**

- Approfondire la conoscenza delle caratteristiche di un cambio di colore in un'immagine digitale;
- Saper argomentare;
- Riconoscere quando due funzioni sono distinte.

#### **Software usato**

Non è richiesto supporto informatico; tuttavia, l'immagine-tabella può essere rappresentata con web app per pixel art come Zaplycode (<https://www.zaplycode.it/>)

#### **Prerequisiti**

- Conoscere la nozione di cambio di colore in un'immagine digitale.

**Spazi:** aula tradizionale oppure laboratorio di informatica (ma si suggerisce di svolgere in classe solo la discussione collettiva al termine dell'attività)

**Tempo medio per svolgere l'attività in classe:** 20 minuti complessivi

#### **Modalità**

- Lavoro individuale;
- Discussione collettiva.

#### **Materiale**

- Una scheda con una tabella  $m \times n$  con celle colorate (vuoto = bianco), una griglia della stessa dimensione con celle non colorate e due tabelle identiche da completare;
- Penne e alcune matite colorate (ad esempio rosso, giallo, verde, azzurro).

---

#### **Descrizione attività**

La scheda fornisce una immagine digitale con simmetrie e un insieme di colori da utilizzare per cambiarne la colorazione. Lo studente sceglie arbitrariamente una funzione di cambio di colore, la rappresenta graficamente (si richiede che tale funzione di cambio sia biiettiva) e la applica riportando in una nuova griglia l'immagine modificata.

Sempre mantenendo la stessa tavolozza di nuovi colori, lo studente completa la colorazione di due immagini, assicurandosi di produrre immagini tra loro differenti e con la caratteristica di non poter essere ottenute come cambio di colori dall'immagine originaria.

In seguito, lo studente fornisce le proprie motivazioni alle scelte operate.

Una discussione collettiva permette l'illustrazione delle soluzioni adottate dai ragazzi e la condivisione delle motivazioni addotte.

---

**Metodologie:** *learning by doing, mastery learning*

Si suggerisce di proporre la scheda come lavoro autonomo per casa e discutere collettivamente in classe le soluzioni e le proposte degli studenti.

Si ritiene importante sollecitare lo studente a operare scelte autonome, sia come forma di fantasia, che come assunzione di responsabilità nell'individuare soluzioni e verificare che siano adeguate. Si suggerisce di porgere una particolare attenzione alle motivazioni addotte dagli studenti (Perché due immagini sono diverse? Perché una immagine non si ottiene da un'altra tramite cambio di colori?) In particolare, si ritiene utile sollecitare i ragazzi a chiarire le proprietà relative a una definizione sondando e immaginando esempi che non soddisfano la definizione.

---

**Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti**

**1. e 2.** Non c'è una sola soluzione, ma qualunque associazione proposta è corretta; il docente può verificare che la tabella colorata corrisponda all'associazione indicata dall'alunno.

**3.** Il docente deve guidare la discussione.

Alla richiesta di motivare perché due immagini sono differenti, ci si aspetta che venga fornito il dettaglio di una cella che ha colori differenti nelle due immagini.

Possibili risposte o osservazioni relative al problema di determinare immagini che non possono essere ottenute per cambio di colore da quella originaria:

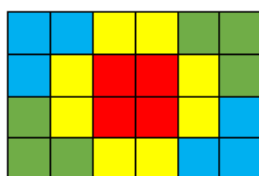
- se due caselle hanno lo stesso colore nell'immagine originaria, devono avere lo stesso colore anche dopo il cambio di colori;
- se l'immagine presenta simmetrie, le stesse simmetrie devono comparire nell'immagine con i colori modificati;
- per determinare una immagine che non si ottenga come cambio di colori da quella originaria, è sufficiente che una cella non rispetti almeno una delle proprietà sopra elencate.

Ci si aspetta che le motivazioni addotte siano del tipo seguente.

In un cambio di colori:

- osservando le celle (3, 1), (4, 1), (4, 2), vedo che il giallo è stato sostituito con il verde; quindi le celle (1, 5), (1, 6), (2, 6) devono essere colorate in verde;
- osservando le celle (2, 3), (3, 3), (3, 4), vedo che il nero è stato sostituito con il rosso; quindi la cella (2, 4), deve essere colorata in rosso;
- osservando le celle (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 2), (3, 5), (4, 3), (4, 4) vedo che il bianco è stato sostituito con il giallo; quindi la cella (2, 5) deve essere colorata in giallo.

Se l'immagine fosse stata modificata con un cambio di base, sarebbe come segue. Tutte le immagini che differiscono da questa (per almeno una cella) sono una risposta corretta:



### **ATTIVITÀ 3.6    Quanti cambi di colore posso fare?**

#### **Introduzione**

Questa attività riprende la figura già analizzata nell'attività precedente e permette di introdurre alcuni elementi di calcolo combinatorio, a partire dal conteggio dei possibili cambi di colore.

#### **Obiettivi dell'attività**

- Individuare il numero di cambi di colore biettivi;
- Distinguere le nozioni di funzione iniettiva e biettiva;
- Introdurre elementi di calcolo combinatorio, contando, in un caso concreto, il numero di funzioni iniettive o biettive fra due insiemi.

#### **Software usato**

Non è richiesto supporto informatico; tuttavia, l'immagine-tabella può essere rappresentata con web app per pixel art come Zaplycode (<https://www.zaplycode.it/>)

#### **Prerequisiti**

- Conoscere il significato di cambio di colore;
- Conoscere il linguaggio delle funzioni;
- Riconoscere funzioni iniettive e biettive.

**Spazi:** *aula tradizionale oppure laboratorio di informatica*

**Tempo medio per svolgere l'attività in classe:** *45 minuti complessivi*

#### **Modalità**

- Lavoro individuale;
- Discussione collettiva.

#### **Materiale**

- Una scheda con una tabella 4 x 6 con celle colorate (vuoto = bianco) e insiemi con elementi dei colori;
- Penne o matite.

---

#### **Descrizione attività**

La scheda proposta riprende l'immagine studiata nell'attività precedente e chiede all'alunno di discutere come contare i possibili cambi di colore usando solo funzioni biettive a valori in un insieme preassegnato di colori (Punto 1). Una discussione collettiva permette di confrontare le proposte fornite dagli studenti, pervenendo all'individuazione di una modalità di conteggio.

In seguito, si riprende il lavoro autonomo: viene ampliato l'insieme dei colori che possono essere utilizzati e si chiede che la funzione di cambio sia iniettiva. A valle della creazione di un esempio concreto (Punto 2), lo studente riflette su come contare le funzioni iniettive dall'insieme originario di colori al nuovo insieme di colori; è richiesto che lo studente formuli una propria proposta sulle modalità di conteggio (Punto 3). Un'ulteriore fase di discussione permette una rielaborazione collettiva delle opzioni di soluzione.

**Metodologie:** *learning by doing, mastery learning*

Presumibilmente, l'alunno cercherà di disegnare le frecce che descrivono funzioni illustrate. L'inserimento di una fase di discussione tra il Punto 1 e il Punto 2 permette all'insegnante di fornire indizi (*Iniziamo ad assegnare al bianco il suo sostituto: quante possibilità abbiamo? Assegnato il sostituto del bianco, in quanti modi possiamo scegliere il sostituto del giallo?*), ove necessario, o suggerire di affrontare preventivamente un esempio semplificato (biiezioni tra insiemi di 3 elementi).

Un punto di attenzione particolare è che il numero di funzioni cercate è pari al prodotto (e non alla somma) delle opzioni di scelta per sostituire ciascuno dei colori iniziali, se si assegnano tali scelte ordinatamente una alla volta.

Il calcolo delle funzioni iniettive viene così affrontato dallo studente come una generalizzazione del metodo di conteggio delle biiezioni. È importante tenere conto del punto di vista degli studenti, che può portare a strategie differenti.

Il docente può introdurre la definizione di *permutazione* come biiezione di un insieme finito in sé, sottolineando che l'aumentare del numero dei colori comporta una grande crescita del numero di permutazioni.

Dettagli tecnici sono riportati nella soluzione degli esercizi proposti.

---

**Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti**

1. Occorre contare le funzioni biiettive da un insieme di 4 colori a un insieme di 4 colori e sono

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Infatti, posso pensare di scegliere il colore da sostituire al bianco (sono 4 possibili scelte), poi il colore da sostituire al giallo (sono 3 scelte, perché non posso utilizzare di nuovo il colore usato per il bianco); infine, scelgo il colore da sostituire all'azzurro (due possibilità). Ora, è obbligata la scelta del colore da sostituire al nero.

Una volta assegnato il sostituto del bianco, le opzioni di scelta per il sostituto del giallo portano a distinte funzioni di cambio, che vengono completate con le scelte dei sostituti dei restanti colori. Il numero delle funzioni biiettive di cambio è quindi dato dal prodotto  $4 \cdot 3 \cdot 2$ .

2. Qualunque associazione proposta è accettabile, purché iniettiva.

3. Occorre contare le funzioni iniettive da un insieme di 4 colori a un insieme di 5 colori: esse sono  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ .

Un modo per procedere nel conteggio è il seguente. Per cambiare colore si usano solo 4 colori alla volta nel codominio, perché il dominio ha 4 colori. Posso quindi pensare di scegliere come prima cosa il colore che non verrà usato (sono 5 scelte); ora mi restano 4 colori da usare, e le funzioni possibili sono state contate al punto 1, e sono

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Dunque, le funzioni iniettive sono  $24 \cdot 5 = 120$ .

Un secondo modo per effettuare il conteggio consiste nell'osservare che per scegliere il colore da sostituire al bianco ci sono 5 possibilità; poi, per scegliere il colore da sostituire al giallo ci sono 4 scelte, perché non posso utilizzare di nuovo il colore usato per il bianco; analogamente, restano 3 scelte per il colore che sostituisce l'azzurro e 2 scelte per sostituire il nero. Il numero di funzioni iniettive cercate è quindi  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ .

### **Attività 3.7    WebQuest: come sono stati trasformati a colori i film e le foto in B/N?**

**Obiettivi:** *multidisciplinarietà (fisica, matematica, arte) e sviluppo digital skill*

La seguente attività, facoltativa, vuol far riflettere sulla possibilità di un cambio di colori non iniettivo, che si compie nel passaggio da immagini colorate (tutti i possibili colori e sfumature dell'immagine video o della foto) a immagini in bianco e nero (due soli colori); in realtà, si può introdurre il concetto di sfumature di grigio, la cui tonalità dipende da una differente percentuale fra nero e bianco.

Si guidano gli studenti a valutare se il modello matematico sviluppato con le attività precedenti è utilizzabile anche in questa situazione.

Una ulteriore sfida è costituita dal processo inverso, nella colorazione di foto in bianco e nero, che necessita tecniche differenti, che si sono evolute e matematizzate nel corso del tempo.

Si possono sollecitare gli studenti a documentarsi sui processi tecnici che hanno consentito di trasformare vecchi film in bianco e nero in pellicole a colori.

L'attività può essere assegnata come lavoro a casa (anche in periodi di sospensione dell'attività didattica) e svolta come lavoro di gruppo. Gli esiti possono essere riportati in una relazione, oppure sotto forma di mostra o di presentazione che può essere rivolta a studenti non coinvolti nel percorso.