

Attività 4: scheda docente

Trasformare l'immagine con la composizione di funzioni

Introduzione

Nell'attività 3 è stato analizzato l'effetto prodotto su una immagine dalla composizione ("a valle") della corrispondente *funzione tabella* con un *cambio di colori*. Ora si interverrà invece "a monte" della *funzione tabella*: si analizzerà la composizione di una **funzione dell'insieme delle coppie di indici in sé** con una *funzione tabella*. Questa trasformazione dell'immagine richiede una elaborazione più articolata e produce effetti che sono più complessi da evidenziare rispetto al *cambio di colori* della precedente attività.

Nelle attività proposte si considerano solo casi in cui la funzione dell'insieme delle coppie di indici in sé sia biettiva: tale funzione verrà denominata *funzione di riordino*.

Il confronto tra l'immagine iniziale e l'immagine modificata appare come un "movimento" delle caselle: la percezione del movimento viene accentuata quando la figura modificata è ottenuta, ad esempio, tramite una rotazione o una simmetria assiale. La *funzione di riordino* coincide con la funzione inversa del "movimento" delle caselle.

Se si è interessati a utilizzare le immagini come supporto all'apprendimento del concetto di funzione, questa attività può essere, se si ritiene, considerata facoltativa: i punti di attenzione sono la funzione inversa (esistenza e proprietà) e la non commutatività della composizione di funzioni.

L'attività è maggiormente collegata alla descrizione delle trasformazioni geometriche: è utile, ad esempio, in caso si voglia programmare un applicativo per modificare l'immagine tramite permutazione delle caselle. Inoltre, pone le basi per affrontare lo studio delle trasformazioni affini, per comprendere come determinare l'equazione cartesiana di una figura trasformata.

Componendo una permutazione sull'insieme delle coppie di indici con una funzione tabella, le singole celle cambiano posizione ma l'area complessiva coperta da ciascun colore si mantiene invariata. Come approfondimento, si può considerare il caso di una funzione non iniettiva dell'insieme delle coppie di indici in sé: componendola con una funzione tabella a più colori si modifica, in tal caso, l'area coperta da alcuni di essi.

Prerequisiti consigliati

- Saper lavorare con le *funzioni tabella*;
- Saper riconoscere le funzioni iniettive, suriettive, biettive;
- Saper comporre funzioni.

Obiettivi disciplinari dell'Attività 4

- Approfondire la conoscenza delle proprietà della composizione di funzioni;
- Comprendere e formalizzare la *funzione di riordino*;
- Determinare la funzione inversa di una funzione biettiva.

Obiettivi trasversali dell'Attività 4

- Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica, i cui strumenti permettono di affrontare situazioni reali;
- Proporre attività e metodologie in cui l'alunno è attivo, formula ipotesi, discute e argomenta le proprie scelte;
- Interagire con il compagno;

- Aspettare il proprio turno per parlare;
- Collaborare e rispettare le consegne dell'attività.

Indice attività

Attività 4.1 Decifra il codice

Attività 4.2 Ricomponi l'immagine

Attività 4.3 Scopri l'immagine descritta dalla composizione

ATTIVITÀ 4.1 Decifra il codice

Introduzione

In questa attività introduttiva si propone un esempio concreto che porta a formalizzare la *funzione di riordino* ossia la funzione che permette di ripristinare una situazione pregressa.

Obiettivi dell'attività

- Introdurre, tramite una attività concreta, la *funzione di riordino* che ripristina una situazione pregressa;
- Introdurre, tramite una attività concreta, la nozione di funzione inversa.

Software usato

È richiesto l'uso dello smartphone da parte degli alunni.

Prerequisiti

- Saper utilizzare la *funzione tabella*;
- Saper operare la composizione di funzioni (utilizzata solo nella fase di discussione).

Spazi: *aula tradizionale*

Tempo medio per svolgere l'attività in classe: *50 minuti complessivi*

Modalità

- Lavoro in coppia;
- Discussione collettiva nella fase conclusiva.

Materiale

- Due griglie, una vuota e una contenente informazioni;
- Forbici per ritagliare una delle due copie in quadretti (una per coppia);
- Cellulare (uno per coppia) per leggere i QR code (oppure modificare le schede inserendo solo numeri e asterischi);
- Un foglio e penne/matite per riportare la descrizione di una funzione e l'esito della discussione finale.

Descrizione attività

Agli studenti è richiesto di aiutare James Bond nel riordinare alcuni QR code per scoprire il codice di apertura di una cassaforte; l'attività porta a riordinarli materialmente, dopo averli ritagliati.

Ogni ragazzo ha una scheda a disposizione: un componente della coppia ritaglia la propria griglia con i codici mentre l'altro la mantiene intera (per tenere memoria della configurazione da riordinare).

È poi richiesto di formalizzare la funzione (dominio e codominio) che associa a ciascuna posizione dei foglietti nella configurazione da riordinare la sua posizione originaria.

Metodologie: *learning by doing, problem solving*

L'attività viene svolta in coppie. I ragazzi lavorano nell'esempio concreto e poi formalizzano le operazioni svolte. Per permettere ai ragazzi di tenere memoria della configurazione modificata, viene riportato lo schema nella scheda. L'efficacia risulta maggiore se i ragazzi hanno a disposizione due copie della griglia con i codici: una da ritagliare e l'altra per conservare l'originale.

Si suggerisce di analizzare, in una discussione collettiva, le soluzioni proposte dagli studenti, ponendo particolare attenzione alla descrizione formale della *funzione di riordino*, che opera dall'insieme di indici della griglia quadrata in se stessa.

Inoltre, una volta effettuato il riordino e determinata la *funzione di riordino*, è possibile osservare che il riordino è reversibile, nel senso che i foglietti possono nuovamente essere rimessi in disordine come James Bond li ha trovati al mattino. La discussione può far emergere che questa possibilità di fare e disfare dipende dal fatto che la funzione di riordino è biiettiva. D'altra parte, si potrebbe anche partire dalla configurazione creata da Bond prima di andare a dormire: ci si può immaginare una funzione che mette in disordine e osservare che la funzione di riordino cancella l'effetto di questo disordine, rimettendo i foglietti al loro posto. Da un punto di vista matematico, questo significa che anche la funzione che descrive lo spostamento iniziale "che disordina" è biiettiva, e che la funzione di riordino è la sua inversa.

È interessante rappresentare graficamente le due funzioni tra loro inverse: i ruoli di dominio e codominio si invertono, e una soluzione grafica possibile è quella di ricostruire l'inversa di una funzione "rovesciando il verso" delle frecce.

È utile costruire con i ragazzi le due composizioni ("disordine poi riordino" e "riordino poi disordine") mostrando che, in ogni caso, si ritrova la configurazione dalla quale si parte (quella ordinata se opero "disordine e poi riordino", quella disordinata se opero "riordino e poi disordine").

NOTA: Il fatto che entrambe le composizioni diano l'identità è, in generale, necessario per la definizione di funzione inversa: sappiamo infatti che è possibile, nel caso di funzioni non biettive, avere inverse "a destra" che non sono inverse "a sinistra". Se il docente non ritiene la questione troppo complessa per essere affrontata in questo contesto, può mostrare ai ragazzi un esempio in tal senso componendo $f(x) = \sqrt{x}$ a valle di $g(x) = x^2$.

Osservazione terminologica: il termine "disordine" va quindi inteso come una modifica operata, un cambio di posizione privo di accezione negativa. Vedremo, infatti, che tale modifica ci sarà utile quando saremo noi a voler cambiare una immagine, ad esempio ruotandola.

Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti

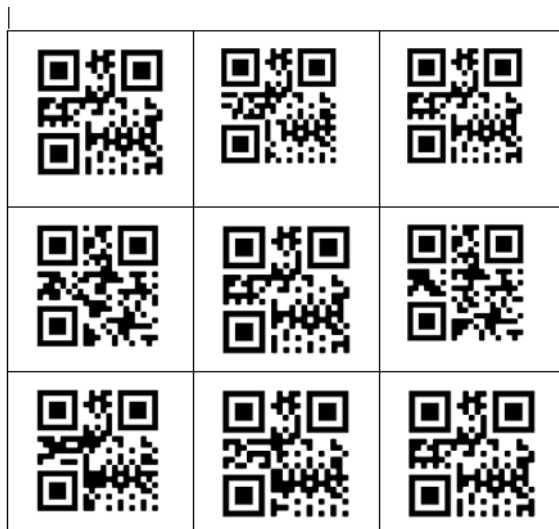
Punti 1 e 2

Scannerizzando i codici QR, la configurazione modificata è uguale a:

*	5	*
*	*	2
1	3	4

Per riordinarla, occorre mettere ogni foglietto nella posizione indicata dalla coppia di indici che James Bond ha appuntato sul retro e che è resa visibile nella scheda di lavoro.

La configurazione corretta è quella seguente:



che corrisponde a:

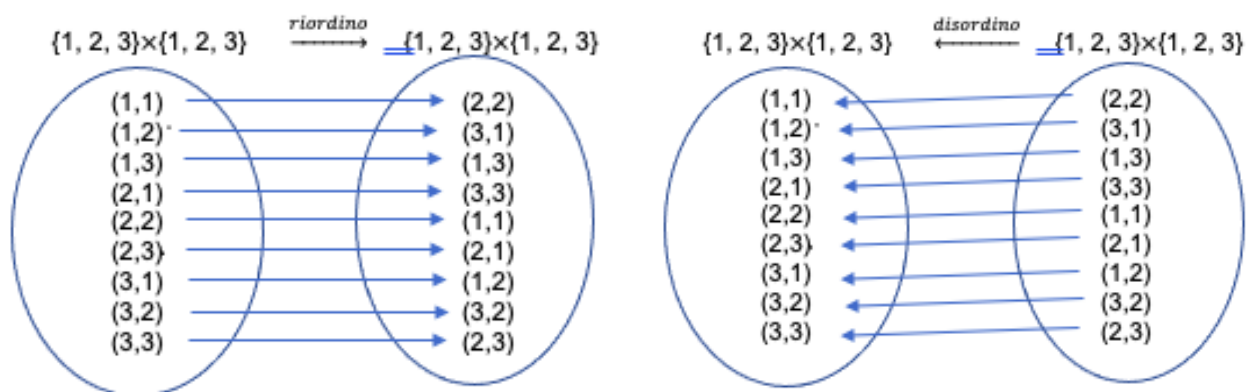
*	1	*
2	*	4
5	3	*

da cui il codice 24867

Punto 3

La funzione di riordino è:

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \\ &(1,1) \mapsto (2,2), (1,2) \mapsto (3,1), (1,3) \mapsto (1,3), \\ &(2,1) \mapsto (3,3), (2,2) \mapsto (1,1), (2,3) \mapsto (2,1), \\ &(3,1) \mapsto (1,2), (3,2) \mapsto (3,2), (3,3) \mapsto (2,3) \end{aligned}$$



Punto 4

Dominio $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$, codominio $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

ATTIVITÀ 4.2 Ricomponi l'immagine

Introduzione

L'attività sollecita la formalizzazione della nozione di *funzione di riordino* e introduce l'osservazione che, in una immagine, lo scambio della posizione delle caselle colorate corrisponde a una composizione di funzioni. Si sottolinea nuovamente che immagini che differiscono in almeno una casella vanno considerate come immagini tra loro differenti.

Obiettivi dell'attività

- Rinforzare il concetto di *funzione di riordino* (introdotto con l'attività 4.1);
- Utilizzare e interpretare la composizione di funzioni.

Software usato

L'immagine iniziale e quella modificata possono essere realizzate con webapp come Zaplycode (<https://www.zaplycode.it/>)

Prerequisiti

- Saper lavorare con gli indici in una griglia e con le *funzioni tabella*;
- Saper determinare la composizione di due funzioni.

Spazi: *aula oppure laboratorio di informatica*

E' possibile anche permettere agli studenti di utilizzare il proprio tablet o smartphone.

Tempo medio per svolgere l'attività in classe: *30 minuti complessivi*

Modalità di lavoro

- Lavoro in coppie;
- Discussione collettiva dell'effetto delle modifiche.

Materiale

- Due copie di una griglia colorata (con informazioni differenti);
- Forbici (una per coppia) per ritagliare una delle due copie in quadretti;
- (in alternativa) utilizzo di web app.

Descrizione attività

Agli alunni, che collaborano in coppie per completare la scheda studenti, sono assegnate una immagine digitale 3×3 (considerata come l'immagine di riferimento e denominata Figura 1) e una seconda immagine 3×3 nella quale sono sovrascritte coppie di indici (da considerare come una immagine ricomposta disponendo diversamente le celle colorate dell'immagine iniziale; tale immagine è indicata come Figura 2). Dal lavoro emergerà che le coppie di indici sovrascritte nella seconda immagine descrivono la posizione di "provenienza" di ciascuna cella, cioè la posizione che la stessa cella aveva nell'immagine di riferimento.

Uno dei due alunni riproduce una copia dell'immagine di riferimento (Figura 1), sovrascrive in ogni cella la coppia con gli indici che indicano la posizione nell'immagine di riferimento e ritaglia le celle colorate (in alternativa, si possono trascrivere gli indici sull'immagine di riferimento nella propria scheda e ritagliarla); l'altro componente della coppia mantiene integra la propria scheda di lavoro.

Il secondo componente della coppia prende le celle ritagliate dal collega e le sovrappone all'immagine modificata in Figura 2, in modo che la coppia di indici sul quadretto ritagliato coincida con quella della cella cui è sovrapposto. Gli studenti osservano che, in tal modo, il colore del quadretto che viene sovrapposto a una cella in Figura 2 ha esattamente lo stesso colore della cella sottostante.

Gli studenti analizzano la configurazione ottenuta e rispondono ad alcune domande stimolo. Come prima domanda, viene loro richiesta quale fosse la posizione in Figura 1 del quadretto che ha assunto la posizione (2, 3) nella configurazione che ricopre e riproduce la Figura 2.

In seguito, uno studente completa la descrizione per elencazione della *funzione di riordino* che segnala, in base alla posizione di un quadretto sulla Figura 2, quale sia la sua posizione originaria nella Figura 1. Nel frattempo, l'altro componente della coppia completa la descrizione della *funzione tabella f'* dell'immagine in Figura 2.

Infine, gli studenti determinano e trascrivono la composizione in cui si effettua prima la funzione di riordino e poi la *funzione tabella* relativa alla Figura 1 e confrontano la composizione ottenuta con la funzione tabella f' relativa alla Figura 2. Nuovamente, si è messo in evidenza che, **per ricavare la funzione tabella dell'immagine modificata, si associa a una coppia di indici la posizione che la cella corrispondente avrebbe avuto prima della modifica** (cioè si riordinano le posizioni) e poi si assegna il colore in base alla funzione tabella dell'immagine non modificata.

Metodologie: *learning by doing, problem solving*

Agli alunni sono richieste sia l'applicazione e la padronanza di quanto già appreso durante il percorso (lavorare con le *funzioni tabella* associate a celle colorate e con la composizione di funzioni), sia ragionamenti che utilizzano i nuovi contenuti associati alla *funzione di riordino*.

Ci si attende che l'esempio specifico analizzato nel Punto 3 fornisca indizi su come affrontare i quesiti più generali proposti nel Punto 4. Si suggerisce di analizzare collettivamente le soluzioni individuate dagli studenti ed eventuali osservazioni emerse.

Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti

Punto 2

(1,3): è esattamente la coppia di indici sovrascritta nel quadretto.

Punto 3

La funzione di riordino è $h: \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

$(1,1) \mapsto (1,1)$	$(1,2) \mapsto (2,2)$	$(1,3) \mapsto (1,2)$
$(2,1) \mapsto (3,3)$	$(2,2) \mapsto (2,3)$	$(2,3) \mapsto (1,3)$
$(3,1) \mapsto (3,1)$	$(3,2) \mapsto (3,2)$	$(3,3) \mapsto (2,1)$

mentre la *funzione tabella* della Figura 2 è $f': \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{bianco, azzurro, giallo}\}$

$(1,1) \mapsto \text{bianco}$	$(1,2) \mapsto \text{giallo}$	$(1,3) \mapsto \text{azzurro}$
$(2,1) \mapsto \text{giallo}$	$(2,2) \mapsto \text{bianco}$	$(2,3) \mapsto \text{azzurro}$
$(3,1) \mapsto \text{giallo}$	$(3,2) \mapsto \text{azzurro}$	$(3,3) \mapsto \text{azzurro}$

Punto 4

$(f \circ h): \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{bianco}, \text{azzurro}, \text{giallo}\}$, definita da $x \mapsto (f \circ h)(x) = f(h(x))$, è descritta da:

$(1,1) \mapsto \text{bianco}$	$(1,2) \mapsto \text{giallo}$	$(1,3) \mapsto \text{azzurro}$
$(2,1) \mapsto \text{giallo}$	$(2,2) \mapsto \text{bianco}$	$(2,3) \mapsto \text{azzurro}$
$(3,1) \mapsto \text{giallo}$	$(3,2) \mapsto \text{azzurro}$	$(3,3) \mapsto \text{azzurro}$

Si conferma che f' e $f \circ h$ coincidono.

ATTIVITÀ 4.3 Scopri l'immagine descritta dalla composizione

Introduzione

L'attività 4.3 prosegue ed approfondisce le precedenti 4.1 e 4.2, presentando un lavoro che permette di comporre una assegnata funzione sull'insieme delle coppie di indici con la *funzione tabella*. In questa ottica, lo studente ha il compito di individuare e comprendere l'effetto prodotto sull'immagine.

Note:

- vengono accentuati alcuni aspetti formali;
- le funzioni vengono rappresentate tramite diagrammi a frecce, per favorire la lettura della composizione.

Obiettivi dell'attività

- Comprendere l'effetto della composizione di funzioni, in base all'ordine di composizione;
- Utilizzare la *funzione di riordino*.

Software usato

La tabella "a colori" iniziale e quella modificata possono essere realizzate con webapp come Zaplycode (<https://www.zaplycode.it/>).

Prerequisiti

- Saper utilizzare i diagrammi di Eulero-Venn;
- Conoscere le *funzioni tabella*, dominio e codominio;
- Conoscere la *funzione di riordino* (introdotta nelle precedenti attività).

Spazi: *aula oppure laboratorio di informatica*

E' possibile anche in modalità permettere agli studenti di utilizzare il proprio tablet o smartphone.

Tempo medio per svolgere l'attività in classe: *30 minuti complessivi*

Modalità

- Lavoro individuale;
- Discussione collettiva.

Materiale

- Penne o matite colorate per completare la scheda studenti;
- In alternativa Zaplycode (<https://www.zaplycode.it/>).

Descrizione attività

Si chiede agli alunni di determinare l'immagine modificata a partire da una immagine iniziale e da una *funzione di riordino* assegnate. Alcuni quesiti stimolano l'analisi dell'effetto della funzione di riordino nella modifica dell'immagine.

In seguito, si chiede di formalizzare una funzione di riordino (cioè una permutazione tra le coppie di indici) che effettui una modifica che viene descritta a parole e non supportata visivamente da una immagine nella scheda.

Infine, si fornisce una modifica in cui la funzione di riordino può essere descritta geometricamente, e si chiede di descrivere la funzione di riordino.

Metodologie: *learning by doing, problem solving*

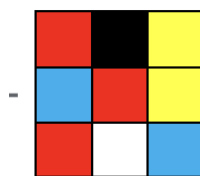
Gli alunni lavorano autonomamente nel determinare l'immagine modificata e l'interpretazione di tale modifica. Le argomentazioni proposte e i dubbi evidenziati sono analizzati da tutta la classe.

Nella discussione si possono anche fornire esempi e controesempi sulle possibili modifiche ottenibili da una immagine. In particolare, si può notare che differenti funzioni di riordino possono produrre la stessa immagine. Il conteggio di quante immagini distinte si possono ottenere a partire da una data offre uno spunto per un collegamento con il calcolo combinatorio.

Nella seconda parte (Punto 2) è bene sottolineare che siamo di fronte a un caso in cui la funzione di riordino coincide con la propria inversa. Se si vuole, si può chiedere subito di immaginare una trasformazione in cui la funzione di riordino non coincida con l'inversa. Oppure si può ricorrere a quanto avviene nel Punto 3, dove viene proposta una funzione di riordino che dà l'identità quando viene composta quattro volte con sé stessa.

Soluzione degli esercizi proposti nelle schede studenti**Punto 1**

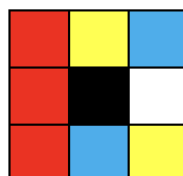
L'immagine di f è indicata nella scheda studenti ed è riportata a lato



La composizione $f' = f \circ h: \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{bianco, rosso, giallo, azzurro, nero}\}$ è descritta da:

$(1,1) \mapsto \text{rosso}$	$(1,2) \mapsto \text{giallo}$	$(1,3) \mapsto \text{azzurro}$
$(2,1) \mapsto \text{rosso}$	$(2,2) \mapsto \text{nero}$	$(2,3) \mapsto \text{bianco}$
$(3,1) \mapsto \text{rosso}$	$(3,2) \mapsto \text{azzurro}$	$(3,3) \mapsto \text{giallo}$

L'immagine associata alla *funzione tabella* data dalla composizione f' (prima h e poi f) è riportata a lato

**Spunto di discussione**

L'effetto della composizione è uno "spostamento" delle celle. I colori sono quelli di prima, il numero di celle di un dato colore non cambia.

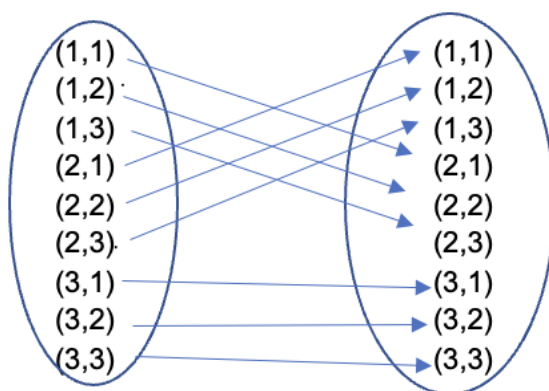
Come evidenziato nelle attività precedenti, il fatto che h mandi $(1, 2)$ in $(1, 3)$ NON significa che nella nuova immagine la casella $(1, 3)$ sia nera, ma che la casella $(1, 2)$ prenderà il colore giallo che "prima" era di $(1, 3)$. La funzione h opera prima dell'attribuzione del colore.

È più efficace immaginare che l'effetto di h sia lo spostamento della casella (1, 3) nella posizione (1, 2) (come suggerito nella prima attività). Si può far osservare che la funzione h deve essere biiettiva e chiedere agli studenti di immaginare che cosa succede se h perde l'iniettività (fatto che è equivalente a perdere la suriettività).

Punto 2

La funzione cercata coincide con la propria inversa ed è descritta da:

$$h': \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$$



Punto 3

La funzione cercata coincide con la rotazione *antioraria* di un angolo retto (è l'inversa del movimento apparente) ed è descritta da:

$$h'': \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$$

