Attività 5

Matrici, vettori nel piano e combinazioni lineari

Grado scolastico: secondo biennio della Scuola secondaria di secondo grado

Tematica: vettori nel piano e combinazioni lineari

Introduzione

Proponiamo qui alcune attività che servono a introdurre in modo operativo il concetto di vettore attraverso le sue coordinate. Nelle nostre attività iniziali, un vettore sarà un movimento, che chiameremo *passo da effettuare*: ci saranno vettori diversi che rappresenteranno *passi* di vario tipo. Secondo molti autori, infatti, il movimento è una componente essenziale dell'apprendimento. Inoltre, sembra che l'utilizzo del corpo possa dar luogo ad una modalità conoscitiva più stabile e strutturata rispetto a un approccio puramente "teorico". Anche lo *storytelling,* ossia il contesto narrativo, può facilitare l'acquisizione di categorie astratte impegnative come quelle di cui trattiamo qui. Le prime attività proposte intendono fare tesoro di tale indicazione e sollecitare una partecipazione attiva degli studenti. A seconda poi del livello scolastico in cui si proporrà il percorso e di attività correlate già svolte in precedenza, si deciderà quanto sviluppare questa parte introduttiva.

Procederemo poi a mostrare come si possano raggiungere tutti i punti di una *griglia* attraverso opportune combinazioni di alcuni passi assegnati. Sarà il modo, questo, di introdurre l'idea di *combinazione lineare,* di *reticolo piano* e di involucro lineare *(span)* in modo intuitivo e operativo.
Non ci prefiggiamo di essere esaustivi, ma di rendere concreta l'idea che ogni punto del piano cartesiano è descrivibile come combinazione lineare dei versori degli assi cartesiani: a partire dalle combinazioni lineari a coefficienti naturali, viene ampliato lentamente l'insieme numerico dei coefficienti utilizzati.
Nell'ultima attività, mostreremo come una combinazione lineare di due vettori dati si possa esprimere in modo formale attraverso il prodotto di una matrice con un opportuno vettore.

Prerequisiti consigliati

Conoscere gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Obiettivi disciplinari dell'Attività 5

- Comprendere la nozione di vettore come spostamento, anche descritta attraverso le sue coordinate nel piano cartesiano;
- Comprendere il concetto di combinazione lineare;
- Introdurre il prodotto *righe per colonne* di una matrice per un vettore;
- Rappresentare una combinazione lineare attraverso tale prodotto.

Obiettivi trasversali dell'Attività 5

- Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica, i cui strumenti permettono di affrontare situazioni reali;
- Interiorizzare concetti sviluppando la capacità di rappresentarli a se stessi in modo eloquente;
- Proporre attività e metodologie in cui l'alunno è attivo, formula ipotesi, discute e argomenta le proprie scelte;
- Creare un ambiente di apprendimento dove sviluppare i due aspetti della matematica: quello applicativo e quello teorico;

- Formulare domande e fornire risposte pertinenti;
- Interagire con il compagno;
- Aspettare il proprio turno per parlare;
- Collaborare e rispettare le consegne dell’attività.

Indice attività

Attività 5.1 Regina reginella

Introduzione

L' attività di seguito proposta e le successive possono essere adattate a differenti ambienti.
È possibile lavorare, ad esempio, su un pavimento preparato all'utilizzo, su una scacchiera, su una tabella come battaglia navale, su un percorso in un foglio quadrettato. Per quanto sopra discusso, si consiglia di sperimentare almeno una volta una versione in cui i ragazzi realizzano i comandi muovendosi.
I personaggi possono essere modificati a seconda delle finalità del lavoro e delle sensibilità degli studenti. I ruoli da interpretare sono quelli di un istruttore che fornisce indicazioni di movimento e di qualcuno che compie il movimento in ossequio ai comandi ricevuti. Il ruolo di istruttore può essere svolto a rotazione, in modo da coinvolgere più ragazzi. Quando la scena è riprodotta dai ragazzi, è possibile introdurre anche una figura che sia il punto di arrivo del percorso da svolgere.
Ad esempio, possiamo immaginare un costruttore che comanda un robot per farlo arrivare da una persona (o a raccogliere un oggetto), una regina che guida un cavaliere verso il suo castello, un vigile del fuoco che comanda un ragazzo bendato salvandolo dal passare in zone pericolose, un radiotrasmettitore che vede la scena e istruisce un ragazzo che deve riprodurre il percorso effettuato senza poterlo vedere.
È possibile consultare anche http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/regina-reginella/

Descrizione attività

Identifichiamo una porzione di piano con il pavimento dell'aula, facendo coincidere l'origine con il centro e due assi cartesiani paralleli ai profili del pavimento. Concordiamo poi che "1" sia identificato con il lato di una mattonella; questa situazione si può riprodurre con un cartoncino e dei segnaposto lavorando sui banchi.
Chiamiamo *passo* $\boldsymbol{e_1}$ il passo in cui ci si muove di una mattonella lungo una parete e *passo* $\boldsymbol{e_2}$ il passo in cui ci si muove di una mattonella lungo la parete perpendicolare alla prima.
Una ragazza che rappresenta la regina si colloca in un punto dell'aula e un ragazzo che rappresenta il cavaliere si colloca nell'origine.
Il ragazzo domanda: "Regina reginella quanti passi devo fare per arrivare al tuo castello?"
Un compagno scelto dall'insegnante risponderà con frasi del tipo: "Un passo $\boldsymbol{e_1}$ e 3 passi $\boldsymbol{e_2}$"**.**

Osservazione: Quest'attività è veloce e serve solo per mettere a fuoco che, attraverso i passi $\boldsymbol{e_1}$ ed $\boldsymbol{e_2}$ si esprimono le coordinate cartesiane del punto in cui sta la regina.

Esercizio 1

Giulia afferma: "Facendo un passo e_1 e due passi e_2 raggiungiamo il punto di coordinate (1,2) del piano cartesiano". Tommaso controbatte: "Quello che dici è vero, ma solo se si sceglie il riferimento cartesiano in un particolare modo". Secondo te chi ha ragione? Perché?

Dopo essersi accordati sulla modalità di rappresentare tramite un riferimento cartesiano una mappa della stanza, è possibile introdurre ulteriori obiettivi da raggiungere e altri personaggi che si muovono tutti in base allo stesso comando; si segna sulla mappa la posizione raggiunta dai vari personaggi, individuandola attraverso le coordinate. In particolare, si osserva che il movimento di passo $\boldsymbol{e_1}$ modifica le coordinate (x, y) del cavaliere in $(x + 1, y)$, mentre il movimento di passo $n\boldsymbol{e_1}$ (che è la ripetizione n volte del passo $\boldsymbol{e_1}$) modifica le coordinate (x, y) del cavaliere in $(x + n, y)$.

Risulta quindi comodo introdurre le componenti dei vettori: scriviamo $\boldsymbol{e_1} = (1,0)$ e $\boldsymbol{e_2} = (0,1)$. Ricaviamo che $n\boldsymbol{e_1} = (n, 0)$ e $m\boldsymbol{e_2} = (0, m)$.

Posizionando quattro cavalieri sui vertici $(0,0), (1,0), (1,1), (0, 1)$ di un quadrato e facendoli muovere all'unisono in base allo stesso comando, si osserva come il movimento modifichi la posizione di ciascuno dei cavalieri, ma le distanze tra essi (e la configurazione a quadrato) si conservano.
Inoltre, si verifica facilmente che il punto raggiunto seguendo il percorso "prima spostamento di ne_1 e poi di me_2" coincide con il punto raggiunto "prima spostamento di me_2 e poi di ne_1".

Talora risulta più efficace scrivere le coordinate cartesiane dei punti e le componenti dei vettori disponendole in una colonna: $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$, $m\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$.
In questa rappresentazione, ad esempio, lo spostamento di passo $n\boldsymbol{e_1}$ modifica le coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ del cavaliere nelle nuove coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+n \\ y \end{pmatrix}$, rendendo più immediata la visualizzazione. Chiameremo questa modalità di rappresentazione come *vettori colonna*, mentre la precedente rappresentazione "orizzontale" come *vettori riga*.

Attività 5.2 Cambio di passo
Introduzione
La precedente attività viene continuata, modificando lunghezza e direzione dei passi che i cavalieri possono svolgere.

Descrizione attività
Introduciamo ora due vettori nel piano:
$\boldsymbol{v_1} = \binom{3}{1}$ corrispondente allo spostamento di $3\boldsymbol{e_1}$ e poi $\boldsymbol{e_2}$
$\boldsymbol{v_2} = \binom{1}{2}$ corrispondente allo spostamento di $\boldsymbol{e_1}$ e poi $2\boldsymbol{e_2}$

I vettori $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$sono ora utilizzati come due tipologie di *passi* che possono essere compiuti.
Un ragazzo, che rappresenta un cavaliere, si colloca nell'origine e si esercita ad eseguire istruzioni date dai compagni come:
"fai un passo da $\boldsymbol{v_1}$e uno da $\boldsymbol{v_2}$"
"fai due passi da $\boldsymbol{v_1}$ e uno da $\boldsymbol{v_2}$"
"fai tre passi da $\boldsymbol{v_1}$ e uno da $\boldsymbol{v_2}$"

In particolare, si osserva quali punti possono essere raggiunti utilizzando unicamente passi da $\boldsymbol{v_1}$, mettendo in evidenza che tali punti sono tra loro allineati. Analogamente accade muovendosi solo con passi da $\boldsymbol{v_2}$.
In questa prima fase si utilizzano solo coefficienti naturali (o interi, se i ragazzi li introducono spontaneamente). L'attività viene descritta riportando i movimenti sul piano cartesiano, segnando la posizione dei personaggi come in una mappa; si osserva che il movimento di passo $\boldsymbol{v_1}$ modifica le coordinate (x, y) del cavaliere in $(x + 3, y + 1)$, mentre il movimento di passo $n\boldsymbol{v_1}$ modifica le coordinate (x, y) del cavaliere in $(x + 3n, y + n)$.

Dopo aver condotto un numero sufficiente di prove ci si ferma e si riflette sulla domanda seguente: "Quali punti possono essere raggiunti dal cavaliere e, in particolare, ci sono posti dove il castello non può essere raggiunto?"

E' possibile anche posizionare vari cavalieri, che si muovono con lo stesso comando; ad esempio, quattro cavalieri inizialmente posizionati sui punti di coordinate $(0,0), (3,1), (4,3), (1, 2)$: si osserva che il movimento (con lo stesso comando) modifica la posizione di ciascuno dei cavalieri, ma le distanze tra essi e la configurazione si conservano; in questa attività, occorre una discussione più articolata per identificare la configurazione iniziale come un parallelogramma e chiarire cosa si intenda e come verificare che la configurazione si conserva.

Se i ragazzi non hanno utilizzato coefficienti negativi, si invita ora a riflettere su questo aspetto dando istruzioni come: "il cavaliere deve fare un passo da $\boldsymbol{v_1}$ all'indietro", "il cavaliere deve fare un passo da $\boldsymbol{v_1}$ all'indietro e 2 passi da $\boldsymbol{v_2}$ all'indietro".

In particolare, si pone l'attenzione sul percorso effettuato muovendosi, in sequenza, con un passo da $\boldsymbol{v_1}$, uno da $\boldsymbol{v_2}$, uno da $\boldsymbol{v_1}$ all'indietro e uno da $\boldsymbol{v_2}$ all'indietro, riconoscendo che si stanno percorrendo i vertici $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(4,3)$, $C(1, 2)$ del parallelogramma i cui lati uscenti dall'origine rappresentano i vettori $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$. Chiameremo *parallelogramma fondamentale* tale parallelogramma (Figura 1).

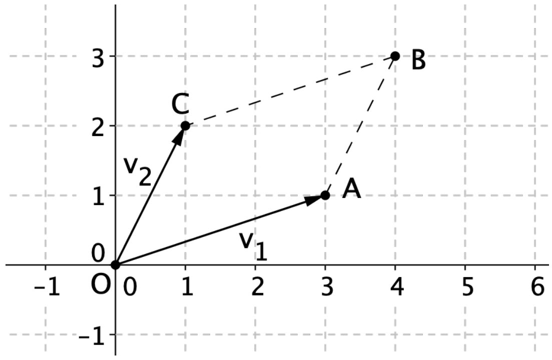

Figura 1

Descrivendo sul piano cartesiano l'attività svolta, si identifica il passo "$\boldsymbol{v_1}$ all'indietro" come il passo da $-\boldsymbol{v_1} = (-\mathbf{1}, -\mathbf{3})$.

Dopo aver condotto un numero sufficiente di prove ci si ferma e si riflette nuovamente sulla domanda: "Quali punti possono essere raggiunti dal cavaliere e, in particolare, ci sono posti dove il castello non può essere raggiunto?"

Si rappresentano sul piano cartesiano i punti ottenuti. È possibile anche utilizzare GeoGebra.

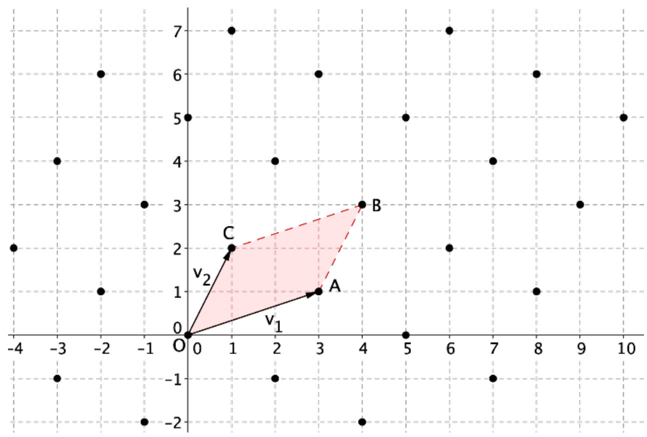

Figura 2: Il parallelogramma fondamentale e i punti raggiungibili con i passi $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$

Si osserva che, disegnati i vettori $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ tramite i segmenti OA e OC come in Figura 2, il vertice B si raggiunge da O muovendosi di un passo $\boldsymbol{v_1}$ e poi di un passo $\boldsymbol{v_2}$, oppure scambiando l'ordine dei passi, cioè muovendosi prima di un passo $\boldsymbol{v_2}$e poi di un passo $\boldsymbol{v_1}$.
Muovendo una copia del parallelogramma fondamentale, si osserva che i punti ottenuti si distribuiscono con regolarità (Figura 3).

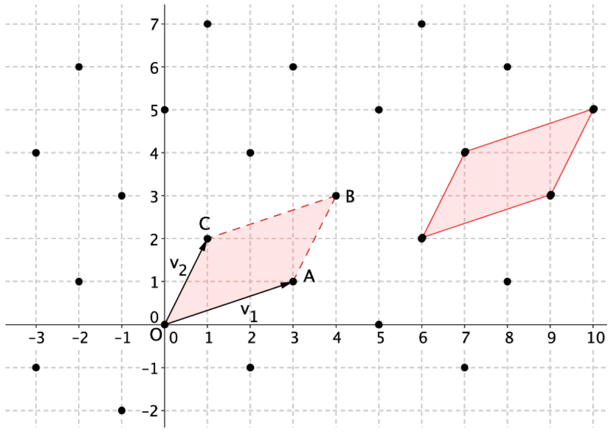

Figura 3

Collegando i punti tra loro raggiungibili tramite multipli di $\boldsymbol{v_1}$ si tracciano rette parallele a $\boldsymbol{v_1}$
Collegando i punti tra loro raggiungibili tramite multipli di $\boldsymbol{v_2}$ si tracciano rette parallele a $\boldsymbol{v_2}$ (Figura 4).

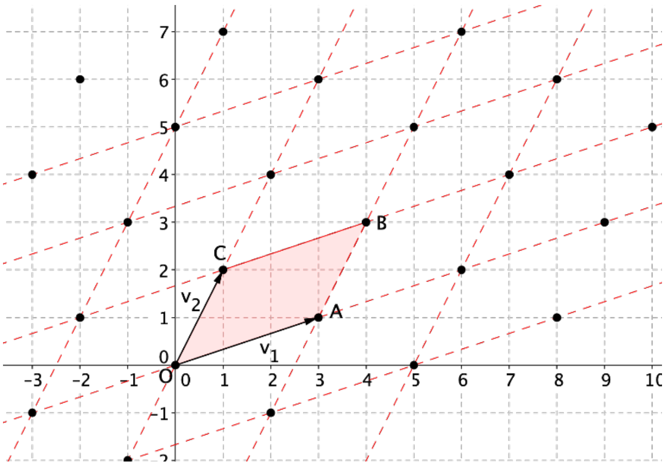

Figura 4: La griglia definita da $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$

Si evidenzia in tal modo che il piano risulta suddiviso in celle congruenti al parallelogramma fondamentale. La suddivisione individua una *griglia*: per questo motivo, la configurazione di punti ottenuta prende il nome di *reticolo* individuato (o generato) dai vettori $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$.

Attività 5.3 Modifichiamo i passi per arrivare in ogni punto

Descrizione attività

Si discute su come raggiungere gli altri punti del piano. I ragazzi proporranno istruzioni come "fai mezzo passo da $\boldsymbol{v_1}$ e uno da $\boldsymbol{v_2}$", "fai 2/3 di passo da $\boldsymbol{v_1}$".

Si rappresentano anche sul piano cartesiano le posizioni raggiunte, riconoscendo se appartengono ai bordi o all'interno di una cella.

Si osserva come il movimento "mezzo passo da $\boldsymbol{v_1}$" descrive il passaggio dal punto di coordinate (x, y) al punto di coordinate $\left(x+\frac{3}{2},\ y+\frac{1}{2}\right)$: si identifica con il passo da $\frac{1}{2}\boldsymbol{v_1}$ di componenti $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

Utilizzando la coppia di vettori $\frac{1}{2}\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ si ottiene una suddivisione in celle più piccole, raffinando la griglia di $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ (Figura 5).

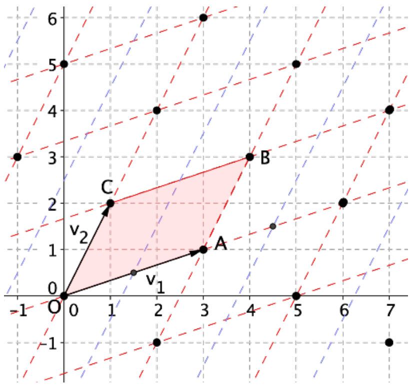

Figura5: La griglia definita da $\frac{1}{2}\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$

Si osserva che, assegnati numeri h_1 e h_2, è possibile considerare il vettore $h_1\boldsymbol{v_1}$ di componenti $(h_1, 3h_1)$, mentre il vettore $h_2\boldsymbol{v_2}$ ha componenti $(h_2, 2h_2)$. Più in generale, dati un numero h e un vettore $\boldsymbol{v}=(z_1, z_2)$, si indica con $h\boldsymbol{v}$ il vettore di componenti (hz_1, hz_2). Si osservi che ogni punto ottenuto dall'origine O tramite uno spostamento della forma $a\boldsymbol{v}$ appartiene alla retta per O con la direzione assegnata da $\boldsymbol{v}$ (questo è sicuramente vero se a è un numero razionale, e resta vero in generale).

Si introduce ora una terminologia utile.

Definizione

Siano $\boldsymbol{v_1}$ **e** $\boldsymbol{v_2}$ due vettori del piano e $h_1\ e\ h_2$ due numeri, chiamiamo ***combinazione lineare di*** $\boldsymbol{v_1}$ ***e*** $\boldsymbol{v_2}$ ***con coefficienti*** $\boldsymbol{h_1}$ ***e*** $\boldsymbol{h_2}$ il vettore $h_1\boldsymbol{v_1}+\ h_2\boldsymbol{v_2}$.

Domanda 1

Se h_1 e h_2 sono numeri in $\mathbb{Q}$ quale movimento compie il cavaliere se si sposta del vettore $h_1\boldsymbol{v_1}+h_2\boldsymbol{v_2}$?

Domanda 2

In quale insieme variano i numeri $h_1\ e\ h_2$ nella situazione appena analizzata (movimenti del cavaliere)? Per quanto concerne l'insieme dei punti raggiungibili dal cavaliere, che differenza c'è se consideriamo $h_1\ e\ h_2$ in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oppure $\mathbb{R}$?

Esercizio 1
Qual è il passo necessario per “spostare il quadrato” di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ in modo che il vertice $(0,0)$ sia mandato su $(14,8)$? Quali sono, in questo caso, le coordinate assunte dagli altri vertici del quadrato dopo lo spostamento? Analoga domanda spostando $(1,0)$ in $(6,0)$. È possibile scrivere i passi ottenuti come combinazioni lineari di $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$?

L’attività svolta può essere formalizzata osservando che lo spostamento avente per passo un fissato vettore individua una trasformazione del piano, cioè una funzione del piano cartesiano in se stesso, e descrivendo esplicitamente la trasformazione tramite le coordinate. Nel caso in cui lo ritenga opportuno, l’insegnante potrà poi ricollegarsi al classico percorso sulle traslazioni proposto a vari livelli nei testi di scuola superiore.

Attività 5.4 Combinazione lineare di vettori del piano come prodotto di una matrice per un vettore

Si considerano nuovamente i vettori $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Soffermiamo l'attenzione su una loro combinazione lineare, ad esempio $5\,\boldsymbol{v_1} + 6\boldsymbol{v_2}$.

Le componenti della combinazione lineare $5\,\boldsymbol{v_1} + 6\boldsymbol{v_2}$ si ricavano più facilmente scrivendo in colonna:

$$5\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 \\ 5\cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\cdot 1 \\ 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 + 6\cdot 1 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+6 \\ 5+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \end{pmatrix}$$

In generale, se i coefficienti della combinazione lineare sono h_1 e h_2, l'espressione delle componenti di $h_1\boldsymbol{v_1} + h_2\boldsymbol{v_2}$ diventa:

$$h_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + h_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1\cdot 3 \\ h_1\cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_2\cdot 1 \\ h_2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1\cdot 3 + h_2\cdot 1 \\ h_1\cdot 1 + h_2\cdot 2 \end{pmatrix}$$

In tale espressione, le componenti dei vettori $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ non cambiano, mentre i coefficienti h_1 e h_2 della combinazione lineare possono prendere valori arbitrari.

Ci sarà utile scrivere tale espressione utilizzando una nuova notazione:
le componenti dei vettori $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ sono utilizzate per comporre le colonne (nell'ordine) di una tabella a valori numerici $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

componenti di $\boldsymbol{v_1}$ | componenti di $\boldsymbol{v_2}$

Tale tabella, come tutte le tabelle con entrate numeriche, prende il nome di **matrice** e viene indicata attraverso una lettera maiuscola. Scriveremo:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta è quadrata, con due righe e due colonne:
- i coefficienti h_1 e h_2 della combinazione lineare sono utilizzati (nell'ordine) come componenti del vettore colonna:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

- la combinazione lineare è rappresentata in forma di prodotto:

$$M\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} := h_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + h_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1\cdot 3 + h_2\cdot 1 \\ h_1\cdot 1 + h_2\cdot 2 \end{pmatrix}$$

introducendo la moltiplicazione di una matrice per un vettore.

NB Con il simbolo $:=$ *si intende che la quantità a sinistra viene definita dall'espressione sulla destra.*

Seguendo questa linea, si introduce, più in generale, il prodotto di una matrice (quadrata con 2 colonne) per un vettore (colonna con 2 righe):

Dati

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e un vettore } \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

il loro prodotto è definito come

$$M\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} h_1 \cdot a + & h_2 \cdot b \\ h_1 \cdot c + & h_2 \cdot d \end{pmatrix} = h_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Il prodotto fornisce quindi **la combinazione lineare delle colonne di $\boldsymbol{M}$ avente per coefficienti le componenti $\boldsymbol{h_1}$ e $\boldsymbol{h_2}$ del vettore**.

È però interessante notare che possiamo calcolare direttamente l'espressione $\begin{pmatrix} h_1 \cdot 3 + & h_2 \cdot 1 \\ h_1 \cdot 1 + & h_2 \cdot 2 \end{pmatrix}$ del prodotto. La prima entrata del prodotto coinvolge solo i coefficienti della prima riga di *M*:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} h_1 \cdot a + \ h_2 \cdot b \\ \dots \end{pmatrix}$$

La prima entrata del prodotto si ricava moltiplicando il primo elemento della prima riga di M (elemento di posizione (1,1)) per la prima entrata h_1 del vettore, e si somma il risultato ottenuto al prodotto del secondo elemento della prima riga (l'elemento di posto (2,2)) per la seconda entrata del vettore:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \cdot a + \ h_2 \cdot b \\ \dots \end{pmatrix}$$

Analogamente si lavora con la seconda per la seconda entrata del prodotto tra matrice e vettore. Per questo motivo, il prodotto matrice per vettore è chiamato *prodotto righe per colonne.*

Altri materiali: esercizi e domande

1. Calcolare

$$2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots \qquad 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \cdots \qquad 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \cdots \qquad .$$

2. Quali sono i coefficienti che descrivono il vettore $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

3. **Che cosa succede cambiando i vettori**?

Abbiamo visto che con le combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ si può generare una griglia come quella descritta sopra. È vero che ogni coppia di vettori $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}$ produce una griglia dello stesso tipo? Ci sono coppie di vettori particolari con le quali non si riesce a generare la griglia?

4. Proporre esempi numerici in cui calcolare prodotto matrice per vettore; chiedere di scrivere il prodotto ottenuto come combinazione lineare delle colonne.

5. Mostrare che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 + k_1 \\ h_2 + k_2 \end{pmatrix}$ e che vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma di vettori

Soluzioni degli esercizi proposti

Attività 5.3
Domanda 1
Spostarsi di passo $h_1\boldsymbol{v_1} + h_2\boldsymbol{v_2}$ è equivalente a compiere prima un passo uguale a h_1 volte $\boldsymbol{v_1}$ e poi a h_2 volte $\boldsymbol{v_2}$, oppure prima un passo uguale a h_2 volte $\boldsymbol{v_2}$ e poi a $h_1$volte $\boldsymbol{v_1}$.

Domanda 2
Con coefficienti interi si trovano i punti raggiungibili come in Figura 2, ottenibili mediante una successione di spostamenti uguali a $\boldsymbol{v_1}$ o $\boldsymbol{v_2}$ o a uno dei loro opposti.
Utilizzando coefficienti razionali, si ottengono spostamenti che sono composizione di spostamenti corrispondenti a una frazione di $\boldsymbol{v_1}$ o $\boldsymbol{v_2}$ (o loro opposti). Questi punti possono essere disegnati graficamente.
L'estensione ai coefficienti reali comporta la presenza di ulteriori punti. In base agli assiomi di $\mathbb{R}$, utilizzando coefficienti reali si raggiungono tutti i punti del piano

Esercizio 1
Per spostare $(0,0)$ in $(14,8)$ lo spostamento necessario è di passo $(14,8) = 3\boldsymbol{v_1} + 2\boldsymbol{v_2}$. Il vertice $(1,0)$ si sposta in $(15,8)$, $(1,1)$ si sposta in $(15,9)$, $(0,1)$ in $(14,9)$.
Per spostare $(1,0)$ in $(6,0)$ lo spostamento necessario è di passo $(5,0) = 2\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2}$. Il vertice $(0,0)$ si sposta in $(5,0)$, $(1,1)$ si sposta in $(6,1)$, $(0,1)$ in $(5,1)$.

Attività 5.4
Altri materiali: esercizi e domande
1.

$$2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 3\\2\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$$

$$5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\cdot 1\\5\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

2. Sono i coefficienti $h_1 = 3$ e $h_2 = -1$.

3. Se $\boldsymbol{w_1} = (0,0)$ oppure $\boldsymbol{w_2} = (0,0)$ la griglia sicuramente non si forma. Se, invece, $\boldsymbol{w_1} \neq (0,0)$, la griglia non si forma se esiste un coefficiente reale h tale che $\boldsymbol{w_2} = h\,\boldsymbol{w_1}$, cioè se le combinazioni lineari di $\boldsymbol{w_1}$ e $\boldsymbol{w_2}$ sono tutte contenute in una retta.

5. Si ha:

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} =$$

$$h_1\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + h_2\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} =$$

$$(h_1 + k_1)\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + (h_2 + k_2)\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1 + k_1\\h_2 + k_2\end{pmatrix}$$