Attività 6

Matrici e trasformazioni affini

Grado scolastico: secondo biennio della Scuola secondaria di secondo grado

Tematica: trasformazioni affini e loro applicazioni

Introduzione
Proponiamo qui alcune attività che servono a introdurre in modo operativo il concetto di applicazione lineare tra spazi vettoriali.
Come nell'attività precedente, non ci prefiggiamo di essere esaustivi, ma di rendere concreta l'idea che un'applicazione lineare è determinata una volta che siano note le immagini dei versori degli assi cartesiani. Daremo poi alcuni spunti affinché lo studente possa riflettere su qualche proprietà generale di un'affinità. Il docente potrà poi decidere se sviluppare un percorso più tradizionale sulle affinità, lavorando eventualmente con il libro di testo. Consigliamo anche la lettura del prezioso libro di Emma Castelnuovo, *Pentole, ombre e formiche* edito da UTET nel 2017.

Prerequisiti
- Conoscere la nozione di vettore piano;
- Conoscere la nozione di combinazione lineare;
- Avere un'idea della nozione di involucro lineare;
- Conoscere la definizione di prodotto *righe per colonne* di una matrice per un vettore.

Obiettivi disciplinari dell'Attività 6
- Comprendere la nozione di applicazione lineare tramite il suo effetto sui versori degli assi cartesiani;
- Visualizzare alcune proprietà geometriche di una trasformazione lineare.

Obiettivi trasversali dell'Attività 6
- Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica, i cui strumenti permettono di affrontare situazioni reali;
- Interiorizzare concetti sviluppando la capacità di rappresentarli a se stessi in modo eloquente;
- Proporre attività e metodologie in cui l'alunno è attivo, formula ipotesi, discute e argomenta le proprie scelte;
- Creare un ambiente di apprendimento dove sviluppare i due aspetti della matematica: quello applicativo e quello teorico;
- Formulare domande e fornire risposte pertinenti;
- Interagire con il compagno;
- Aspettare il proprio turno per parlare;
- Collaborare e rispettare le consegne dell'attività.

Indice attività

Attività 6.1 Quadrati e parallelogrammi
Attività 6.2 Nel giardino di Silvana
Attività 6.3 Visualizzazione di una trasformazione affine (con origine fissa) e delle sue proprietà tramite o studio di alcune configurazioni
Attività 6.4 Rappresentazione di una affinità con origine fissa: matrici 2x2 come operatori affini
Attività 6.5 Attività aggiuntive

Introduzione Attività

Attività 6.1 Quadrati e parallelogrammi

In questa attività si propone nuovamente un gioco in cui gli studenti devono muoversi sul piano cartesiano. Lo scopo che ci prefiggiamo è quello di indurre una rappresentazione il più possibile naturale di un'applicazione lineare piana, per la quale è sufficiente conoscere solo l'immagine dei due versori degli assi cartesiani.

Attività 6.2 Nel giardino di Silvana

Dopo la precedente attività introduttiva dovrebbe emergere l'idea che la trasformazione viene determinata esclusivamente dall'immagine di $\boldsymbol{e_1}$ ed $\boldsymbol{e_2}$**.** La griglia individuata dalle combinazioni lineari a coefficienti interi di $\boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{e_2}$ si deforma nella griglia generata dai vettori che sono i "trasformati" di $\boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{e_2}$.
In particolare, ciò che determina la trasformazione è il "destino" della cella che ha vertici in $(0,0)$ e $(1,1)$. Nell'attività che segue, vogliamo rendere visibile questo fatto.

Materiale: L'insegnante può utilizzare, ad esempio, un pezzo di griglia per far arrampicare i fiori.

Modalità: *osservazione (in coppia)*

Attività 6.3 Visualizzazione di una trasformazione affine (con origine fissa) e delle sue proprietà tramite lo studio di alcune configurazioni

In quanto segue, viene proposta un'attività operativa per visualizzare l'effetto di una trasformazione affine. I ragazzi, divisi in due gruppi, creeranno materialmente un'immagine: il primo gruppo disporrà sul piano cartesiano dei bollini in alcune posizioni descritte da combinazioni lineari dei versori degli assi $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$; il secondo gruppo, invece, disporrà bollini di colore diverso nelle posizioni descritte da combinazioni lineari con **gli stessi coefficienti** ma dei vettori $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$. Si confronteranno le figure ottenute. Lo scopo è quello di far comprendere come la seconda figura sia quella che si ottiene applicando alla prima una trasformazione lineare che manda $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$, rispettivamente, in $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$.

L'insegnante può creare attività simili perché emerga come la trasformazione della figura "segue" la trasformazione del reticolo costituito dai vettori coordinati (e, più dettagliatamente, del parallelogramma fondamentale).

Si suggerisce di stimolare i ragazzi ad osservare alcune proprietà di questo esempio (che poi possono portare ad una generalizzazione): in questa trasformazione ciò che è "dritto" resta dritto? Cioè: le rette vengono trasformate in rette? Inoltre, i due segmenti paralleli restano paralleli? Infine, gli angoli della H vengono conservati?

Se il docente ha già trattato le affinità, si può sottolineare come, salvo fatta per l'eventuale componente di traslazione, un'affinità trasforma:

- rette in rette
- il fascio di rette nell'origine in se stesso
- luoghi disgiunti in luoghi disgiunti (per questo basta la sola biiettività)
- rette parallele in rette parallele.

Attività 6.1 Quadrati e parallelogrammi

Invece di assegnare a tutti i punti il medesimo movimento (*passo*), si assegna ora una **regola** che individua, **per ciascun punto**, quale sia lo spostamento da compiere.

Esercizio 1

Considera nuovamente i vettori $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sposta i punti *P* del piano cartesiano con la regola seguente:

il punto di coordinate $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ si sposta fino a raggiungere il punto che ha coordinate

$$\boldsymbol{x\, v_1 + y\, v_2}$$

Posizioniamo quattro cavalieri sui vertici $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ di un quadrato: facendoli muovere secondo questa regola, che cosa osserviamo?

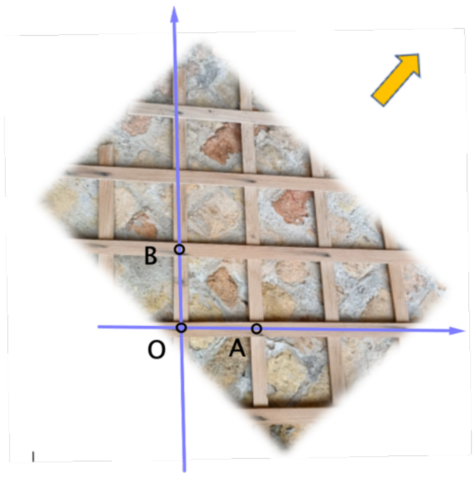
Esercizio 2

Osserva che anche i vettori $\boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{e_2}$ individuano una griglia che suddivide il piano: in questo caso le celle sono quadrate e il parallelogramma fondamentale è il quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$: lo chiamiamo *parallelogramma fondamentale standard*.

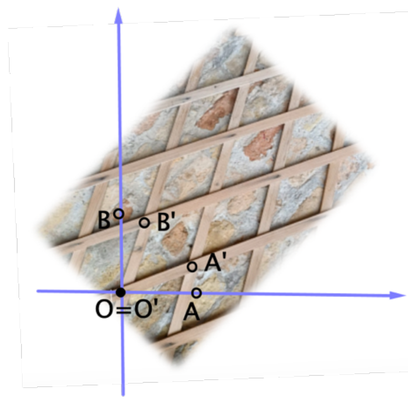
Quando trasformiamo i vertici di questa cella quadrata mediante la nuova regola, che cosa otteniamo?

Attività 6.2 Nel giardino di Silvana

Descrizione attività
Silvana ha questa griglia per far arrampicare le piante sul muro.



1. Se le aste formano quadrati di lato 20 cm, segna con un puntino alcuni punti della griglia e trovane le coordinate.
2. Silvana tira la griglia nella direzione della freccia (è la direzione della bisettrice degli assi) lasciando fisso il punto che nella figura è indicato come O. Il punto A viene spostato in una posizione che, rispetto al sistema di riferimento fissato all'inizio, si può descrivere con $A'(\sqrt{3} \cdot 10, 10)$ (le coordinate sono espresse in centimetri). Quali sono le coordinate del punto B nella sua nuova posizione B'? Per ciascuno dei punti che avevi evidenziato in 1., trova poi le coordinate assunte in questa nuova configurazione della griglia.



Attività 6.3 Visualizzazione di una trasformazione affine (con origine fissa) e delle sue proprietà tramite lo studio di alcune configurazioni

Descrizione attività

Formate vari gruppi suddivisi in due sottogruppi. Ciascun sottogruppo costruirà una griglia cartesiana e ritaglierà una ventina di bollini, blu per un sottogruppo e rossi per l'altro. Ciascun sottogruppo disporrà i bollini sulla griglia nelle posizioni indicate e poi i due sottogruppi confronteranno le immagini ottenute. (NB: $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ sono i vettori delle attività precedenti).

Rispondete alle domande seguenti:

1. Che relazione c'è tra le figure dei due sottogruppi?
2. Da quello che osservi, affermeresti che la trasformazione che porta la figura del primo sottogruppo in quella del secondo:
    a. mantiene la perpendicolarità tra le rette?
    b. mantiene il parallelismo tra le rette?

Punti gruppo A	**Punti gruppo B**
D1 $5\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2$	D1 $5\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2$
D2 $5\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2$	D2 $5\boldsymbol{v}_1 + 6\boldsymbol{v}_2$
D3 $5\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2$	D3 $5\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2$
D4 $5\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2$	D4 $5\boldsymbol{v}_1 + 8\boldsymbol{v}_2$
D5 $5\boldsymbol{e}_1 + 9\boldsymbol{e}_2$	D5 $5\boldsymbol{v}_1 + 9\boldsymbol{v}_2$
D6 $5\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2$	D6 $5\boldsymbol{v}_1 + 10\boldsymbol{v}_2$
D7 $5\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2$	D7 $5\boldsymbol{v}_1 + 10\boldsymbol{v}_2$
D8 $9\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2$	D8 $9\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2$
D9 $9\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2$	D9 $9\boldsymbol{v}_1 + 6\boldsymbol{v}_2$
D10 $9\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2$	D10 $9\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2$
D11 $9\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2$	D11 $9\boldsymbol{v}_1 + 8\boldsymbol{v}_2$
D12 $9\boldsymbol{e}_1 + 9\boldsymbol{e}_2$	D12 $9\boldsymbol{v}_1 + 9\boldsymbol{v}_2$
D13 $9\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2$	D13 $9\boldsymbol{v}_1 + 10\boldsymbol{v}_2$
D14 $9\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2$	D14 $9\boldsymbol{v}_1 + 10\boldsymbol{v}_2$
D15 $6\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2$	D15 $6\boldsymbol{v}_1 + 8\boldsymbol{v}_2$
D16 $7\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2$	D16 $7\boldsymbol{v}_1 + 8\boldsymbol{v}_2$
D17 $8\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2$	D17 $8\boldsymbol{v}_1 + 8\boldsymbol{v}_2$

Attività 6.4 Rappresentazione di una affinità con origine fissa: matrici 2x2 come operatori affini

Come abbiamo visto, una trasformazione affine può essere visualizzata come una trasformazione che deforma il reticolo dei vettori $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ in funzione di come vengono trasformati gli stessi $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$.

Consideriamo ora la trasformazione T che sia individuata dal fatto che:

$$T(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Come possiamo ricavare da un punto di vista formale il legame tra le coordinate di un punto su reticolo "vecchio" e quelle della sua immagine nel reticolo deformato?

Dato un punto *P* di coordinate (x, y), esso verrà trasformato da T in un punto P' di coordinate (x', y'). Il legame tra (x, y) e (x', y') si può ricavare dalla definizione:

$$T(P) = T(\overrightarrow{OP}) = T(x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2}) = x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ x + 2y \end{pmatrix} = (3x + y)\boldsymbol{e_1} + (x + 2y)\boldsymbol{e_2}$$

In particolare, $T(P) = xT(\boldsymbol{e_1}) + yT(\boldsymbol{e_2}) = x\,\boldsymbol{v_1} + y\,\boldsymbol{v_2}$.

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

C'è un modo efficace di esprimere questo legame. Se introduciamo la tabella di numeri con due righe e due colonne (che chiameremo *matrice 2x2*):

$$MM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e i vettori (in colonna)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere

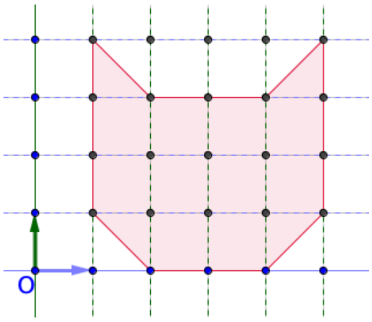
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dove l'operazione che si fa tra M e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è il cosiddetto *prodotto righe per colonne.*

Attività 6.5 Attività aggiuntive

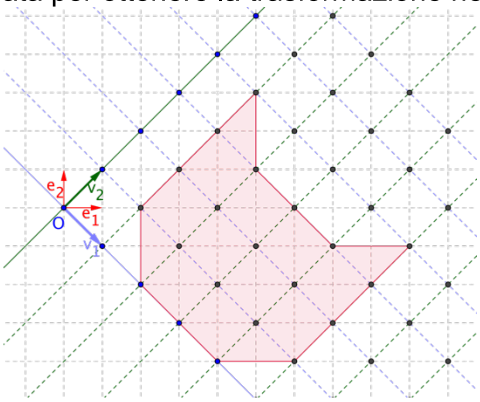
Obiettivo
Visualizzare semplici dilatazioni/simmetrie assiali/simmetrie centrali attraverso il loro effetto su immagini "essenziali".

Esercizio 1
A partire dalla figura iniziale, si chiede di disegnare la figura trasformata con la dilatazione della forma $(x, y) \rightarrow (3x, y)$ lavorando direttamente su una figura suddivisa in quadretti.



Esercizio 2
Ripetere l'esercizio precedente applicando:
- la trasformazione $(x, y) \rightarrow (x, 2y)$;
- la trasformazione $(x, y) \rightarrow (x, \frac{1}{2}x + y)$

Esercizio 3
Quale trasformazione va applicata per ottenere la trasformazione nell'immagine?



Soluzione degli esercizi proposti

Attività 6.1

Esercizio 1
I personaggi vanno a disporsi sui vertici del parallelogramma fondamentale.

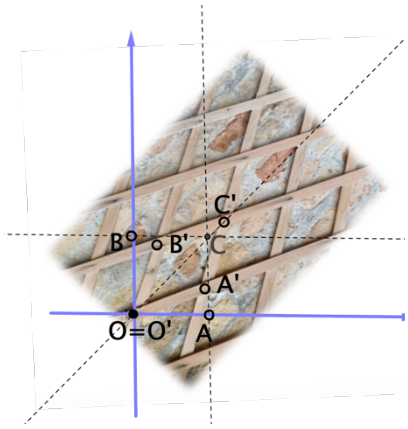
Esercizio 2
I vertici del parallelogramma fondamentale della griglia individuata da $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$.

Inoltre, ogni vertice della griglia di $\boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{e_2}$ viene trasformato in un vertice della griglia individuata da $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$.

Attività 6.2
Nella trasformazione il punto O non cambia posizione, mentre la griglia cambia forma: si deformano gli angoli, ma le lunghezze dei segmenti fra due angoli restano invariate (perché le aste di legno cambiano posizione ma non lunghezza). Si può anche controllare in modo diretto che la distanza tra O e A coincide con la distanza tra O e A':

$$\sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2 + 10^2} = \sqrt{10^2\,(3+1)} = 20$$

Il punto B' appartiene dunque alla circonferenza di centro O e raggio 20, come A, B, A'.
La trasformazione è avvenuta "tirando" nella direzione della bisettrice: in particolare, il quadrato fondamentale di vertici $OACB$ si trasforma nel rombo $OA'C'B'$ e il vertice C' appartiene alla bisettrice, come C.



Più in generale, i vertici che stavano prima nella bisettrice restano nella stessa retta anche dopo la trasformazione e la struttura conserva la propria simmetria rispetto alla bisettrice.

Per trovare le coordinate di B' si può procedere in molti modi. Uno dei modi possibili deriva dal ragionamento di simmetria: lo spostamento subito da B verso B' è analogo a quello compiuto da A verso A'; in entrambi i casi, la trasformazione avvicina i punti alla bisettrice (uno verso sinistra e in basso, e l'altro verso l'alto e a destra). I punti della bisettrice hanno coordinate tra loro uguali, mentre il punto B' deve avere coordinate scambiate rispetto a quelle del punto B. Dunque, $B'(10, \sqrt{3}\cdot 10)$).
Il punto C' ha come coordinate le somme:

$$C'(\sqrt{3}\cdot 10 + 10, 10 + \sqrt{3}\cdot 10) = (10 + \sqrt{3}\cdot 10, 10 + \sqrt{3}\cdot 10).$$

La determinazione delle coordinate dei trasformati dei vertici della griglia quadrata si ottiene in modo analogo sfruttando la descrizione come combinazione lineare di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e la conoscenza dei trasformati $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OB'}$ di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ (rispettivamente).

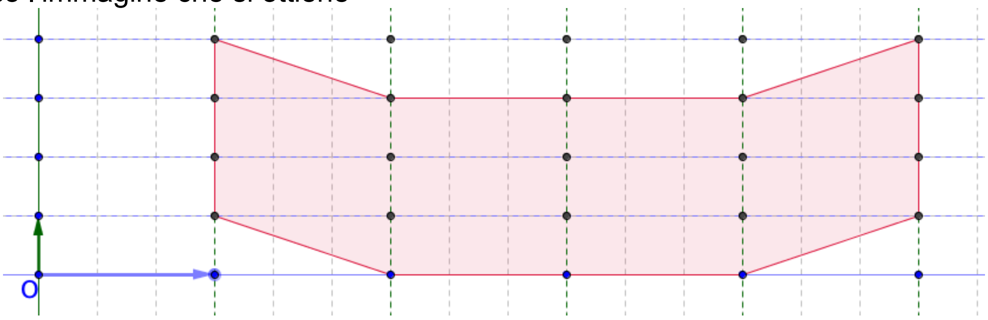
Attività 6.3

Il risultato del primo gruppo corrisponderà a una "H", mentre nel disegno del secondo gruppo si vedrà la lettera deformata in accordo con la deformazione del reticolo causata dalla trasformazione di $\boldsymbol{e}_i$ in $\boldsymbol{v}$, $i = 1,2$.

Attività 6.5

Esercizio 1

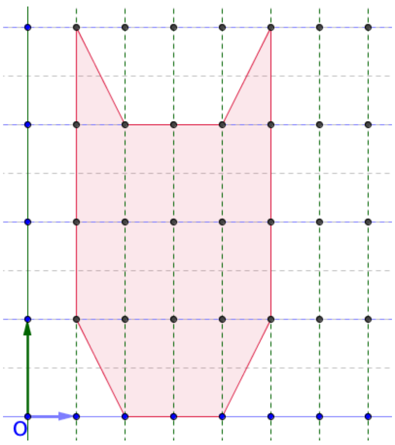
Ecco l'immagine che si ottiene



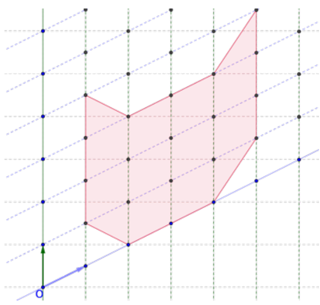
Si può usare questo esempio per affrontare i problemi: che ne è dell'allineamento? E del parallelismo?

Esercizio 2

Si ottiene



nel primo caso, mentre



nel secondo.

Esercizio 3

Si può operare la trasformazione $(x, y) \rightarrow (x - y, x + y)$.

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$