

Dimostrare l'Impossibile



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE
DIPARTIMENTO DI SCIENZE
MATEMATICHE, INFORMATICHE E FISICHE



GIOVANNA D'AGOSTINO

PAOLO GIANGRANDI

ANTONELLA MEREU

CHIARA MILAN

MARZIA TOSO

UNIVERSITA' DI UDINE - LICEO MATEMATICO ISIS A. MALIGNANI DI UDINE

SEMINARIO NAZIONALE DEI LICEI MATEMATICI 16-17 DICEMBRE 2022 - ROMA

Possibile e impossibile

- ▶ Nella matematica della scuola superiore si concentra l'attenzione su:
 - ▶ risolvere, calcolare, dimostrare, fare, determinare, ...
- ▶ mentre si trascurano quasi sempre
 - ▶ problemi non risolvibili,
 - ▶ costruzioni impossibili,
 - ▶ dimostrazioni di impossibilità, ...

Dimostrare l'impossibile: Progettazione e sperimentazione del percorso

- ▶ Il percorso è stato pensato nell'ambito della collaborazione scuola e università
 - ▶ Referente e coordinatrice del progetto: prof.ssa Giovanna D'Agostino (UniUD)
 - ▶ Contributo di studenti universitari (Sara Morgante Piano e Nizar Salahi al Asbahi)
 - ▶ Contributo insegnanti: progettazione e sperimentazione iniziale del percorso in classi del LSA
 - ▶ Il percorso è stato sperimentato in classe seconde e terze del liceo matematico e LSA (aa.ss. 2018-19, 2019-20, 2021-22)

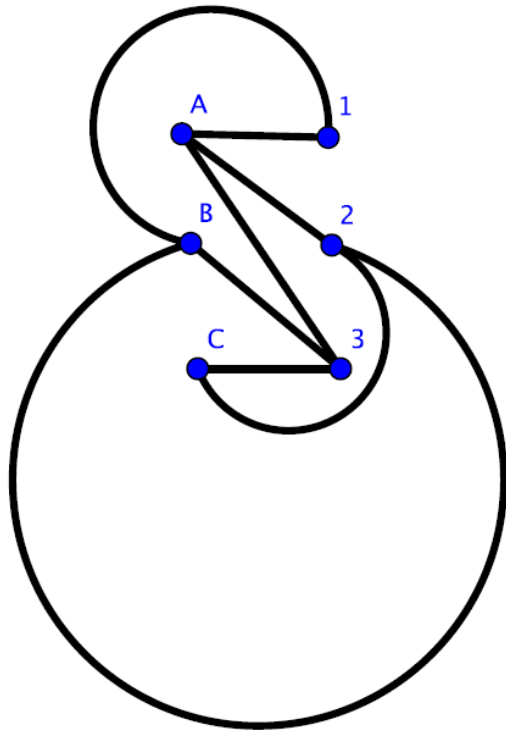


Dimostrare l'impossibile: Articolazione del percorso

- ▶ 1° Seminario: introduzione, i tre problemi classici dei Greci
- ▶ Laboratorio sulle costruzioni geometriche con riga e compasso
 - ▶ Scheda 1: costruzioni di base con riga compasso
 - ▶ Scheda 2: numeri costruibili con riga e compasso 1
 - ▶ Scheda 3: numeri costruibili con riga e compasso 2
- ▶ 2° Seminario: la risoluzione delle equazioni algebriche

UN PRIMO ESEMPIO

Si possono unire le tre case A, B, C ai tre negozi 1, 2, 3 in figura con strade che non si incrociano

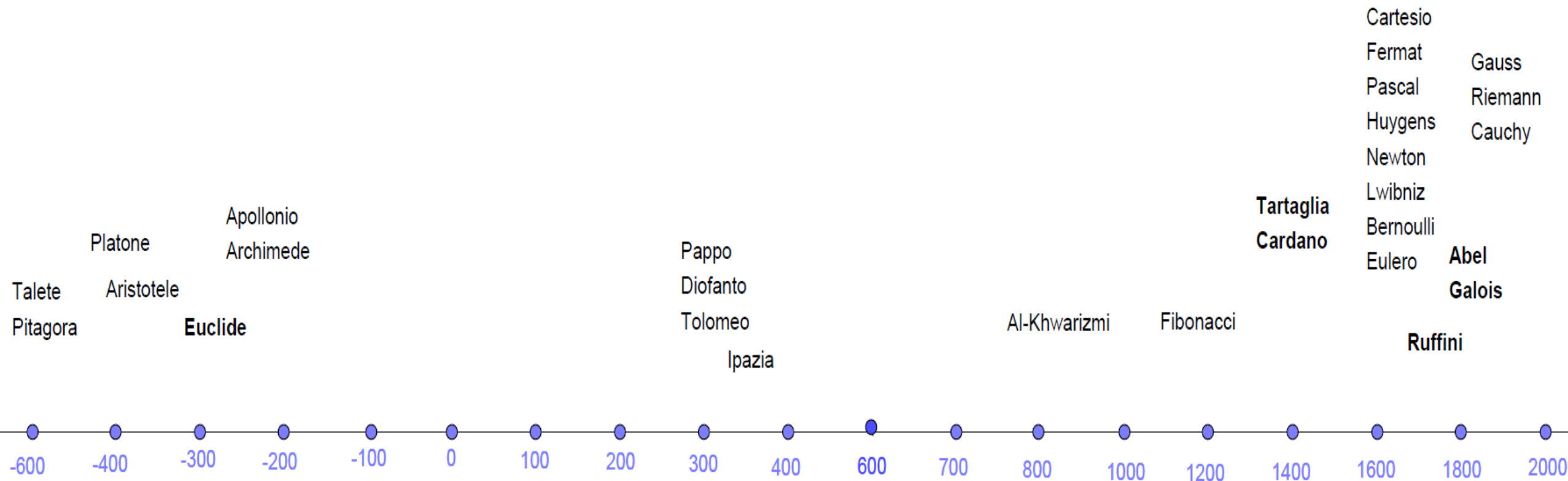


- ▶ Provando e riprovando si arriva sempre a creare un incrocio
- ▶ Diversi «esperimenti» però non bastano per affermare che il problema non ha soluzione: abbiamo bisogno di una dimostrazione di impossibilità, ovvero, di non esistenza:

In questo laboratorio ci siamo concentrati su due problemi, tra loro collegati

- ▶ **Costruzioni con riga e compasso: tre problemi classici dalla storia della matematica.**
- ▶ **Risoluzione per radicali di equazioni polinomiali. Le formule risolutive per le equazioni di primo e secondo grado si studiano a scuola. Cosa succede per gradi superiori?**

Percorso calato nella dimensione storica



1° Seminario: costruzioni con riga e compasso

Costruzioni geometriche

- La studio della geometria per i matematici greci era di tipo “costruttivo”.
- Ogni oggetto geometrico era “costruito” utilizzando rette e cerchi, considerati strumenti semplici, armoniosi ed esteticamente perfetti.
- I greci ritenevano che qualsiasi figura geometrica potesse essere “costruita” attraverso la combinazione di queste due sole figure fondamentali.
- Per **costruzione con “riga e compasso”** si intende un procedimento che, partendo da un segmento dato (che si intende di misura unitaria) costruisce oggetti utilizzando rette e cerchi costruiti a partire da punti precedentemente ottenuti e ottiene nuovi punti intersecando queste figure.



ESEMPI DI COSTRUZIONI CON RIGA E COMPASSO

- Data una retta r ed un punto P , possiamo costruire la retta per P parallela ad r e la retta per P perpendicolare ad r .
- Dato un segmento, possiamo dividerlo in n parti e moltiplicarlo per n utilizzando solo riga e compasso.
- Dato un angolo, possiamo dividerlo in due parti uguali.
- Dato un angolo retto, possiamo costruire un angolo di ampiezza un terzo dell'angolo dato (30 gradi).
- Dato un quadrato, possiamo costruire un quadrato di area doppia.
- Dato un lato, possiamo costruire un triangolo equilatero (3 lati), un quadrato (4 lati), un pentagono (5 lati), un esagono (6 lati), un ottagonio (8 lati), un decagono (10 lati) ... con quel lato.
- **Dividere un angolo qualsiasi in tre parti uguali? Costruire altri poligoni regolari quali l'ettagono (7 lati) e l'ennagono (9 lati)?**
- Per gli antichi greci, retta e cerchio erano in grado di generare qualsiasi figura geometrica.

TRE PROBLEMI IN CERCA DI SOLUZIONE

Tre problemi posti dagli antichi greci sono rimasti senza soluzione per migliaia di anni, diventando tanto famosi da venire anche utilizzati nel linguaggio comune:

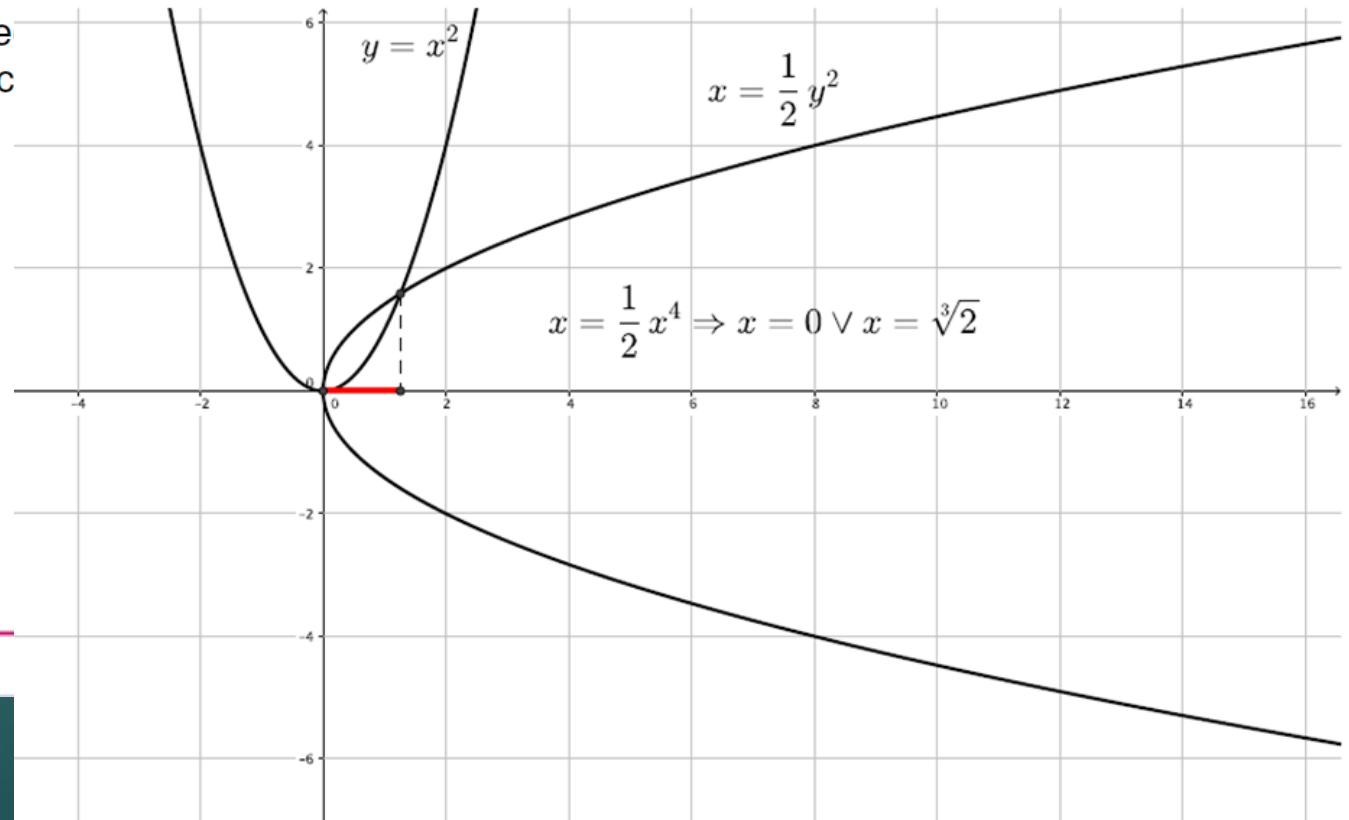
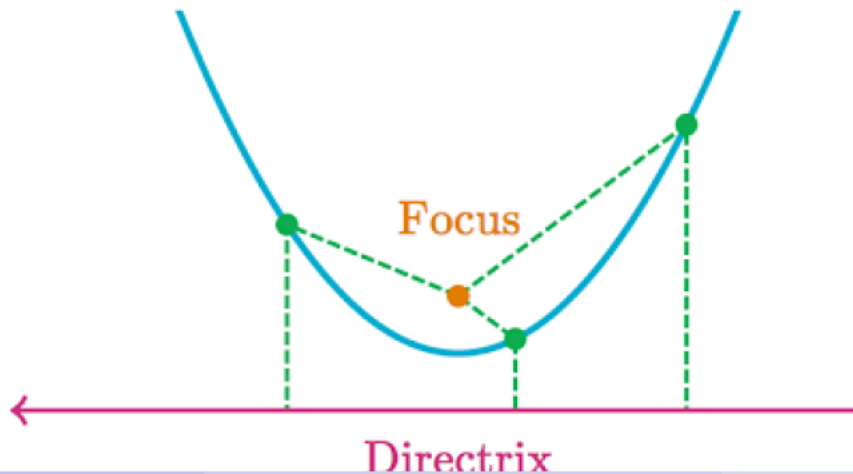
“far quadrare il cerchio”

- 1 la “quadratura” del cerchio (cioè la costruzione con riga e compasso di un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio dato);
- 2 la trisezione dell’angolo;
- 3 la duplicazione del cubo;
si narra che Apollo avesse chiesto agli abitanti di Delo, attraverso un oracolo, di raddoppiare il volume del suo altare cubico, mantenendone la forma cubica. Gli abitanti di Delo, non riuscendo a risolvere il problema, si rivolsero a Platone, il quale disse loro che Apollo aveva fatto questa richiesta non perché volesse veramente un altare doppio ma per mostrare quanto la matematica fosse importante...

L'importanza della scelta degli strumenti

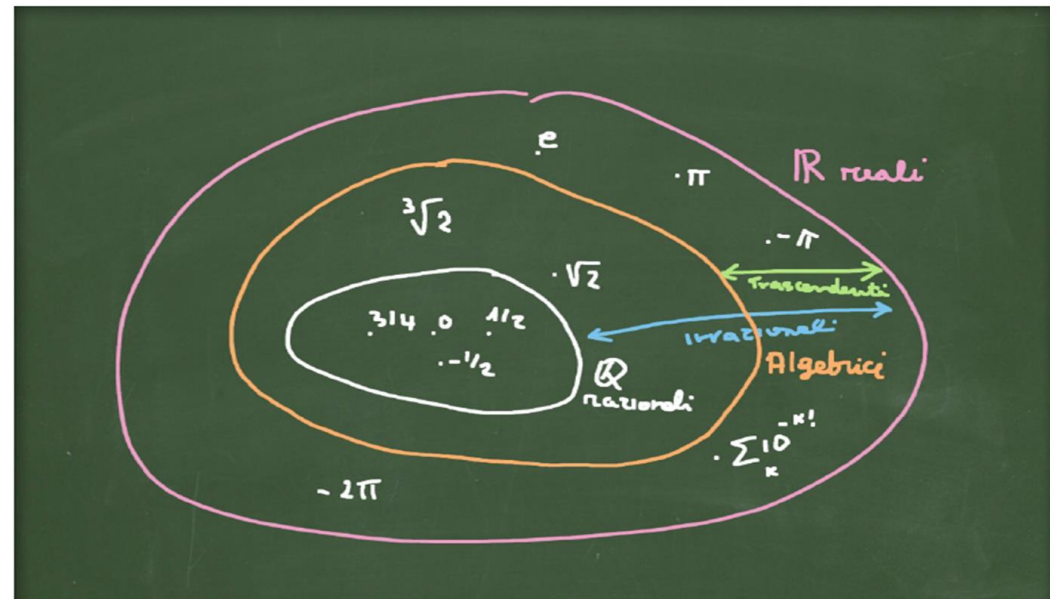
Duplicazione del cubo: soluzione con “compasso parabolico”

- Duplicazione del cubo. Costruire un cubo che ha volume doppio di un cubo dato.
- Se il cubo iniziale ha lato di misura 1, il doppio del volume è 2 e il lato del cubo “duplicato” ha misura $\sqrt[3]{2}$.
- Gli stessi greci trovarono soluzioni alternative utilizzando linee solo rette e circonferenze, ma queste soluzioni li lasciarono c insoddisfatti.



Concetti chiave

TUTTI I SEGMENTI COSTRUIBILI HANNO UNA MISURA CHE È UN NUMERO ALGEBRICO, ovvero ogni numero costruibile è algebrico!



LE COORDINATE (x,y) DI QUESTO PUNTO SONO NUMERI COSTRUIBILI

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + 1 - x^2 = 1 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4y^2 - 3 = 0$$

TEOREMA FONDAMENTALE

Se un'equazione di terzo grado a coefficienti interi ha soluzioni costruibili deve avere anche soluzioni razionali.

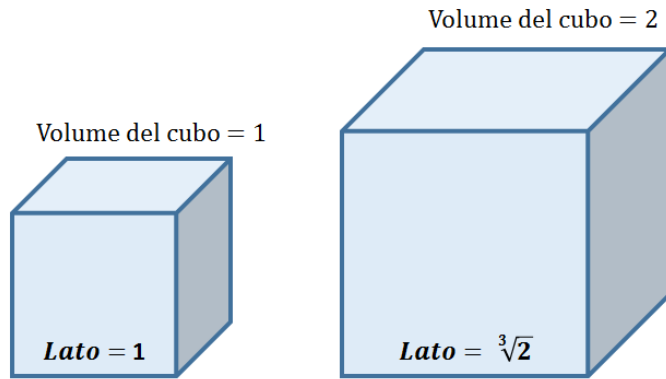
SOLUZIONE DELLA DUPLICAZIONE DEL CUBO E DELLA TRISEZIONE DELL'ANGOLO

Le equazioni

$$x^3 - 2 = 0, \quad 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

non hanno soluzioni razionali e quindi nessuna delle loro soluzioni è costruibile!

(NON) DUPLICHIAMO!



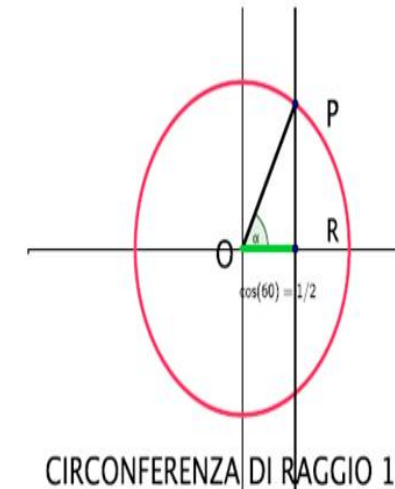
COROLLARIO

Non è possibile duplicare il cubo con riga e compasso.

Dim Duplicare il cubo equivale a costruire $\sqrt[3]{2}$ ma $\sqrt[3]{2}$ è una soluzione dell'equazione $x^3 - 2 = 0$, che non ha soluzioni razionali. Quindi il Teorema Fondamentale ci dice che $\sqrt[3]{2}$ non è costruibile.

(NON) TRISECHIAMO!

- L'angolo di 60 gradi è costruibile (basta costruire un triangolo equilatero).
- Possiamo costruire un angolo di 20 gradi (trisezione di un angolo di 60 gradi)?
- Formula della trisezione del coseno $\cos(\alpha) = 4(\cos(\frac{\alpha}{3}))^3 - 3\cos(\frac{\alpha}{3})$



$$\frac{1}{2} = \cos(60) = 4(\cos(20))^3 - 3\cos(20), \text{ ovvero } 8(\cos(20))^3 - 6\cos(20) - 1 = 0$$

COROLLARIO: non possiamo costruire un angolo di 20 gradi

Dim. $x = \cos(20)$ è soluzione dell'equazione $8x^3 - 6x - 1 = 0$, quindi, grazie al Teorema Fondamentale, non è costruibile perché $8x^3 - 6x - 1 = 0$ non ha soluzioni razionali.

Un problema ancora più difficile

Quadratura del cerchio e trascendenza di π

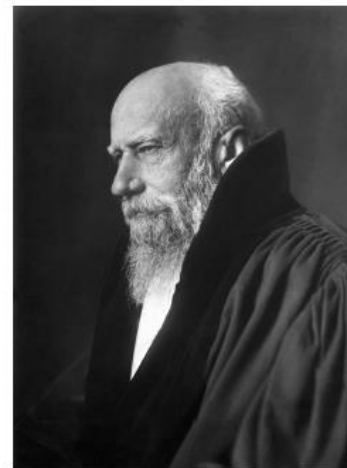
- I matematici greci avevano scoperto che la lunghezza della circonferenza è sempre proporzionale al suo diametro:

$$\frac{\ell}{d} \text{ dà sempre lo stesso risultato}$$

per ogni circonferenza lunga ℓ e di diametro d ,
e avevano chiamato π la costante di proporzionalità
(da π *περιφέρεια* = circonferenza).

- Nel 1761 il matematico svizzero/francese Lambert aveva dimostrato che π non è un numero razionale. Questo risultato però non aiutava a risolvere il problema della quadratura del cerchio: anche $\sqrt{2}$ non è razionale, ma è costruibile con riga e compasso.

- Nel 1882 il matematico tedesco Ferdinand von Lindemann ha dimostrato che π (e anche $\sqrt{\pi}$) non è un numero algebrico.



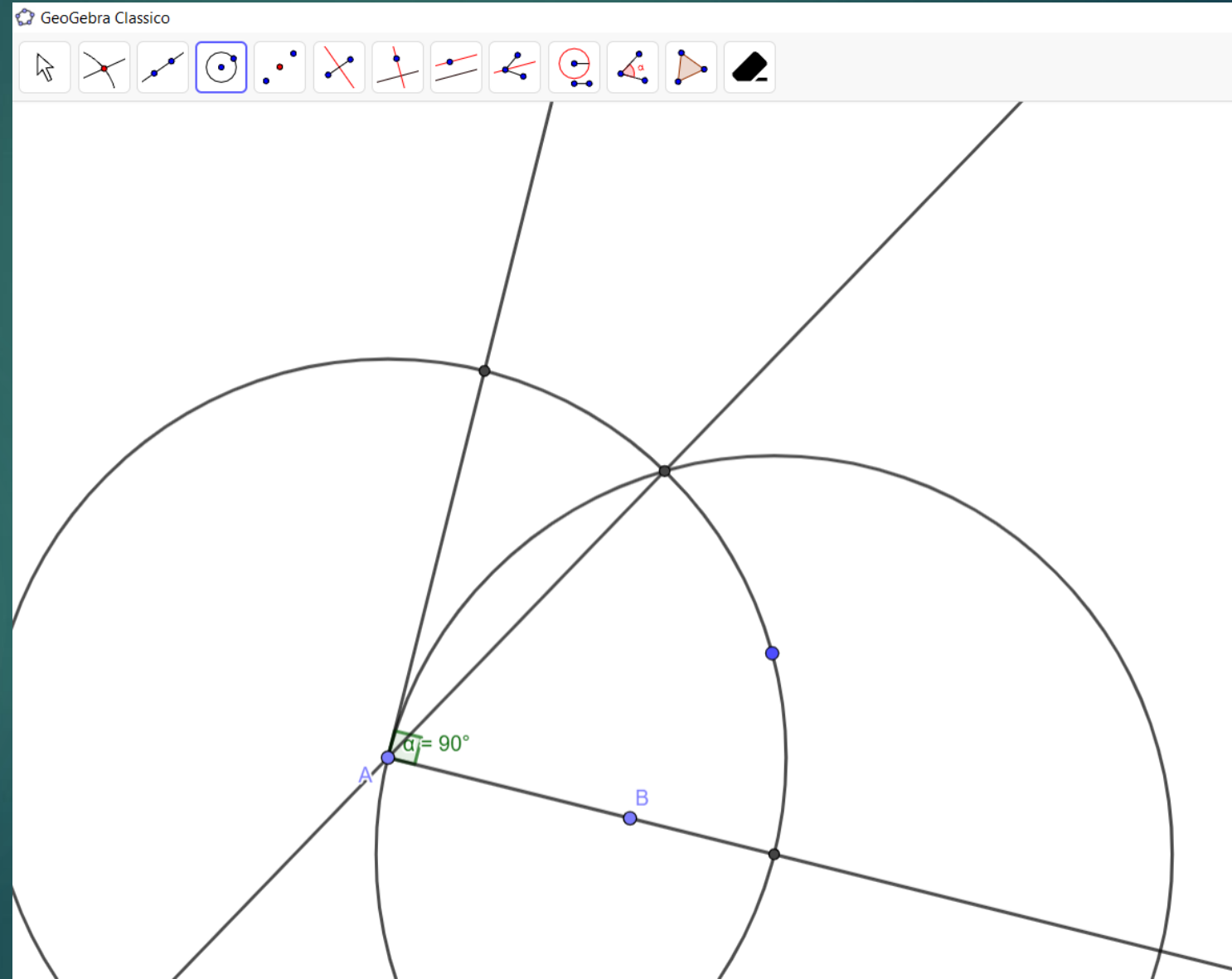
- Quadrare il cerchio con riga e compasso equivale a costruire un segmento (il lato del quadrato) di lunghezza $\sqrt{\pi}$. Quindi

è impossibile quadrare il cerchio con riga e compasso

Laboratorio con GeoGebra

- ▶ Schede di lavoro
 - ▶ Costruzioni di base con riga e compasso
 - ▶ Numeri costruibili
 - ▶ Somma e differenza
 - ▶ Moltiplicazione e divisione con il teorema di Talete
 - ▶ La radice quadrata con il teorema di Euclide

Trisezione di un angolo retto



I numeri costruibili

Applicando le costruzioni elementari analizzate nella scheda 1, vedremo come è possibile eseguire alcune operazioni aritmetiche fra grandezze usando la riga ed il compasso.

Diciamo che un **numero reale a è costruibile con riga e compasso**, se è possibile costruire con riga e compasso un segmento avente lunghezza $|a|$.

Naturalmente, ciò ha senso solo se è stato fissato nel piano un segmento di lunghezza unitaria.

La seguente costruzione mostra che *i numeri interi sono costruibili con riga e compasso*.

Costruzione 10: *Costruzione di un numero intero a*

- Apri in un file *Geogebra* la Vista grafica senza assi e griglia e disegna un

- la *somma* e la *differenza* di due numeri costruibili a e b
- il *prodotto* di due numeri costruibili a e b
- il *reciproco* di un numero costruibile a
- la *radice quadrata* di un numero costruibile a

Costruzione 11: *Costruzione della somma di due numeri costruibili a e b*

Apri il file *Somma* e, utilizzando i comandi a disposizione, determina il punto della semiretta s tale che la lunghezza del segmento avente come estremi il punto A e il punto trovato sia pari alla somma delle lunghezze dei due segmenti BC e DE .

Costruzione 12: *Costruzione della differenza di due numeri costruibili a e b*

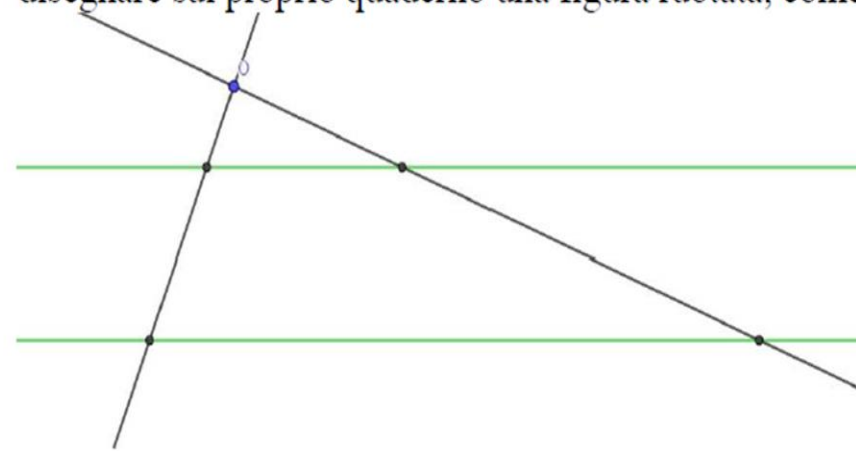
Apri il file *Differenza* e, utilizzando i comandi a disposizione, determina il

Costruzione 13: *Costruzione del prodotto di due numeri costruibili a e b*

Apri il file *Prodotto* e, utilizzando i comandi a disposizione, determina il punto appartenente al semiasse delle ascisse positive avente come ascissa x il prodotto delle lunghezze dei segmenti OB e OC .

Suggerimenti

- Costruisci gli assi cartesiani di cui viene data l'origine O degli assi e il punto di coordinate $A(0,1)$.
- Trasporta i segmenti OB e OC rispettivamente sull'asse x e sull'asse y e applica il teorema di Talete a due opportune rette parallele tagliate dagli assi cartesiani. Utilizza le proprietà delle proporzioni (proprietà del comporre) per concludere. Per capire dove far passare le due parallele può essere utile disegnare sul proprio quaderno una figura ruotata, come mostrato sotto



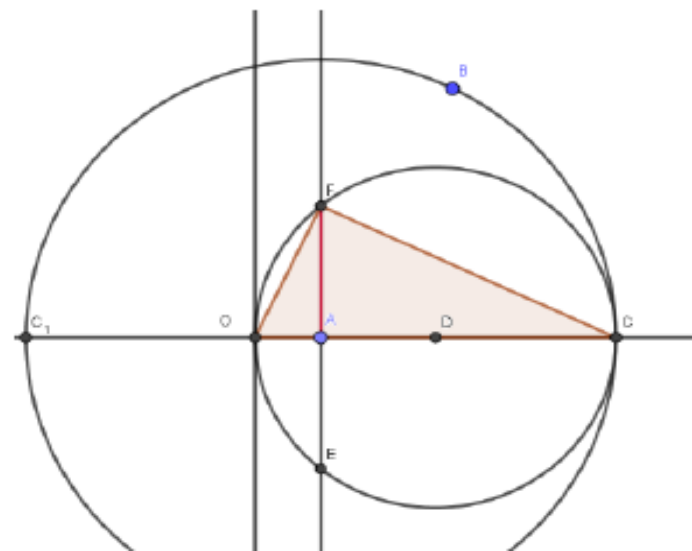
Costruzione 14: *Costruzione del reciproco di un numero costruibile a*

Costruzione 15: *Costruzione della radice quadrata di un numero costruibile a*

Apri il file *Radice quadrata* e, utilizzando i comandi a disposizione, determina il punto appartenente al semiasse delle ascisse positive avente come ascissa x la radice quadrata della lunghezza del segmento AB .

Suggerimenti

- Costruisci gli assi cartesiani di cui viene data l'origine O degli assi e il punto di coordinate $A(1,0)$.
- Costruisci un punto C a destra di A in modo che $AC=AB$.
- Costruisci un opportuno triangolo OFC a cui applicare il secondo teorema di Euclide (in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa).
- Per costruire il triangolo può essere utile ricordare le proprietà dei triangoli inscritti in una semicirconferenza.

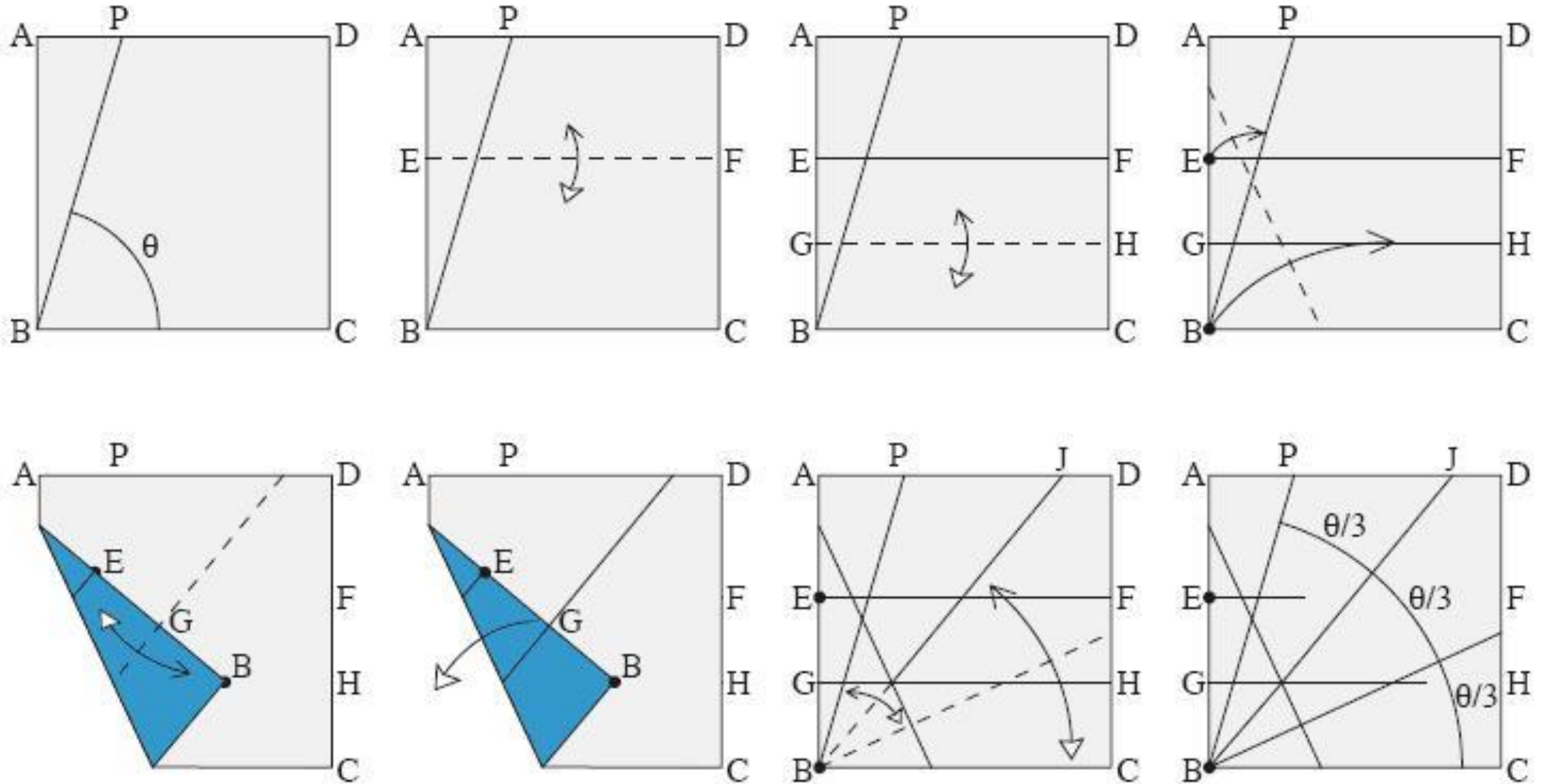


Dall'attività laboratoriale emerge

- ▶ che tutti i numeri razionali sono costruibili con riga e compasso
- ▶ se c_0 è un numero razionale positivo tale che $\sqrt{c_0} \in \mathbb{Q}$, allora tutti i numeri della forma $a + b\sqrt{c_0}$ (con $a, b \in \mathbb{Q}$) sono costruibili con riga e compasso e sono soluzioni di un'equazione quadratica a coefficienti razionali. Iterando la costruzione un opportuno numero di volte, è possibile generare nuovi numeri costruibili con riga e compasso (estensione del campo) che sono soluzioni di equazioni di grado 2^n a coefficienti razionali.

In generale, non è vero che un qualsiasi numero reale che risulti soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti razionali di grado m qualsiasi sia costruibile con riga e compasso.

La forza degli origami: trisecare l'angolo



2° Seminario: Risoluzione equazioni algebriche

Algebra e Geometria

Diofanto è il primo a introdurre simboli algebrici.

Linguaggio naturale, operazione,...	L
Isoi eisin (=sono eguali)	
Dynamis (=quadrato)	
Incognita	
Sottrazione	

Simboli per le potenze delle incognite

$x \rightarrow \zeta$ chiamata "il numero del problema"
 $x^2 \rightarrow \Delta Y$ "quadrato" o "potenza"
 $x^3 \rightarrow KY$ "cubo"
 $x^4 \rightarrow \Delta Y \Delta$ "quadrato-quadrato"
 $x^5 \rightarrow \Delta KY$ "quadrato-cubo"
 $x^6 \rightarrow KYK$ "cubo-cubo"

Poesie risoltrici

Nel 1500 si usava ancora il linguaggio naturale per esprimere le soluzioni di un'equazione di terzo grado:

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trovan dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai, questo per consueto
Che'l loro prodotto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi tuo generale
Detti lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale

era il modo in cui Tartaglia spiegava a Cardano il procedimento per risolvere l'equazione di terzo grado

$$x^3 + px = q$$

Disfide poetiche: Immagina di essere un matematico poeta...

IL SEGRETO DELLE EQUAZIONI

DI TERZO GRADO

Signori e signore, permettete di presentarmi al vostro cospetto:
Sarò la vostra guida in un viaggio pressoché perfetto!
Oh, mi sembra di vedere qui, sperduti, altri viandanti.
Vi andrebbe di visitare questa terra e i suoi abitanti?
Avrete sentito parlar di gnomoni e vi immaginate creature fatate
Questo è piuttosto il regno delle equazioni e delle radici quadrate.



Io sono la soluzione,
il primo uomo che conobbi è Scipione.

Se tu mi vuoi scovare

le due sorelle non devi separare.

Figlie della stessa madre,

in due momenti l'avete conosciute.

Ha un problema la minore?

Vien in soccorso la maggiore;

porta con sé uno gnomone:

un cubo di lato me e tre cuboide.

Casuali non sono le dimensioni:

fai meno tra due, dà il terzo e me

Le regole del gioco: risoluzione per radicali

RISOLUZIONE “PER RADICALI” DELL’EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

- Se $a \neq 0$, le soluzioni dell’equazione

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ sono } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ad esempio le soluzioni di $x^2 - 2x - 1 = 0$ sono $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

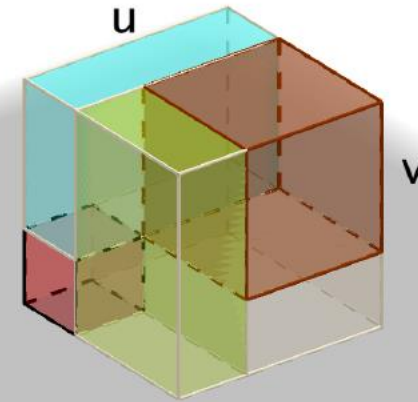
Le soluzioni dell’equazione di primo e secondo grado si trovano partendo dai coefficienti e combinandoli con somme, sottrazioni, estrazioni di radici.

Si dice che queste equazioni sono risolubili **per radicali**.

Algebra e geometria

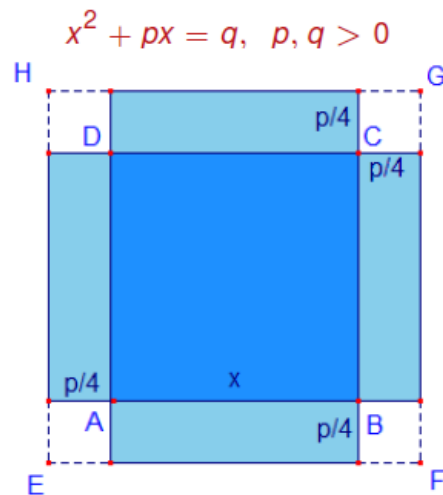
Ma il volume dello GNOMOIDE si può anche ottenere come differenza di due cubi:

$$x^3 + px = x^3 + 3uvx = u^3 - v^3$$



La Geometria aiuta la giovane Algebra

Per trovare le soluzioni positive di equazioni di secondo grado possiamo usare la g

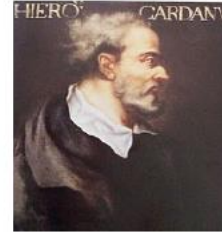


$$x^2 + px = q = \text{Area}(EFGH) - 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

I protagonisti della risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado

Equazioni di terzo grado

Entrano in scena nuovi personaggi:



Gerolamo Cardano (1501-1576), professore di matematica all' Università di Bologna;



Ludovico Ferrari (1522-1565), allievo di Cardano.

Equazioni di terzo grado

- Formule risolutive per l'equazione di terzo e quarto grado: pubblicate da Girolamo Cardano (1501-1576).
- La storia della scoperta di queste formule comincia con



Scipione del Ferro (1465-1526), professore di matematica all' Università di Bologna e il suo allievo [Antonio Maria Fior](#);



Niccolò Fontana (1500-1557), detto Tartaglia.

Equazioni di grado superiore al 4°: Il teorema di Abel-Ruffini

- Prendendo spunto dal corposo lavoro dei matematici che lo avevano preceduto, nel 1799 Ruffini pubblica una memoria in cui si afferma che non è possibile risolvere per radicali le equazioni di grado superiore al quarto.
- Ruffini mandò la sua memoria a molti matematici influenti ma vista l'importanza del risultato e la lunghezza della dimostrazione (più di 500 pagine) all'inizio il suo lavoro fu considerato con molto scetticismo e Ruffini non era priva di lacune.

- Niels Henrik Abel si interessò sin da giovanissimo tanto che durante gli studi universitari si concentrò sulla risoluzione di equazioni di grado superiore al quarto. Una volta capito che la formula era irrisolvibile cercò di dimostrare che in generale non è possibile.

- Nel 1824 pubblicò a sue spese una dimostrazione per radicali dell'equazione di V grado. Viaggiò molto e incontrò molti matematici che incontrava. Solo in pochi capitoli ottenne risultati e, ritornato in patria, morì di tubercolosi.

- Il Teorema di Abel-Ruffini non afferma che qualunque equazione di quinto grado non sia risolvibile per radicali, ma che esistono particolari equazioni di quinto grado non risolubili per radicali. Per esempio,

$$x^5 - x + 1 = 0$$

non è risolvibile per radicali, mentre

$$x^5 - x^4 - x + 1 = 0$$

lo è (anche se in generale le soluzioni sono troppo complesse per essere descritte facilmente...)

- Come distinguere equazioni risolubili per radicali da equazioni non risolubili in questo modo?



Évariste Galois
(giovanissimo!)

GRUPPI DI PERMUTAZIONI

Le permutazioni hanno delle interessanti proprietà:

- Se operiamo due permutazioni una dopo l'altra, otteniamo ancora una permutazione:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

+

$$\begin{pmatrix} b & a & d & c \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$$

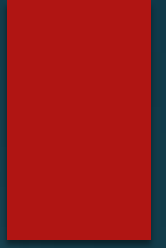
=

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$$

Conclusioni

- ▶ Le dimostrazioni di impossibilità sono difficili, ma possono essere comunque presentate
- ▶ Nella risoluzione dei problemi è fondamentale fissare le regole del gioco
- ▶ E' fondamentale stabilire quali strumenti abbiamo a disposizione per affrontare un problema
- ▶ Nella storia della matematica le dimostrazioni di impossibilità hanno spesso rappresentato dei punti di svolta fondamentali. Ad esempio, l'Entscheidungsproblem (Turing e Church) si pone in una situazione simile alle costruzioni con riga e compasso: quali problemi possiamo risolvere per via algoritmica?

Università di Udine & ISIS A. Malignani di Udine



A large, stylized handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Grazie', is positioned on the left side of the slide. The signature is written on a white background that is part of a larger graphic element.

**Antonella, Chiara,
Giovanna, Marzia
e Paolo**

antonella.mereu@malignani.ud.it

chiara.milan@malignani.ud.it

giovanna.dagostino@uniud.it

marzia.toso@malignani.ud.it

paolo.giangrandi@malignani.ud.it