APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: risolvi problemi, argomenta e dimostra
Problem solving sulle isometrie

Scheda docente (c1)

Introduzione
L'attività si propone, attraverso una serie di esercizi guidati, di richiamare e consolidare proprietà sulle simmetrie e sulla loro composizione, utilizzando anche il piano cartesiano.
Trattandosi di un'attività di approfondimento, suggeriamo di svolgere gli esercizi al triennio.

Prerequisiti
Simmetria assiale, piano cartesiano, composizione di simmetrie.

Spazi
Aula (in presenza o a distanza)

Tempo medio per svolgere l'attività in classe
Circa 2 ore (la durata può variare in base ai prerequisiti da richiamare)

Modalità
Le schede per gli studenti/esse sono indicative. Ciascuna scheda può essere usata come canovaccio, fornendo le informazioni necessarie per lo svolgimento delle attività in modo graduale e se richieste dalla classe. Oppure può essere data direttamente nelle mani degli studenti/esse così come formulata. Si consiglia comunque di far lavorare gli allievi/e a gruppi o quanto meno a coppie, in modo laboratoriale, lasciando loro il tempo di scoprire proprietà e di verificarle.

Illustriamo di seguito gli esercizi proposti con le soluzioni suggerite e alcune indicazioni per i docenti.

<u>SCHEDA 1</u> (APP_triennio_schede_stud_c1)

La scheda Studenti 1 vuole mettere in evidenza quali trasformazioni si ottengono con la composizione di due simmetrie e viceversa con quali simmetrie si ottiene una data trasformazione.

Ulteriori prerequisiti
Traslazione, rotazione e simmetria centrale.

Obiettivo specifico della scheda
Questa attività rappresenta un lavoro di preparazione allo svolgimento della scheda Studenti 2 (APP_triennio_schede_stud_c1)

1. Verifica che componendo tra loro due simmetrie con assi paralleli e distinti si ottiene una traslazione.

2. Verifica che componendo tra loro due simmetrie ad assi incidenti si ottiene una rotazione.
3. Cosa si ottiene componendo una rotazione di 90° intorno all'origine con una rotazione di 90° intorno al punto di coordinate (1;0)? Spiega il perché della tua risposta.

SOLUZIONE

1. La composizione di due simmetrie assiali con gli assi paralleli e distinti equivale ad una traslazione di un vettore di direzione perpendicolare agli assi, con il verso dal primo al secondo asse, e modulo doppio della loro distanza. Se i due assi coincidono si ottiene l'identità.

2. La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti equivale ad una rotazione avente centro nel punto di intersezione degli assi ed ampiezza doppia dell'angolo da essi formato. Come conseguenza di quanto detto, anche la composizione di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari equivale ad una rotazione di un angolo piatto, cioè ad una simmetria centrale.

A questo punto la classe deve arrivare alla conclusione, eventualmente aiutandosi con un software di geometria dinamica (es.: GeoGebra), che una traslazione di vettore $\vec{AB}$, si ottiene componendo nell'ordine due simmetrie di assi paralleli *r* ed *s*, che hanno tra loro distanza $\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\right|$, direzione perpendicolare ad $\vec{AB}$ e verso che va da *r* ad *s*.

Analogamente deve comprendere che una rotazione di angolo α si ottiene componendo nell'ordine due simmetrie di assi incidenti *r* ed *s*, che hanno tra loro angolo $\frac{1}{2}\alpha$ e verso che va da *r* ad *s*.

La scelta dei due assi è arbitraria e, in particolare nel problema successivo, è essenziale fare in modo che si facciano coincidere due degli assi di simmetria scelti per produrre le due rotazioni in questione.

3. Possiamo condurre la classe ad ottenere la prima rotazione componendo nell'ordine la simmetria rispetto alla retta $y = -x$ e la simmetria rispetto all'asse *x*. La seconda rotazione si può ottenere come composizione della simmetria rispetto all'asse *x* con la simmetria rispetto alla retta $y = \sqrt{3}(x - 1)$ che passa per $(1; 0)$ e forma un angolo di 60° con l'asse *x*. Le due simmetrie rispetto all'asse *x* si annullano a vicenda, rimangono le due simmetrie rispetto a $y = -x$ e a $y = \sqrt{3}(x - 1)$, che si intersecano in $C\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)$ e formano fra loro un angolo di 75°. La rotazione prodotto è dunque di 150° intorno a *C*.

È importante far notare agli studenti/esse che la composizione di due rotazioni di centri diversi è ancora una rotazione di angolo pari alla somma degli angoli delle due rotazioni date e il cui centro si determina dall'intersezione delle due simmetrie che la determinano.

<u>SCHEDA 2</u> (APP_triennio_schede_stud_c1)

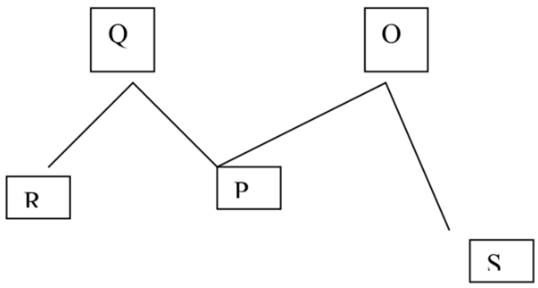
Questa scheda presenta un problema non molto noto e di cui si trovano soluzioni con l'uso dei numeri complessi o della geometria euclidea. In questo caso si propone una soluzione con l'uso delle trasformazioni geometriche.

Ulteriori prerequisiti
Simmetria centrale, rotazione. Il punto 3 della scheda Studenti 1 risulta propedeutico alla soluzione di questo problema, sebbene in questo caso la situazione sia più semplice in quanto si tratta di comporre due rotazioni ciascuna di angolo pari a 90°. La loro composizione è una rotazione di angolo 180°, cioè una simmetria centrale.

Obiettivi specifici della scheda
Matematizzare una situazione "reale" in termini di trasformazioni geometriche, esprimere la propria ipotesi e dimostrarla usando le trasformazioni geometriche.

Ho trovato un messaggio in una bottiglia: "Sull'isola di Pao-pao[1] cerca il pozzo, da lì conta i passi fino alla quercia, gira a sinistra di 90° e conta un ugual numero di passi, fino al punto *R*; torna al pozzo e da lì vai fino all'olmo, gira a destra di 90°, conta un ugual numero di passi fino al punto *S*. A metà tra *R* e *S* troverai il tesoro." Vado nell'isola di Pao-pao, ma del pozzo non c'è più traccia. Ci sono ancora la quercia e l'olmo. Riuscirò a trovare il tesoro?

SOLUZIONE



La situazione è quella rappresentata in figura. Partiamo dal punto *R*: esso è sottoposto prima ad una rotazione di 90° intorno a *Q* (fino a *P*) e successivamente ad una rotazione di 90° intorno a *O* (fino a *S*). Il prodotto di due rotazioni di 90° è una simmetria centrale (indipendentemente dal singolo punto ruotato) che ha un punto unito. È dunque sufficiente scegliere un qualunque "pozzo" e trovare il punto unito della simmetria centrale come punto medio tra *S* e *R* (una rotazione di 90° intorno ad un punto *C* è data dal prodotto di due qualunque simmetrie i cui assi si intersecano in *C* e formano fra loro 45°. Siano *r* e *s* tali assi, *u* e *v* gli assi della seconda rotazione; se si fa coincidere *s* con *u* – le corrispondenti simmetrie si annullano a vicenda – rimane il prodotto di *r* e *v* che, formando tra loro 90°, danno luogo ad una rotazione di 180°, ovvero ad una simmetria centrale).

[1] Esiste veramente un'isola di Pao-pao, nella Polinesia francese, abitata da circa 5000 persone.