APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: risolvi problemi, argomenta e dimostra

IP^3
isometrie per … definire
isometrie per … dimostrare
isometrie per … risolvere

Scheda docente (c2)

Introduzione
In questo percorso, diviso in diverse fasi, si mettono a confronto la geometria euclidea classica e la geometria delle isometrie rispetto a definizioni, dimostrazioni, risoluzioni di problemi, decorazioni (Arte).
Riteniamo importante far osservare agli studenti e alle studentesse che la geometria può essere affrontata anche in modo diverso da quello di Euclide e non solo nell'ambito interno alla matematica.
Dal momento che la realtà ci fornisce tante occasioni per osservare la matematica intorno a noi, abbiamo pensato ad un percorso che aiutasse gli studenti a guardare nelle varie direzioni con un occhio più attento all'aspetto matematico. Le trasformazioni appartengono a pieno titolo alla realtà che ci circonda, ma il vero problema è che spesso non le vediamo.

Obiettivi
- far Comprendere attraverso esempi significativi che argomentare e dimostrare utilizzando le isometrie, quando il problema o il teorema si presta a farlo, può rappresentare una semplificazione notevole;
- abituare gli studenti e le studentesse a "cambiare punto di vista". La vita quotidiana ci pone davanti problemi, questioni complesse che comportano strategie diverse di approccio con conseguenze diverse nelle applicazioni. Risolvere problemi non è infatti solo una competenza disciplinare della matematica ma una competenza chiave di cittadinanza.

Prerequisiti
Isometrie e loro proprietà

Spazi
laboratorio di informatica

Software usato
GeoGebra

Tempo medio per svolgere l'attività in classe
un'ora per attività

Modalità
Modalità laboratoriale a coppie o singola

Descrizione dell’attività.

In questo percorso, diviso in diverse fasi, si mettono a confronto la geometria euclidea classica e la geometria delle isometrie rispetto a definizioni (Fase 1), dimostrazioni (Fase 2), risoluzioni di problemi (Fase 3).

<u>FASE 1</u>. La definizione è una scelta: Geometria Euclidea Classica o Geometria delle Isometrie?

Si danno due diverse definizioni di parallelogramma e si fa osservare come sia possibile scambiare quella che prima era una proprietà con una definizione e viceversa. Attività analoghe si possono proporre sul triangolo.

Geometria Euclidea	Geometria delle trasformazioni
Definizione parallelogramma *Il parallelogramma è un quadrilatero convesso che ha i lati opposti paralleli*	**Definizione parallelogramma** *Il parallelogramma è un quadrilatero convesso con un centro di simmetria*
Proprietà del parallelogramma ● due lati opposti sono congruenti ● i lati opposti sono congruenti ● gli angoli opposti sono congruenti ● gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari ● ogni diagonale lo divide in due triangoli congruenti ● le diagonali si incontrano nel loro punto medio ● ***c'è un centro di simmetria***	**Proprietà del parallelogramma** ● due lati opposti sono congruenti ● i lati opposti sono congruenti ● gli angoli opposti sono congruenti ● gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari ● ogni diagonale lo divide in due triangoli congruenti ● le diagonali si incontrano nel loro punto medio ● ***i lati opposti sono paralleli***

Vedi la scheda APP_ip3_scheda_stud_c2 e Scheda Studenti 2(c2) dal titolo: **La dimostrazione**

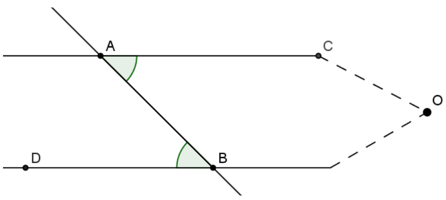
Una analoga scheda per gli studenti si può predisporre, per esempio, per i triangoli isosceli (vedi tabella a seguire).

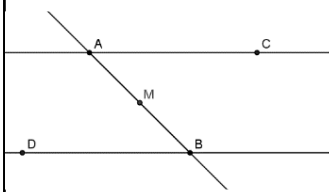
Geometria Euclidea	Geometria delle trasformazioni
Definizione triangolo isoscele *Diciamo isoscele un triangolo che ha (almeno) due lati uguali.*	**Definizione triangolo isoscele** *Diciamo isoscele un triangolo che ha (almeno) un asse di simmetria.*
Proprietà del triangolo isoscele ● Un triangolo isoscele ha un asse di simmetria ● Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali ● In un triangolo isoscele, altezza, mediana, bisettrice e asse relative alla base coincidono.	**Proprietà del triangolo isoscele** ● Un triangolo isoscele ha due lati uguali ● Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali. ● L'asse di simmetria contiene altezza relativa alla base, mediana relativa alla base e bisettrice dell'angolo al vertice

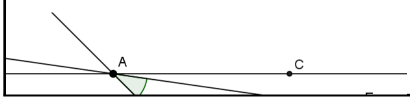
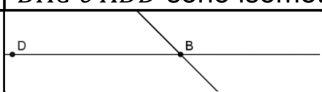
Un'analoga attività si può proporre per i triangoli equilateri (tre lati uguali/tre assi di simmetria). Per i triangoli scaleni non è possibile costruire una analoga attività, ma si può far osservare agli studenti che non presenta assi di simmetria.

<u>FASE 2</u>. La dimostrazione è una scelta: Geometria Euclidea Classica o Geometria delle Isometrie?

Si confrontano le due metodologie su dimostrazioni che riguardano “rette parallele tagliate da trasversale”. A seguire le due dimostrazioni proposte.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Teorema
Se due rette di un piano tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni uguali allora le due rette sono parallele</td></tr>
<tr><td>Geometria Euclidea</td><td>Geometria delle Trasformazioni</td></tr>
<tr><td>Ipotesi.
Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni interni isometrici.
Tesi.
AC parallela a BD</td><td>Ipotesi.
Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni interni isometrici.
Tesi.
AC parallela a BD</td></tr>
<tr><td>Dimostrazione


Dimostriamo che retta AC è parallela alla retta BD.
<u>Ragioniamo per assurdo</u>. Neghiamo la tesi. Supponiamo che le rette AC e BD non siano parallele. Ciò vuol dire che si incontrano in un punto, che chiamiamo O, che con A e con B forma il triangolo AOB. Il triangolo AOB ha allora un angolo interno $B\hat{A}C$ uguale per ipotesi, ad un angolo esterno $A\hat{B}D$. Poiché siamo caduti in contraddizione, ne segue che la retta AC è parallela alla retta BD.</td><td>Dimostrazione


Sia M il punto medio del segmento AB.
<u>Nella simmetria di centro M</u>,
● ad A corrisponde B;
● alla semiretta AB corrisponde la semiretta BA;
● all’angolo$A\hat{B}D$ corrisponde un angolo isometrico ad esso nel semipiano opposto rispetto alla semiretta AB e con vertice in A, cioè $B\hat{A}C$.
Ne segue che a BD corrisponde AC e quindi sono parallele.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Teorema
Due rette parallele formano con una qualunque trasversale angoli alterni interni uguali</td></tr>
<tr><td align="center">Geometria Euclidea</td><td align="center">Geometria delle Trasformazioni</td></tr>
<tr><td>Ipotesi
Siano AC e BD due rette parallele, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni interni.
Tesi
$B\hat{A}C = A\hat{B}D$</td><td>Ipotesi
Siano AC e BD due rette parallele, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni interni.
Tesi
$B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ sono isometrici</td></tr>
<tr><td>Dimostrazione
<u>Ragioniamo per assurdo</u>, neghiamo la tesi, supponiamo cioè che

</td><td>

Sia M il punto medio del segmento AB.</td></tr>
</table>

$B\hat{A}C \neq A\hat{B}D$ e in particolare supponiamo che $B\hat{A}C > A\hat{B}D$. Allora possiamo dire che esiste una semiretta AE interna a $B\hat{A}C$ tale che $B\hat{A}E$= $A\hat{B}D$. Ne segue, per il teorema precedente, che la retta AE è parallela alla retta BD. Quindi dal punto A passano due rette entrambe parallele alla stessa retta BD. Il che contraddice il postulato di Euclide. Si arriva alla stessa conclusione se si suppone che $B\hat{A}C < A\hat{B}D$. Ne segue che entrambe le proposizioni $B\hat{A}C > A\hat{B}D$ e $B\hat{A}C < A\hat{B}D$ sono false perché conducono a contraddizioni e pertanto $B\hat{A}C = A\hat{B}D$.	<u>Nella simmetria di centro M,</u> ● ad A corrisponde B; ● alla semiretta AB corrisponde la semiretta BA; ● alla semiretta AC corrisponde la semiretta passante per B e ad essa parallela, cioè BD; Quindi gli angoli $M\hat{A}C$ e $M\hat{B}D$ si corrispondono e pertanto sono isometrici.

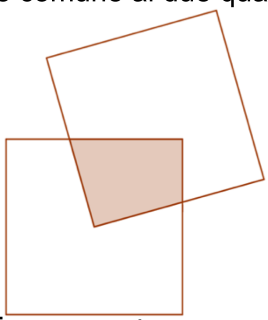
Vedi APP_ip3_scheda_stud_c2 Scheda Studenti 2(c2):dal titolo: **La dimostrazione**

<u>FASE 3</u>. La strategia risolutiva di un problema è una scelta: Geometria Euclidea Classica o Geometria delle Isometrie?

Si confrontano le due metodologie sulla strategia risolutiva di un problema. A seguire le due proposte.

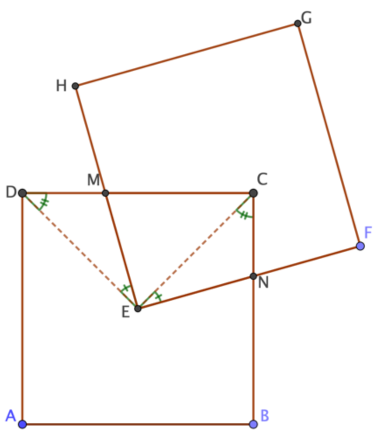
Problema

Due quadrati di lato lungo 8 sono disposti in modo che il vertice di uno coincida col centro dell’altro. Quanto vale l’area della parte comune ai due quadrati?



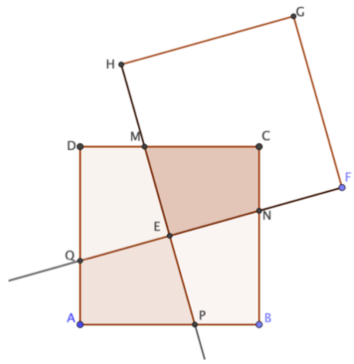
Geometria Euclidea

Siano ABCD e EFGH i due quadrati con E centro del primo. M ed N sono i punti d’intersezione dei lati EH e EF rispettivamente con CD e BC. I due triangoli EDM e ECN sono uguali per il secondo criterio di uguaglianza per avere ED = EC, perché entrambi metà delle diagonali del quadrato, $E\hat{D}M = E\hat{C}N = 45°$, $D\hat{E}M = C\hat{E}N$ perché differenza di angoli uguali. Ne segue che il quadrilatero EMCN di cui è richiesta l’area è equivalente al triangolo EDC, cioè ad un quarto del quadrato ABCD. Pertanto, la parte comune ai due quadrilateri ha area 64:4 = 16.



Geometria delle Trasformazioni (Klein)

Siano ABCD e EFGH i due quadrati con E centro del primo. Tracciamo le semirette HE e FE e siano rispettivamente M e P, N e Q le loro intersezioni con i lati di ABCD. La rotazione di centro E e angolo 90° porta N in M e ENCM in EMDQ, M in Q e EMDQ in EQAP, Q in P e EQAP in EPBN. Pertanto, ognuno di questi quadrilateri è un quarto del quadrato e l’area della parte comune ai due quadrati è 16.



È opportuno fare osservare che l’area della parte comune non dipende dalla posizione reciproca dei due quadrati ma è sempre la stessa anche se ruotiamo il secondo quadrato intorno a E.

Vedi APP_ip3_scheda_stud_2c Scheda Studenti 3(2c) dal titolo: **Il problema del quadrato**