

# APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: Esplora e congettura

## Alla scoperta delle isometrie 3D

### Scheda studente 1(a): La simmetria planare; proprietà (lo specchio piano)

---

Apri GeoGebra (è consigliata la versione 5 classica), apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Menu Opzioni>Salva impostazioni).

Apriamo la casella di strumenti *Trasformazioni dello spazio* (nella vista Grafici 3D). Osserviamo che la prima trasformazione presente è la *Simmetria planare* (detta anche *Riflessione rispetto a un piano*).

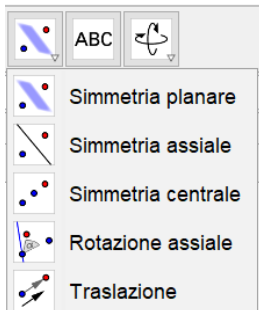





Figura 1 - Isometrie 3D presenti nella casella di strumenti "Trasformazioni" della vista Grafici 3D di GeoGebra (vers.5 Classica).

- Disegna con GeoGebra un piano  $p$ ; usa lo strumento *Piano – per tre punti* 
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare)  $ABCD$  con lo strumento *Piramide* 
- Utilizzando il comando *Simmetria planare*  disegna la piramide  $A'B'C'D'$  simmetrica di  $ABCD$  rispetto al piano  $p$  (vedi figura 2).
- Le due piramidi così ottenute si dicono simmetriche rispetto al piano  $p$ .
- Costruisci ora con un cartoncino la piramide  $ABCD$  e con uno specchio piano visualizza l'immagine di questa piramide che si forma nello specchio.
- Osserva che se, per esempio, su una faccia della piramide scrivi in maiuscolo la parola OUT nell'immagine ottenuta si forma la parola (scrivi in stampatello maiuscolo).....

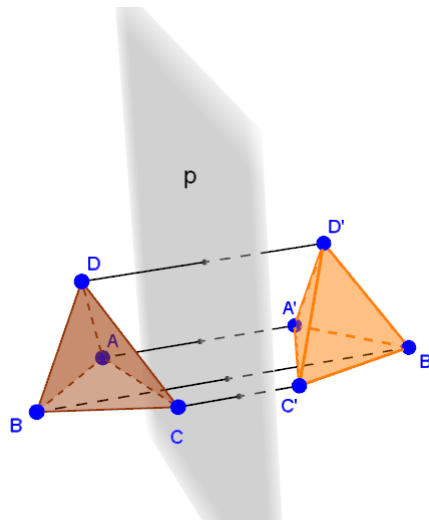


Figura 2

Quanto hai visto permette di comprendere una proprietà fondamentale delle simmetrie planari: esse cambiano l'ordine delle lettere in una parola e capovolgono l'ordinamento nello spazio.

L'immagine della mano destra tramite una simmetria planare (specchio piano) è ..... la mano.....



Figura 3 - Immagine da Internet (ritratto dello scrittore H. Murakami)

Tramite una *Simmetria planare* una retta si trasforma in una .....

Tramite una *Simmetria planare* un piano si trasforma in un .....

Tramite una *Simmetria planare* un triangolo ABC (orientato in verso antiorario) si trasforma in un ..... (isometrico ad ABC). orientato in verso.....

Un tetraedro ABCD orientato in verso destrorso (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro A'B'C'D' (isometrico a quello di partenza) orientato in verso sinistorso.

Ci sono punti che rimangono fissi (o uniti) nella simmetria planare? Quali sono?.....

Ci sono rette che rimangono fisse (o unite) nella simmetria planare? Quali sono?.....

Ci sono rette che si trasformano in se stesse nella simmetria planare? Quali sono?.....

Ci sono piani che rimangono fissi (o uniti) nella simmetria planare? Quali sono?.....

Se applichi due volte di seguito una simmetria planare quale trasformazione si ottiene?.....  
.....

La simmetria planare (o riflessione rispetto a un piano) è una trasformazione che capovolge l'ordinamento dello spazio; per questo viene detta *dispari*. Questa trasformazione geometrica dello spazio viene realizzata facilmente usando uno specchio piano.

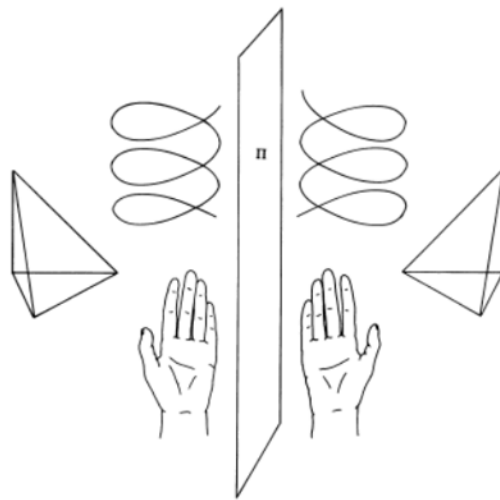





Figura 4-La simmetria planare è dispari.

## Scheda studente 2(a): La simmetria assiale 3D (rotazione di 180° attorno a una retta nello spazio)

---

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

- Disegna con GeoGebra una retta  $r$ ; usa lo strumento *Retta*  nella casella di strumenti di Grafici 3D
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare)  $ABCD$  con lo strumento *Piramide* .
- Utilizzando il comando *Simmetria assiale*  disegna la piramide  $A'B'C'D'$  simmetrica di  $ABCD$  rispetto alla retta  $r$ .
- Le due piramidi ottenute si dicono simmetriche rispetto alla retta  $r$  (vedi figura 5).

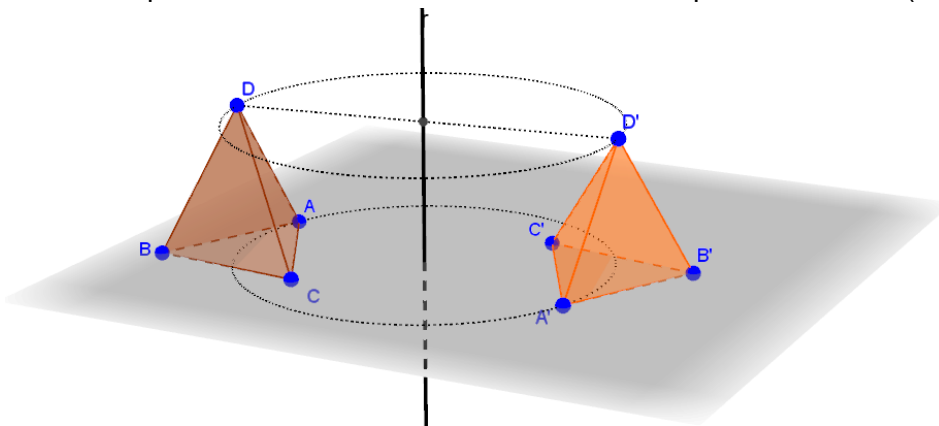


Figura 5

Quanto hai visto permette di comprendere una proprietà fondamentale delle simmetrie assiali (3D): esse non sono altro che delle rotazioni di 180° attorno a una retta data.

Stando in piedi, fai una rotazione di 180° (di solito questo si chiama un “dietro front”).

Tramite una *Simmetria assiale* l’immagine della mano destra è la mano .....

Tramite una *Simmetria assiale* una retta si trasforma in una .....

Tramite una *Simmetria assiale* un piano si trasforma in un .....

Tramite una *Simmetria assiale* un triangolo  $ABC$  (orientato in verso antiorario) si trasforma in un ..... (isometrico ad  $ABC$ ). orientato in verso.....

Tramite una *Simmetria assiale* un tetraedro orientato in verso destrorso  $ABCD$  (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro  $A'B'C'D'$  (isometrico a quello di partenza) orientato nello stesso verso.

Ci sono punti che rimangono fissi (o uniti) nella simmetria assiale 3D? Quali sono?.....

Ci sono rette che rimangono fisse (o unite) nella simmetria assiale 3D? Quali sono?.....

Ci sono piani che rimangono fissi (o uniti) nella simmetria assiale 3D? Quali sono?.....



La simmetria assiale 3D (o rotazione di  $180^\circ$  attorno a una retta) è una trasformazione che mantiene lo stesso ordinamento; per questo viene detta una isometria *pari*.

La rotazione di  $180^\circ$  attorno a una retta viene per esempio realizzata quando giri la pagina di un quaderno per scrivere sul retro del foglio e in tante altre situazioni concrete. Sai descriverne qualcuna?

.....  
.....  
.....  
.....

## Scheda studente 3(a): La simmetria centrale 3D

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

- Disegna con GeoGebra un punto  $O$ ; usa lo strumento *Punto*  nella casella di strumenti di Grafici 3D
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare)  $ABCD$  con lo strumento *Piramide* .
- Utilizzando il comando *Simmetria centrale* disegna la piramide  $A'B'C'D'$ , simmetrica di  $ABCD$  rispetto al punto  $O$  (Figura 6).
- Le due piramidi ottenute si dicono simmetriche (centralmente) rispetto al punto  $O$ .

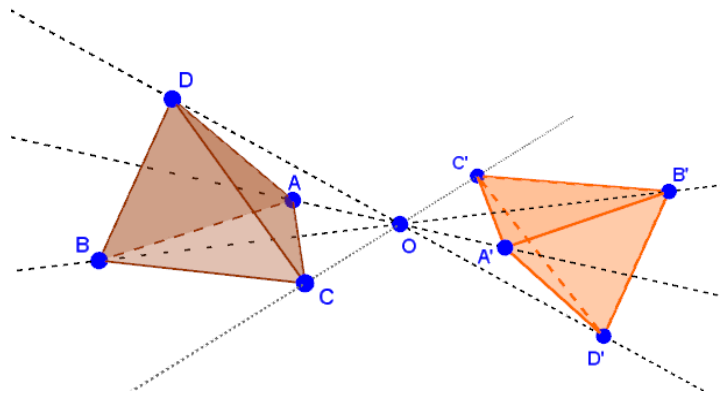


Figura 6

Quanto hai visto permette di comprendere una proprietà fondamentale delle simmetrie centrali (3D): esse sono diverse dalle simmetrie centrali nel piano.

Rispetto a una *Simmetria centrale* (3D) l'immagine della mano destra rispetto al punto  $O$  (nello spazio) è la mano .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) una retta si trasforma in una .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) un piano si trasforma in un .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) una retta passante per il centro di simmetria si trasforma in .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) un piano passante per il centro di simmetria si trasforma in .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) un triangolo  $ABC$  (orientato in verso antiorario) si trasforma in un ..... (isometrico ad  $ABC$ ), orientato in verso.....




Un tetraedro ABCD orientato in verso destrorso (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro A'B'C'D' orientato in modo sinistrorso (isometrico a quello di partenza), ossia orientato in verso opposto nello spazio.

Una simmetria centrale (3D) è una trasformazione che capovolge l'orientamento; per questo viene detta una trasformazione *dispari*.

Nello spazio riferito a un sistema di assi ortogonali Oxyz il punto A di coordinate  $(x, y, z)$ , nella simmetria centrale di centro l'origine O degli assi, si trasforma nel punto A' di coordinate  $(-x, -y, -z)$ .

## Scheda studente 4(a): La traslazione 3D

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

- Disegna con GeoGebra un vettore  $v$ ; usa lo strumento *Vettore*  nella casella di strumenti di Grafici 3D
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare)  $ABCD$  con lo strumento *Piramide* .
- Utilizzando lo strumento *Traslazione*  disegna la piramide  $A'B'C'D'$  ottenuta traslando la piramide  $ABCD$  con il vettore  $v$  (Figura 7).
- Le due piramidi ottenute si dicono traslate, una rispetto all'altra, tramite il vettore  $v$  (o il suo opposto).

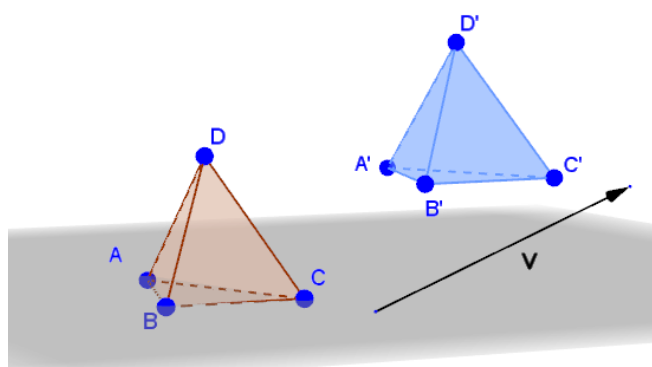


Figura 7

Quanto hai visto permette di comprendere le proprietà delle traslazioni nello spazio.

Le traslazioni nello spazio (3D) sono del tutto analoghe a quelle viste nel piano.

L'immagine della mano destra è ..... la mano.....

Tramite una *Traslazione* (3D) una retta si trasforma in .....

Tramite una *Traslazione* (3D) un piano si trasforma in .....

Un triangolo  $ABC$  (orientato in verso antiorario) si trasforma in un ..... (isometrico ad  $ABC$ ). orientato in verso.....




Un tetraedro  $ABCD$  orientato in verso destrorso (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro  $A'B'C'D'$  (isometrico a quello di partenza), orientato nello stesso verso.

La traslazione 3D è una trasformazione che mantiene lo stesso ordinamento; per questo viene detta *pari*.



## Scheda studente 5(a): La rotazione assiale 3D (rotazione di un angolo $\alpha$ attorno a una retta $r$ nello spazio)

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

- Disegna con GeoGebra una retta  $r$ ; usa lo strumento *Retta*  nella casella di strumenti di Grafici 3D
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare)  $ABCD$  con lo strumento *Piramide*  .
- Utilizzando il comando *Rotazione assiale*  disegna la piramide  $A'B'C'D'$  ottenuta dalla rotazione della piramide  $ABCD$  attorno alla retta  $r$  di un angolo  $\alpha$  (Figura 8).

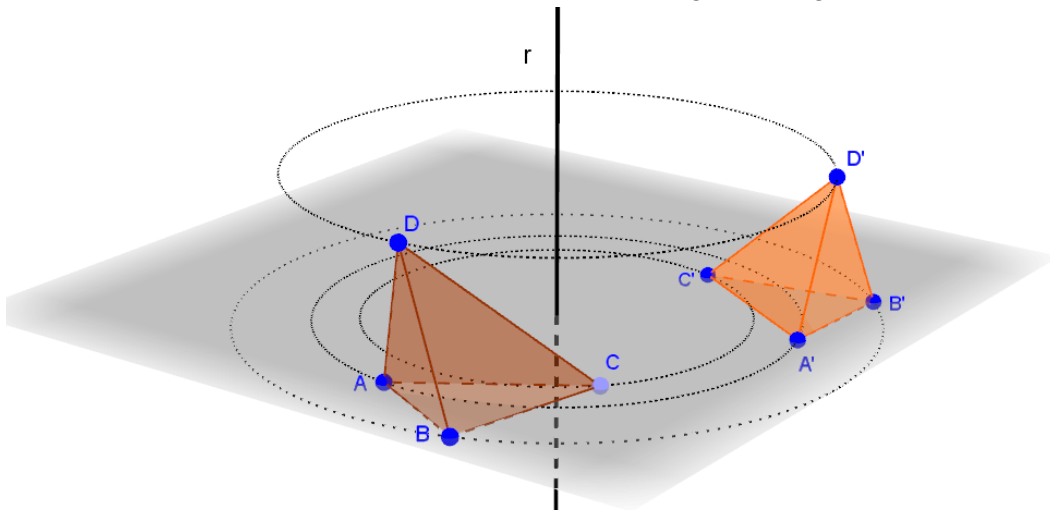


Figura 8

Quanto hai visto con GeoGebra permette di comprendere le proprietà fondamentali delle rotazioni assiali (3D): esse non sono altro che rotazioni dello spazio di un angolo  $\alpha$  attorno a una retta  $r$  data.

Stando in piedi, fai una rotazione di  $60^\circ$  verso sinistra.

Stando in piedi, fai una rotazione di  $90^\circ$  verso destra.

Tramite una *Rotazione assiale* (3D) l'immagine della mano destra è ..... la mano.....

Tramite una *Rotazione assiale* (3D) una retta si trasforma in .....

Tramite una *Rotazione assiale* (3D) un piano si trasforma in .....

Un triangolo  $ABC$  (orientato in verso antiorario) si trasforma in un ..... (isometrico ad  $ABC$ ). orientato in verso.....

Un tetraedro ABCD orientato in modo destrorso (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro A'B'C'D' (isometrico a quello di partenza), orientato nello stesso modo.

La rotazione assiale 3D (o rotazione di  $\alpha$  attorno a una retta  $r$ ) è una trasformazione che mantiene lo stesso ordinamento; per questo viene detta *pari*.

La rotazione di un angolo  $\alpha$  attorno a una retta viene per esempio realizzata quando apri (o chiudi) una porta (rotazione attorno all'asse rappresentato dalla retta passante per gli stipiti) o in tante altre situazioni del mondo reale.