APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: Scopri, classifica, generalizza
Composizione di isometrie 3D e loro classificazione

Scheda studente 1(a): Composizione di due simmetrie planari con piani paralleli

---

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D (è preferibile usare la versione 5 classica), nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Menu Opzioni>Salva impostazioni).
Apriamo la casella di strumenti *Trasformazioni dello spazio* (nella vista Grafici 3D). Osserviamo che la prima trasformazione presente è la *Simmetria planare* (detta anche *Riflessione rispetto a un piano*).

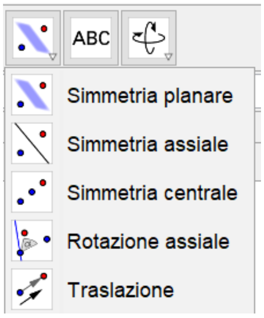
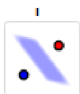


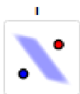
Figura 1 - Isometrie 3D presenti nella casella di strumenti “Trasformazioni” della vista Grafici 3D di GeoGebra.

☐ Disegna con GeoGebra un piano *p*; usa lo strumento *Piano – per tre punti* 

☐ Disegna con GeoGebra un secondo piano *q*, parallelo al piano *p.*

☐ Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare) *ABCD* con lo strumento *Piramide*  .

☐ Utilizzando il comando *Simmetria planare*  disegna la piramide A’B’C’D’ simmetrica di ABCD rispetto al piano *p* (vedi figura 2).

☐ Utilizzando il comando *Simmetria planare*  disegna la piramide A’’B’’C’’D’’ simmetrica di A’B’C’D’ rispetto al piano *q* (vedi figura 2).

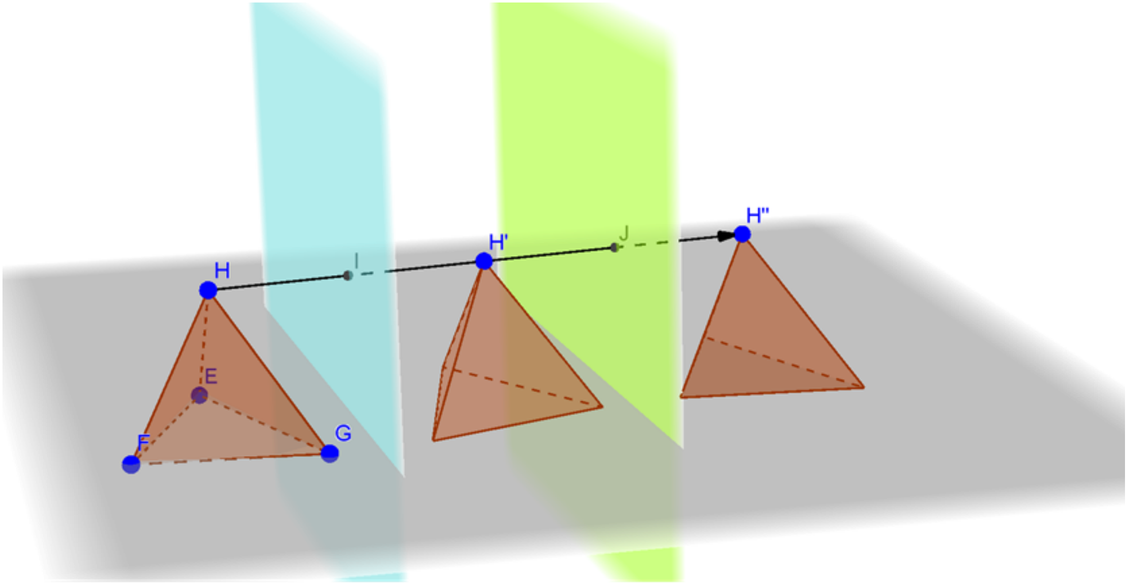


Figura 2

- Osserva che le due piramidi ABCD e A''B''C''D'' (figura 2) così ottenute si corrispondono in una traslazione di vettore *v* che ha una direzione perpendicolare ai due piani di simmetria, verso dal piano *p* al piano *q* e modulo il doppio della distanza tra il piano *p* e il piano *q*.

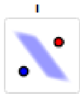
Scheda studente 2(a): Composizione di due simmetrie planari con piani incidenti

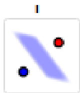
Apri GeoGebra (è preferibile usare la versione 5 classica), apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

☐ Disegna con GeoGebra un piano *p*; usa lo strumento *Piano – per tre punti* 

☐ Disegna con GeoGebra un secondo piano *q*, parallelo al piano *p.*

☐ Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare) *ABCD* con lo strumento *Piramide*  .

☐ Utilizzando il comando *Simmetria planare*  disegna la piramide A'B'C'D' simmetrica di ABCD rispetto al piano *p* (vedi figura 3).

☐ Utilizzando il comando *Simmetria planare*  disegna la piramide A''B''C''D'' simmetrica di A'B'C'D' rispetto al piano *q* (vedi figura 3).

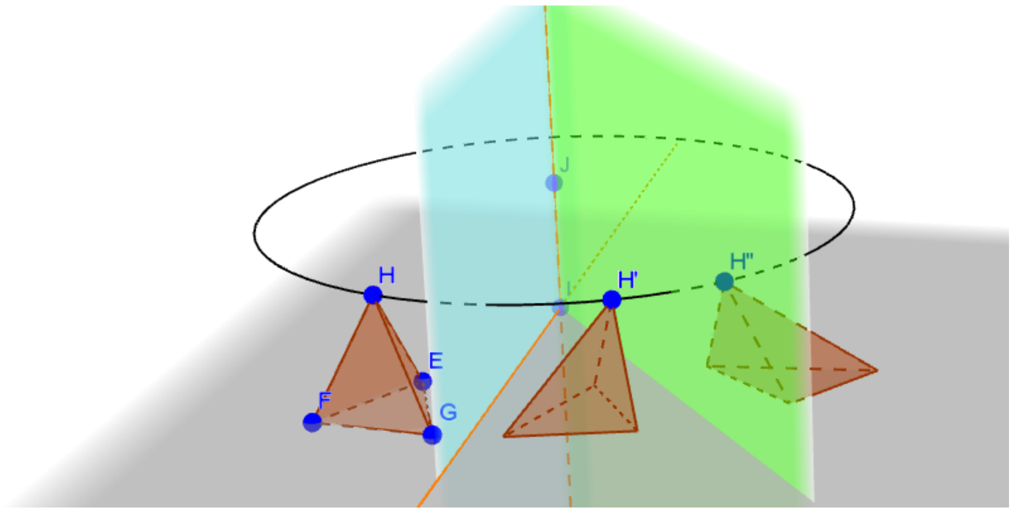


Figura 3

☐ Osserva che le due piramidi ABCD e A''B''C''D'' (figura 3) così ottenute si corrispondono dunque in una rotazione attorno alla retta *r* intersezione dei due piani di simmetria, verso (antiorario) dal piano *p* al piano *q* e di angolo doppio rispetto all'angolo diedro formato dai piani *p* e *q*.

Scheda studente 3(a): Composizione di tre simmetrie planari con piani incidenti

Apri GeoGebra (versione 5 classica), apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

Vogliamo esaminare la composizione di tre simmetrie planari rispetto a tre piani dati *p*, *q* ed *s.*

1° caso

Se i tre piani *p*, *q* ed *s* appartengono a un medesimo fascio proprio, allora si ottiene come composizione un'unica simmetria planare ottenuta dalla composizione di una rotazione attorno a una retta seguita da una simmetria planare.

Se i due piani *p*, *q* si intersecano nella retta *r* e il piano *s* interseca entrambi i piani *p* e *q*, si può verificare che ci si può ricondurre alla composizione di una rotazione attorno alla retta *r* e dalla simmetria planare rispetto ad un piano perpendicolare alla retta *r.*

Si ottiene pertanto una *roto-simmetria* (figura 4).

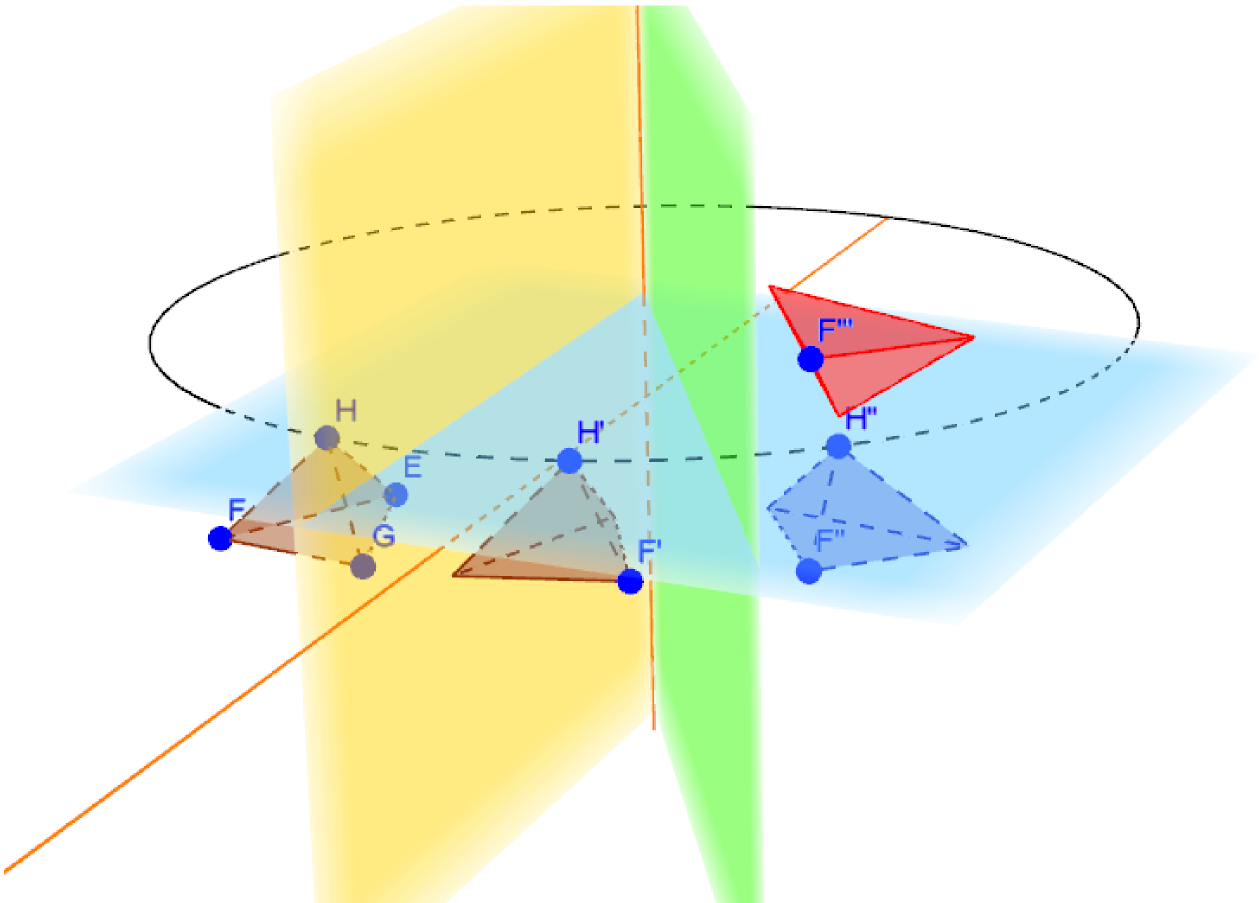


Figura 4

La composizione si comprende meglio osservando lo schema della figura 5.

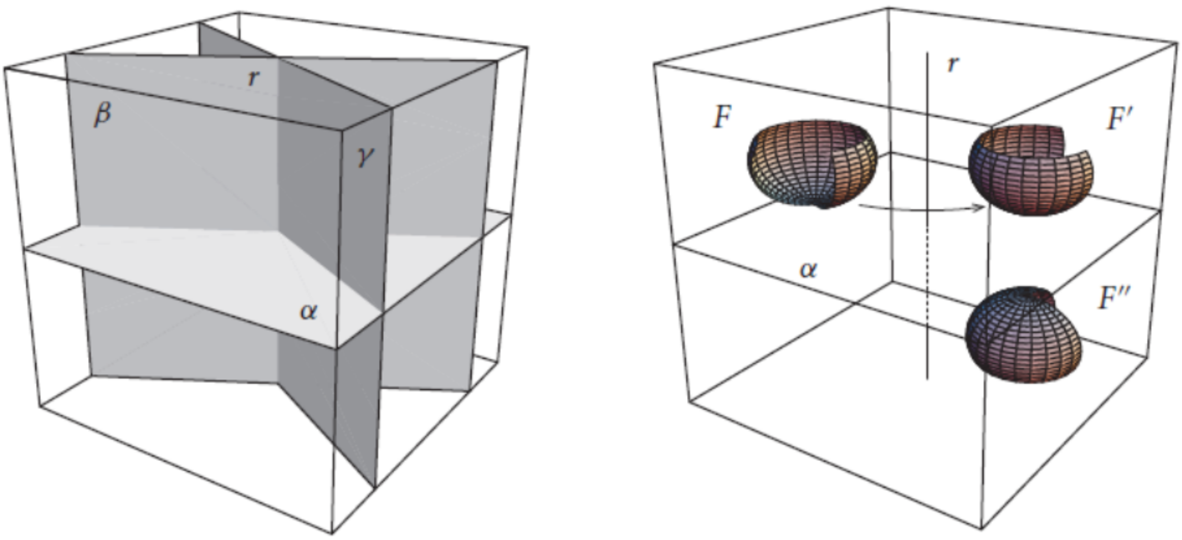


Figura 5 - Roto-simmetria (figura dal libro M. Dedò, *Forme*, Decibel, Padova)

Come caso particolare di questa trasformazione si può ottenere la simmetria centrale (3D), che si ottiene quando i tre piani sono tutti ortogonali tra loro (figura 6).

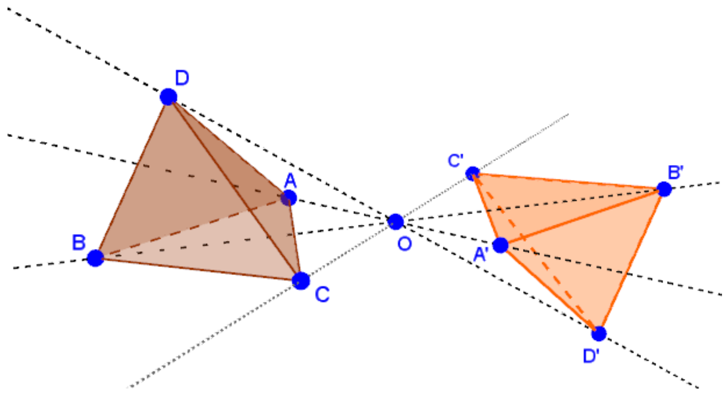


Figura 6

Nello spazio riferito a un sistema di assi ortogonali Oxyz il punto P di coordinate (x, y, z), nella simmetria centrale di centro l'origine *O* degli assi, si trasforma nel punto P' di coordinate (-x-,-y,-z).

2° caso

Se i tre piani *p*, *q* ed *s* appartengono a un medesimo fascio improprio, allora si ottiene come composizione un'unica simmetria planare ottenuta dalla composizione di una traslazione e di una simmetria planare.

Se i due p, q sono paralleli e il piano s interseca entrambi i piani p e q, allora si può verificare che ci si può ricondurre alla composizione di una traslazione di vettore v (ottenuta dalla composizione delle sue simmetrie planari rispetto ai piani p e q) con una simmetria planare rispetto a un piano perpendicolare al vettore v della traslazione.Si ottiene pertanto una *glisso-simmetria* nello spazio 3D (figura 7).

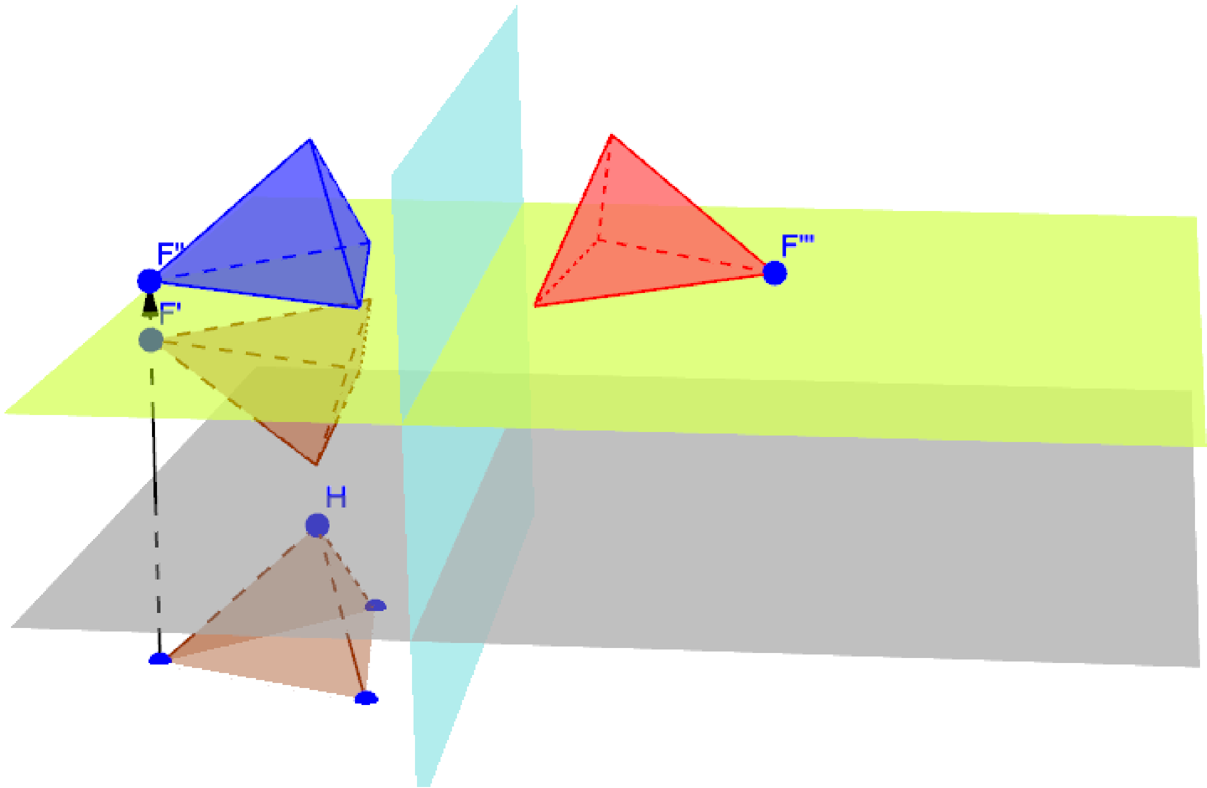


Figura 7

Questo tipo di composizione delle tre simmetrie planari si comprende meglio osservando lo schema della figura 8.

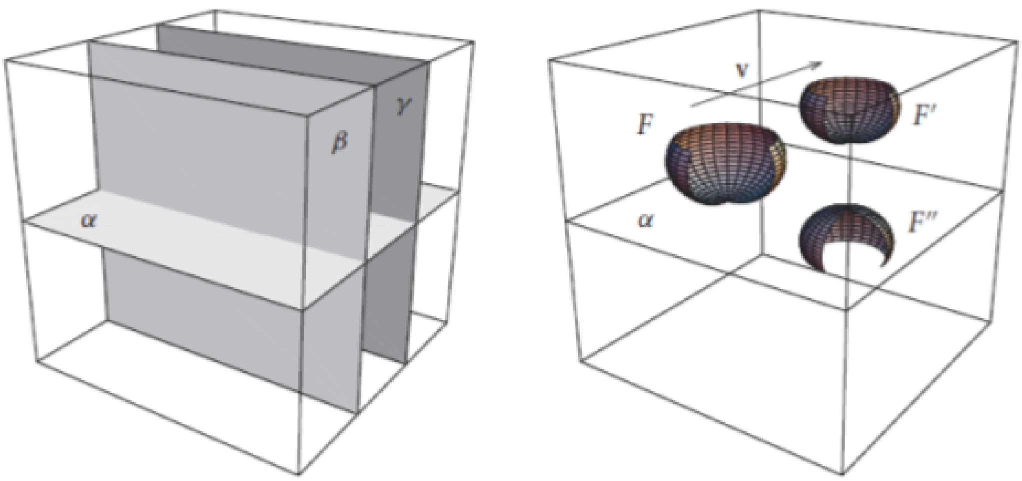


Figura 8 - Glisso-simmetria (figura dal libro: M. Dedò, *Forme*, Decibel, Padova)

Scheda studente 4(a): Composizione di quattro simmetrie planari

Apri GeoGebra (vers.5 classica), apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

Consideriamo 4 piani α, β, γ, δ nello spazio.

Se questi 4 piani appartengono allo stesso fascio proprio, la composizione delle relative simmetrie planari sarà una rotazione attorno alla retta *r* comune ai quattro piani.

Se questi 4 piani appartengono allo stesso fascio improprio, la composizione delle relative simmetrie planari sarà una traslazione di un vettore perpendicolare ai piani dati.

Negli altri casi si dimostra che ci si può ricondurre alla composizione di una rotazione attorno a una retta *r* e di una traslazione di un vettore *v* parallelo alla retta *r.*

Si ottiene pertanto una *roto-traslazione* nello spazio 3D (figura 8) detta anche, più semplicemente, *avvitamento*.

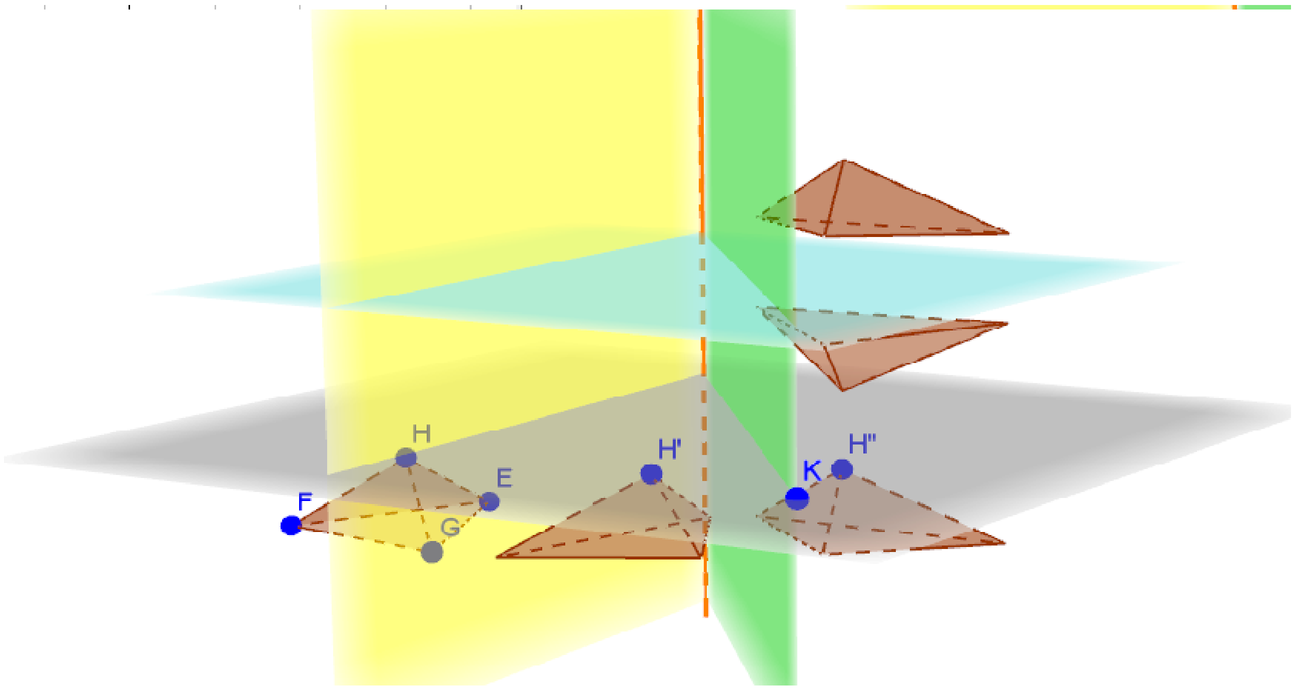


Figura 8

La composizione delle 4 simmetrie planari si comprende meglio osservando lo schema della figura 9.

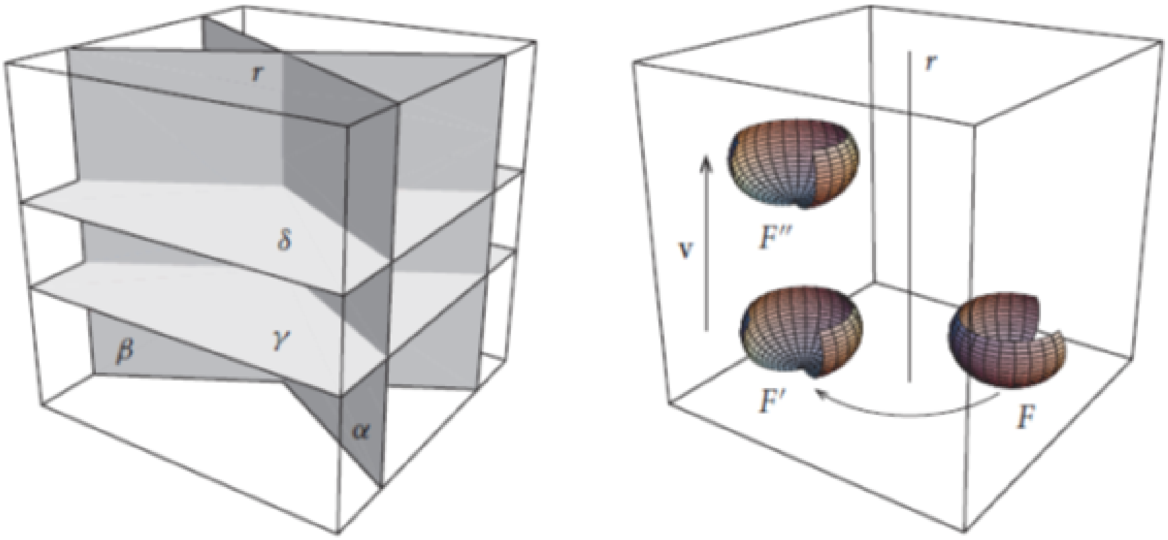


Figura 9 - Roto-traslazione (figura dal libro: M. Dedò, *Forme*, Decibel).

Scheda studente 5(a): Classificazione delle isometrie dello spazio

---

Le isometrie 3D sono classificate, come abbiamo visto, in *pari* o *dispari*.

Come abbiamo visto, una isometria si dice *pari* se non cambia l'orientamento nello spazio di un triedro orientato (ossia di un tetraedro ABCD orientato, per esempio, in verso destrorso). Altrimenti si dice *dispari.*

Come abbiamo visto, le simmetrie planari (dette anche *riflessioni* rispetto a un piano), sono dispari; è esperienza comune quella della riflessione rispetto a uno specchio piano, che cambia l'orientamento. Banalmente, la mano destra ha come immagine una mano sinistra (e viceversa); una scarpa destra si specchia in una scarpa sinistra, ecc.

Componendo tra loro due isometrie dispari, si ottiene una isometria pari.

Componendo tra loro tre isometrie dispari, si ottiene una isometria dispari.

Componendo tra loro quattro isometrie dispari, si ottiene una isometria dispari.

La composizione di isometrie ricorda quindi l'aritmetica dell'addizione tra numeri pari e numeri dispari (pari+pari=pari; pari+dispari=dispari, ecc.).

Dopo l'esplorazione dei vari tipi di composizione delle isometrie dello spazio, si può enunciare il seguente teorema (uno dei tanti teoremi dovuti ad Eulero).

Teorema. *Una isometria dello spazio tridimensionale si ottiene tramite la composizione di al più 4 riflessioni.*

Un'isometria pari, se non è l'identità, può essere una traslazione (composizione di 2 simmetrie planari), una rotazione attorno a una retta (composizione di 2 simmetrie planari) oppure una roto-traslazione (composizione di 4 isometrie planari).

Un'isometria dispari può essere una simmetria planare (1 sola simmetria), una glisso-simmetria (composizione di 3 simmetrie planari) oppure una roto-simmetria (composizione di 3 simmetrie planari).

Possiamo riassumere quanto visto nella seguente tabella. Le isometrie sono suddivise in *pari* o *dispari* e tra parentesi è riportato il numero delle simmetrie planari che occorre comporre per ottenere i diversi tipi di isometrie 3D.

Ogni isometria dello spazio (3-dimensionale) è composizione di al più 4 simmetrie planari

Isometrie pari

- Identità (0)
- Traslazioni (2)
- Rotazioni (2)
- Roto-traslazioni (4)

Isometrie dispari

- Simmetrie planari (1)
- Roto-simmetria (3)
- Glisso-simmetria (3)