APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: risolvi problemi, argomenta e dimostra
Problem solving sulle isometrie

Scheda studente 1(c1)

Ho trovato un messaggio in una bottiglia: “Sull’isola di Pao-pao[1] cerca il pozzo, da lì conta i passi fino alla quercia, gira a sinistra di 90° e conta un ugual numero di passi, fino al punto *R*; torna al pozzo e da lì vai fino all’olmo, gira a destra di 90°, conta un ugual numero di passi fino al punto *S*. A metà tra *R* e *S* troverai il tesoro.” Vado nell’isola di Pao-pao, ma del pozzo non c’è più traccia. Ci sono ancora la quercia e l’olmo. Riuscirò a trovare il tesoro?

Figura 1

Prova a ricostruire il messaggio della bottiglia e a cercare la soluzione, seguendo i suggerimenti di seguito riportati:

Traccia su un foglio due punti *Q* e *O* che rappresentano rispettivamente quercia e olmo la cui posizione non va modificata.
Scegli una qualunque posizione per il pozzo e segui le istruzioni segnando il punto di arrivo. Scegli una nuova posizione per il pozzo e ripeti nuovamente le istruzioni segnando il punto di arrivo.

1. Cosa osservi?

Ricorda che, come osservato nella scheda (SIM_schede_stud_c), il prodotto di 2 rotazioni con angoli di 90°, anche con centri diversi, equivale ad una rotazione di 180°, cioè ad una simmetria centrale.

2. Esistono punti fissi, cioè che non variano di posizione a seguito della trasformazione (detti anche punti uniti)? Per rispondere, puoi aiutarti anche usando la seguente figura, dove il punto *Q* (quercia) e il punto *O* (olmo) sono fissati, i punti P_1 e P_2 sono stati posizionati a caso, e di conseguenza restano fissati per ciascuno di essi i punti R_1, S_1 e R_2, S_2. Ricorda inoltre cosa ti viene richiesto dal testo.

---

[1] Esiste veramente un’isola di Pao-pao, nella Polinesia francese, abitata da circa 5000 persone.

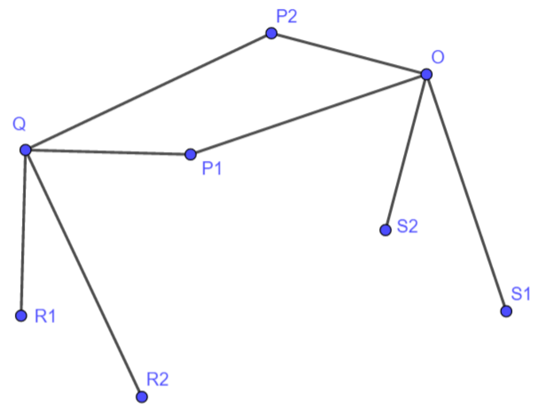

Figura 2

3. Dopo che hai trovato la soluzione, prova a giustificare il tutto a partire dalle conoscenze che possiedi sulle rotazioni.

Scheda studente 2(c1)

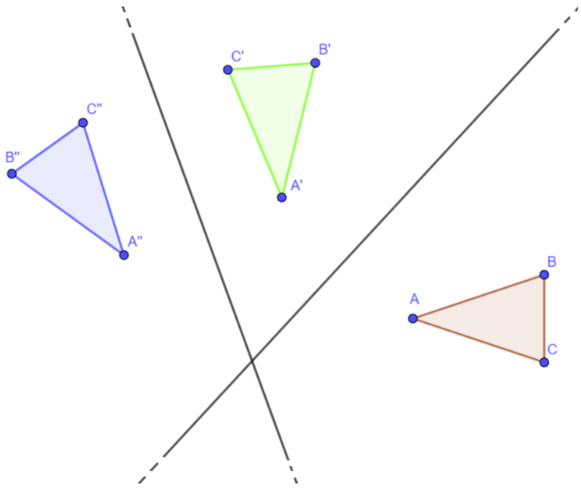

Figura 1

1. Cosa si ottiene componendo tra loro due simmetrie con assi paralleli e distinti?
2. Cosa si ottiene componendo tra loro due simmetrie con assi incidenti (come nella figura a lato)?
3. Sul piano cartesiano, cosa si ottiene componendo una rotazione di 90° intorno all'origine con una rotazione di 90° intorno al punto di coordinate (1;0)?

Per rispondere alle tre domande:

Prendi un foglio e disegna un triangolo ABC, traccia una retta *r* e costruisci il triangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC, nuovamente traccia un'altra retta *s* parallela ad *r* e costruisci $A''B''C''$, simmetrico di $A'B'C'$.

1. Qual è l'isometria che porta ABC in $A''B''C''$?

2. Prova a descrivere il vettore che porta ABC in $A''B''C''$. Cosa puoi dire della sua direzione, del suo verso e della sua lunghezza, in relazione alla direzione degli assi di simmetria e alla loro distanza? (Un foglio quadrettato può facilitarti la risposta).

3. Che cosa accade se i due assi paralleli, anziché essere distinti, sono coincidenti?

Puoi osservare lo stesso risultato utilizzando due specchi al posto delle rette *r* ed *s*.
Aiutandoti ancora con un foglio quadrettato, disegna un nuovo triangolo ABC, successivamente fanne il simmetrico rispetto ad una retta *r* ottenendo un triangolo $A'B'C'$ e di nuovo il simmetrico di quest'ultimo rispetto ad una retta *s* perpendicolare ad *r* ottenendo un triangolo $A''B''C''$.

4. Come risultano tra loro i due triangoli ABC e $A''B''C''$?

5. Esistono altre due trasformazioni geometriche che, analogamente a quanto appena osservato con la composizione di due simmetrie con assi perpendicolari, fanno sovrapporre il triangolo di partenza a quello di arrivo. Sapresti identificarle?

Prova a generalizzare il quesito precedente al caso con assi incidenti ma non perpendicolari, come mostrato in figura 1.

6. Dal primo triangolo *ABC*, all'ultimo $A''B''C''$ come si può arrivare in modo diretto?

7. Descrivi la rotazione che porta il triangolo di partenza a quello di arrivo (centro ed angolo di rotazione) in funzione della posizione reciproca dei due assi di simmetria.

Come conseguenza di quanto detto, spiega perché (vedi domanda 5) la composizione di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari equivale ad una rotazione di un angolo piatto, cioè ad una simmetria centrale.

Per rispondere alla terza domanda, aiutati con il testo sotto riportato, eseguendo opportuni disegni, in modo da arrivare alla risoluzione del quesito. Lavora in un piano cartesiano.

Possiamo ottenere la prima rotazione (di centro l'origine) componendo nell'ordine la simmetria rispetto alla retta $y = -\ldots\ldots$ e la simmetria rispetto all'asse *x*. La seconda rotazione si può ottenere come composizione della simmetria rispetto all'asse *x* con la simmetria rispetto alla retta $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ che passa per $(1; 0)$ e forma un angolo di 60° con l'asse *x*. Le due simmetrie rispetto all'asse *x* si …………………, rimangono le due simmetrie rispetto a $y = -\ldots\ldots$ e a $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, che si intersecano in $C(\ldots; \ldots)$ e formano fra loro un angolo di ……. La rotazione prodotto è dunque di …… intorno a *C*.