APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: risolvi problemi, argomenta e dimostra
IP^3
isometrie per … definire
isometrie per … dimostrare
isometrie per … risolvere

Scheda studente 1(c2): il parallelogramma

La definizione è una scelta

Definizione di parallelogramma

"Il parallelogramma è un quadrilatero convesso che ha i lati opposti paralleli"

Questa definizione di parallelogramma si trova frequentemente nei libri di testo.
Disegna un parallelogramma e fai una crocetta sulle affermazioni vere:

- ⬜ due lati opposti sono congruenti
- ⬜ i lati opposti sono congruenti
- ⬜ i lati sono tutti e quattro congruenti
- ⬜ gli angoli opposti sono congruenti
- ⬜ gli angoli sono tutti e quattro congruenti
- ⬜ gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari
- ⬜ ogni diagonale lo divide in due triangoli congruenti
- ⬜ le diagonali sono bisettrici degli angoli
- ⬜ le diagonali sono perpendicolari
- ⬜ le diagonali sono congruenti
- ⬜ le diagonali si incontrano nel loro punto medio
- ⬜ ha un centro di simmetria

Costruisci con *GeoGebra* un parallelogramma seguendo la procedura di seguito descritta.

Costruzione di un parallelogramma con *GeoGebra*

1. costruisci un ***Punto*** A
2. costruisci due segmenti e chiamali PQ e RS
3. con ***Compasso*** costruisci due circonferenze di centro A e raggio rispettivamente PQ e RS
4. con ***Punto su oggetto*** costruisci un punto B su una circonferenza e un punto D sull'altra
5. costruisci i ***Segmenti*** AB e AD
6. con ***Retta parallela*** costruisci una retta per D parallela ad AB e una retta per B parallela ad AD
7. con ***Intersezione*** costruisci il punto C comune alle due parallele
8. con ***Poligono*** costruisci il quadrilatero ABCD
9. con ***Mostra/ Nascondi oggetto*** nascondi le rette parallele e le circonferenze
10. osserva nella *Vista Algebra* le misure dei lati di ABCD
11. segna gli ***Angoli*** del parallelogrammo

- ❖ Muovendo i punti B o D puoi far variare gli angoli del parallelogramma e muovendo i punti Q o R ne puoi far variare i lati a tuo piacimento.
- ❖ **Verifica** con gli strumenti di *GeoGebra* la correttezza delle tue risposte.
- ❖ **Dimostra** adesso le proprietà che hai segnato.

In sintesi, la definizione proposta utilizza come proprietà il parallelismo delle due coppie di lati e le altre proprietà segnate con le crocette derivano da questa.

È possibile utilizzare un'altra proprietà fra quelle segnate per una nuova definizione di parallelogramma, ad esempio:

Definizione di parallelogramma 2

"Il parallelogramma è un quadrilatero convesso con un centro di simmetria"

Costruisci con *GeoGebra* il quadrilatero servendoti della proprietà utilizzata nella definizione 2.

Costruzione di un parallelogramma con *GeoGebra*

1. costruisci due ***Punti*** A e B e un terzo punto, il centro di simmetria, che chiami O
2. costruisci con ***Simmetria centrale*** i simmetrici di A e B rispetto ad O e chiamali nell'ordine C e D
3. con ***Poligono*** costruisci il parallelogramma ABCD
4. osserva nella *Vista Algebra* le misure dei lati di ABCD
5. segna gli ***Angoli*** del parallelogrammo

❖ ***Muovi*** i punti A o B per far variare il parallelogramma a tuo piacimento

❖ **Verifica** con gli strumenti di *GeoGebra* che le altre proprietà segnate derivano dalla definizione 2. Ricorda di verificare anche la proprietà utilizzata nella definizione iniziale.

❖ **Dimostra** adesso le proprietà derivate.

Considerazioni finali

Abbiamo provato che delle due definizioni l'una implica l'altra, cioè:

- se definiamo parallelogramma un quadrilatero convesso con i lati opposti paralleli possiamo dimostrare che esso possiede un centro di simmetria.
- se definiamo parallelogramma un quadrilatero convesso con un centro di simmetria possiamo dimostrare che esso ha i lati opposti paralleli.

Questo ci consente di concludere che le definizioni 1 e 2 sono **equivalenti**.

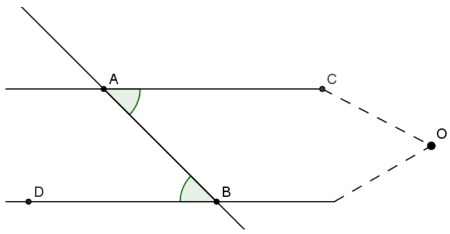
Possiamo però chiederci quale delle due definizioni ci permette di dimostrare le varie proprietà nel modo più semplice.

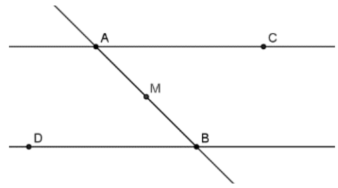
⬜ Definizione 1 ⬜ Definizione 2

Motiva la tua risposta:

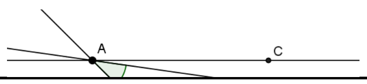
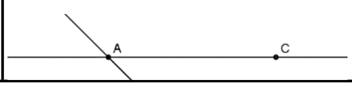
Scheda studenti 2(c2): la dimostrazione

La dimostrazione è una scelta:
Geometria Euclidea Classica *o* Geometria delle Isometrie*?*

<table>
<tr><td colspan="2">Teorema
Se due rette di un piano tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni uguali allora le due rette sono parallele</td></tr>
<tr><td>Geometria Euclidea</td><td>Geometria delle Trasformazioni</td></tr>
<tr><td>Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C \ e \ A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni.
Ip $B\hat{A}C = A\hat{B}D$
Ts retta AC//retta BD</td><td>Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C \ e \ A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni.
Ip $B\hat{A}C \ isometrico \ a \ A\hat{B}D$
Ts retta AC//retta BD</td></tr>
<tr><td>Dimostriamo che retta AC è parallela alla retta BD.


<u>Ragioniamo per assurdo</u>. Neghiamo la tesi. Supponiamo che le rette AC e BD non siano…………………………………
Ciò vuol dire, come si evince dalla figura che segue, che AC e BD ..………………………, che chiamiamo O.
Osserva attentamente la figura. AOB è una “figura impossibile”! Sei in grado di dire perché?
Esprimilo con parole tue:
……………….………………………….
……………………………………………</td><td>Dimostrazione
Sia M il punto medio del segmento AB.


<u>Nella simmetria di centro M</u>,
- a B corrisponde ………
- alla semiretta BA corrisponde la semiretta ………..,
- all’angolo $A\hat{B}D$ corrisponde un angolo ad esso …………………… e avente un lato nella semiretta A… .
Tale angolo deve essere situato da parte opposta di $A\hat{B}D$ rispetto alla retta …………
Per l’unicità del trasporto degli angoli, tale angolo deve essere … .

Ne segue che alla retta BD corrisponde la retta …… .
Poiché le rette ………. e ……… si corrispondono in una simmetria centrale esse sono ………………….</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teorema
Due rette parallele formano con una qualunque trasversale angoli alterni interni uguali</td></tr>
<tr><td>Geometria Euclidea</td><td>Geometria delle Trasformazioni</td></tr>
<tr><td>Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C \ e \ A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni.
Ip retta AC//retta BD
Ts $B\hat{A}C = A\hat{B}D$</td><td>Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C \ e \ A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni.
Ip retta AC//retta BD
Ts $B\hat{A}C$ è isometrico ad $A\hat{B}D$</td></tr>
<tr><td>Dimostrazione

</td><td>Dimostrazione

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Per dimostrare che $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ sono uguali, ragioniamo per assurdo, supponiamo cioè che ……………… Se, ad esempio $B\hat{A}C > \hat{\ }$, allora possiamo dire che esiste una semiretta AE tale che $B\hat{A}E$= $A\hat{B}D$. Ne segue che la retta AE è ………………… alla retta BD.
Se osservi attentamente la figura ti accorgi che essa è una “figura impossibile”. Sei in grado di dire perché?
Esprimilo con parole tue: ……………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
Si arriva alla stessa conclusione se si suppone che $B\hat{A}C < \hat{\ }$.
Ne segue che………………………………</td>
<td>Sia M il punto medio del segmento AB.

Nella simmetria di centro M:
- ad A corrisponde ………;
- alla semiretta AB corrisponde la semiretta …….
- alla semiretta AC corrisponde la semiretta ……………
Motiva la questa ultima risposta
…………………………………………………

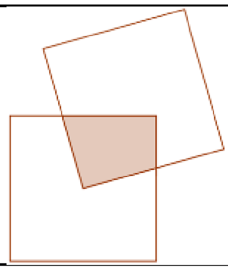
…………………………………………………
All’angolo $M\hat{A}C$ corrisponde l’angolo $\hat{\ }$.
Poiché gli angoli $M\hat{A}C$ e $\hat{\ }$ si corrispondono in una …………… essi sono ………………………</td>
</tr>
</table>

Scheda studenti 3 (c2): il problema del quadrato

La strategia risolutiva di un problema è una scelta

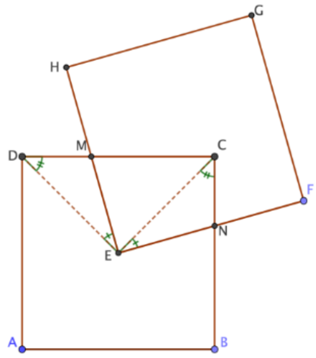
Problema

Due quadrati di lato lungo 8 sono disposti in modo che il vertice di uno coincida col centro dell'altro. Quanto vale l'area della parte comune ai due quadrati? (VI Etniade, gara di matematica per il biennio della scuola secondaria di secondo grado 1997)



Apri GeoGebra, costruisci un quadrato ABCD e disegna il suo centro E. Costruisci il secondo quadrato EFGH e chiama M ed N i punti d'intersezione dei lati EH e EF rispettivamente con CD e BC.
L'area richiesta è quella del quadrilatero ENCM.

- **Risolvi con la "*geometria Euclidea classica*"**
  I due triangoli EDM e ECN sono uguali per



  …………………………………………………………………………………………
  perché hanno:
  - o ……………., perché …………………………………………………….,
  - o ……………, perché …………………………………………………….,
  - o ……………, perché …………………………………………………….

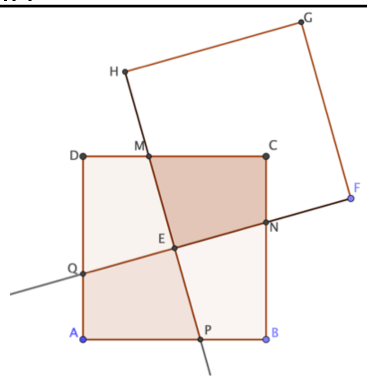
  Ne segue che sono equivalenti il quadrilatero ENCM e il triangolo ……………………......
  Pertanto, la parte comune ai due quadrilateri ha area 64: …. = ….. .

Prova adesso a "cambiare punto di vista".

Apri un nuovo file di GeoGebra, costruisci un quadrato ABCD e disegna il suo centro E. Costruisci il secondo quadrato EFGH.
Traccia le semirette HE e FE e siano rispettivamente M e P, N e Q le loro intersezioni con i lati di ABCD.

Risolvi con la "*geometria delle trasformazioni*"

Puoi intuire che in ABCD ci sono poligoni isometrici.
La figura MENC di cui devi calcolare l'area è isometrica a



…………………………………………………………………………………………. Quale isometria consente di trasformare MENC nei quadrilateri ad esso isometrici?
…………………………………………………………………………………...………………
……………………………
Quindi l'area di MENC vale
……………………………………………………………………………………………………

Puoi **osservare che** l'area della parte comune non dipende dalla posizione reciproca dei due quadrati ma resta invariata anche se muovi il quadrato di vertice E: Verificalo con GeoGebra.

Riflettiamo insieme

Perché proporre più soluzioni di uno stesso problema:

- in primo luogo, abitua a "cambiare punto di vista"

- poiché non tutti ragioniamo allo stesso modo, diversificare la risoluzione aiuta ciascuno a trovare il percorso più confacente alle proprie capacità
- abituarsi a ricercare i differenti percorsi può rivelarsi importante per affrontare i problemi che la vita ci pone tutti i giorni; spesso si tratta infatti di situazioni complesse che comportano diverse strategie di approccio, con conseguenze diverse nelle applicazioni.
- anche se non sempre i percorsi sono confrontabili, stabilire se uno è più conveniente di un altro significa scegliere e valutare le conseguenze di ogni scelta.

In conclusione, le isometrie appartengono a pieno titolo alla realtà che ci circonda, il vero problema è che spesso non le vediamo.