LA GLISSOSIMMETRIA: Risolvi problemi, argomenta e dimostra

Tassellare con le simmetrie e riconoscere le glissosimmetrie

Scheda docente (c)

Introduzione
L'attività si propone di far lavorare studenti/esse concretamente, creando parti di tassellazioni con carta e forbici e ritrovando concetti già sviluppati in altre attività (in particolare nella scheda sulla traslazione TRA_attività_a). Si chiede loro di fare congetture e di giustificarle.
La scheda per lo studente serve solo a ricordare le istruzioni date a voce dall'insegnante nelle fasi più operative, secondo quanto indicato nel seguito.

Obiettivi dell'attività
- confrontare simmetrie centrali e assiali nel piano
- esaminare gli effetti della composizione di simmetrie assiali e centrali nel piano
- riconoscere il cambiamento di "verso" operato da un'isometria dispari
- utilizzare le glissosimmetrie in problemi significativi.

Software usato
Tales Game (www.oiler.education/tales), *GeoGebra*.

Prerequisiti
Attività relative alla simmetria centrale e alla composizione di simmetrie e all'introduzione alla glissosimmetria nel piano.

Spazi
Aula scolastica

Tempo medio per svolgere l'attività
1 ora

Modalità
In presenza o a distanza

Descrizione dell'attività
L'attività richiede di effettuare costruzioni con strumenti poveri e di produrre delle congetture sulle situazioni che si presentano.
Si chiede innanzitutto a studenti/esse di disegnare una "quadrettatura" con parallelogrammi, come in figura. Sono sufficienti 2 o 3 righe e 4 o 5 colonne.

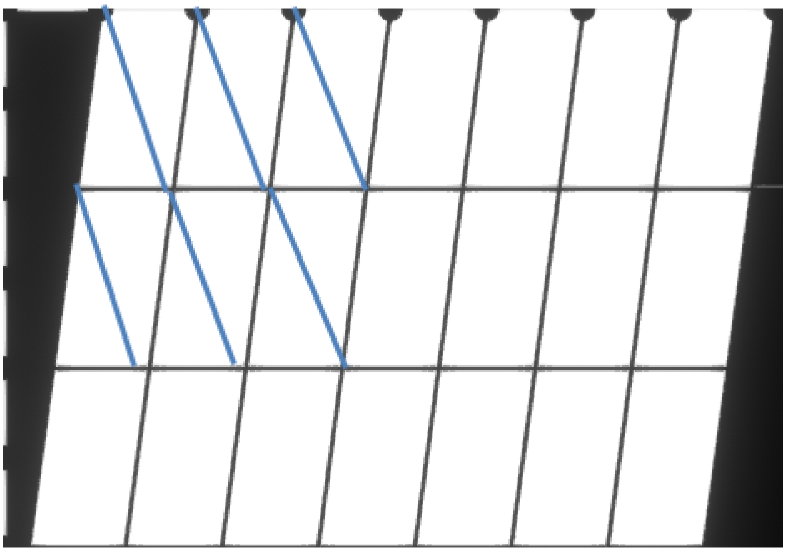

Fig. 1

Ciascun parallelogramma ottenuto va poi diviso secondo una delle due diagonali (scegliendo sempre diagonali parallele tra loro) in modo da ottenere una configurazione come quella rappresentata nella Fig.1.
Si chiede poi di ritagliare un certo numero di triangoli così ottenuti.

SUGGERIMENTI PER IL LAVORO IN CLASSE

a) La figura si può ottenere a partire sia da immagini realizzate con il software Tales-game (https://it.oiler.education/tales) inserite in un file di testo, sia con un normale foglio a quadretti utilizzando riga e squadra. Dal momento che gli studenti dovranno eseguire il lavoro ritagliando i triangoli, le figure eventualmente realizzate su file con un opportuno software, andranno comunque stampate.
b) Per il lavoro successivo, è necessario che il foglio da disegno abbia *due lati di colore diverso*. Si può ad esempio annerire uno dei due lati con una matita.
c) È opportuno evitare casi particolari: parallelogrammi che siano anche rombi, il lato orizzontale del parallelogramma uguale alla distanza tre le righe, etc.

Fase 1: Come indicato anche nella scheda studenti, chiediamo agli studenti/esse di prendere due dei triangoli ottenuti ed eseguire i seguenti passi
- Sovrapporre due triangoli e ruotare il triangolo superiore di 180° attorno al punto medio del lato *a* (cioè effettuiamo una simmetria centrale). Il triangolo iniziale e quello ruotato hanno un lato in comune: si ottiene un parallelogramma.
- Si può poi traslare il parallelogramma ottenuto in due direzioni e ottenere la griglia iniziale.

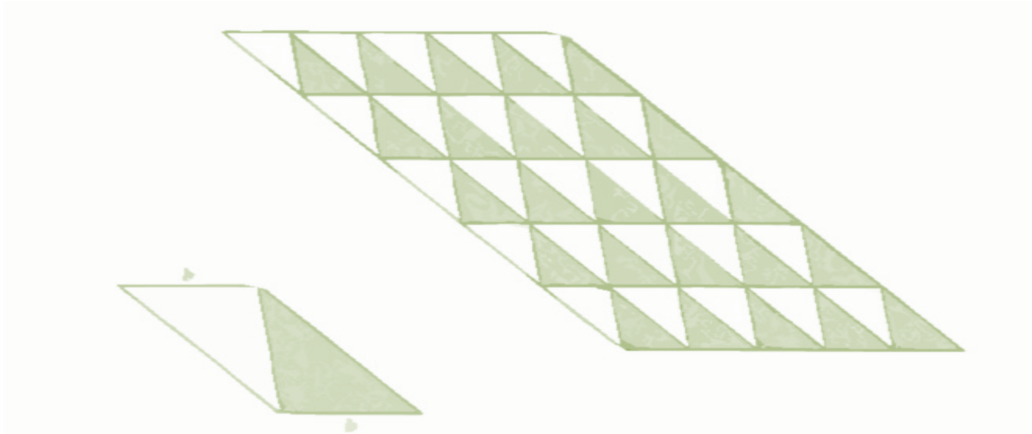

Fig. 2

NOTA: in Fig. 2 i triangoli hanno due colori per evidenziare il movimento fatto, ma nell'attività pratica avranno sempre lo **stesso colore**, perché vengono eseguite solo isometrie *pari* (cioè dirette: traslazioni e rotazioni).

Fase 2: si chiede alla classe di prendere tre triangoli, ruotando il primo triangolo di 180° attorno ai punti medi per due volte: si ottiene un nuovo quadrilatero, come in Fig 3.

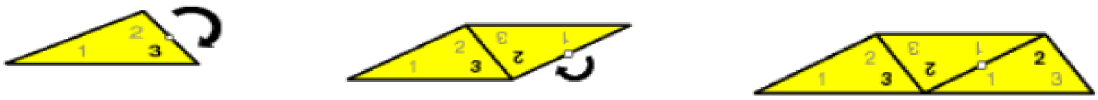

Fig. 3

Si chiede a studenti/esse cosa si ottiene continuando a ripetere la simmetria centrale rispetto agli stessi due lati (risposta: si ottiene la prima striscia della quadrettatura: [vedi il lavoro su traslazioni e fregi, nella scheda TRA_attività_c, e il catalogo di Tales relativo, https://oiler.education/tales/catalogo_fregi].

NOTA: Se confrontiamo con il catalogo dei fregi, notiamo che il fregio (ovvero la striscia orizzontale) che si ottiene è un "p2". Infatti il tassello costituito da un parallelogramma è dotato di simmetria centrale, e si ripete poi per traslazione (equivalente alla composizione di due simmetrie centrali con centri su una retta parallela alla direzione di traslazione).

Fase 3: Come possiamo costruire la seconda striscia?
Si chiede agli/alle allievi/e di formulare delle congetture.

Prima possibile congettura: traslare la prima striscia (nella direzione del lato "obliquo" del parallelogramma), come visto nella fase 1.

Seconda possibile congettura: eseguire la simmetria centrale rispetto al centro del terzo lato del triangolo, e proseguire con analoghe simmetrie centrali (far fare alla classe).

Domanda: la seconda congettura è è diversa dalla prima? (Risposta: No, *perché* …[vedi NOTA precedente]; si può inoltre verificare che la proprietà vale anche se il triangolo ha al suo interno un disegno non simmetrico, come in Fig. 4).

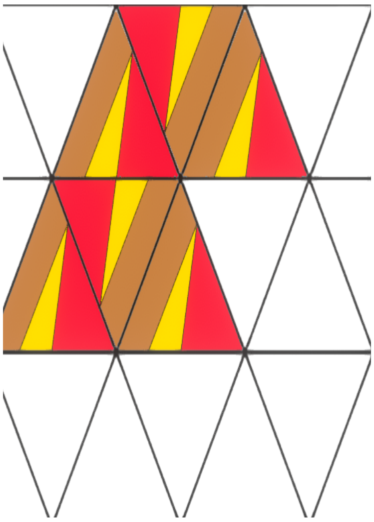

Fig. 4

Se confrontiamo con il catalogo delle tassellazioni, notiamo che la tassellazione che si ottiene – immaginando di proseguire ancora con simmetrie centrali – è una “pgg” (https://oiler.education/tales/catalogo, visualizza alternativa).

Terza congettura: Costruiamo il simmetrico del primo triangolo (e poi di tutti gli altri triangoli della striscia) rispetto al lato che nella figura è orizzontale. La costruzione può essere effettuata con GeoGebra (se si dispone dell'aula di informatica si può far fare a tutta la classe, altrimenti l'insegnante mostrerà la costruzione sulla LIM..

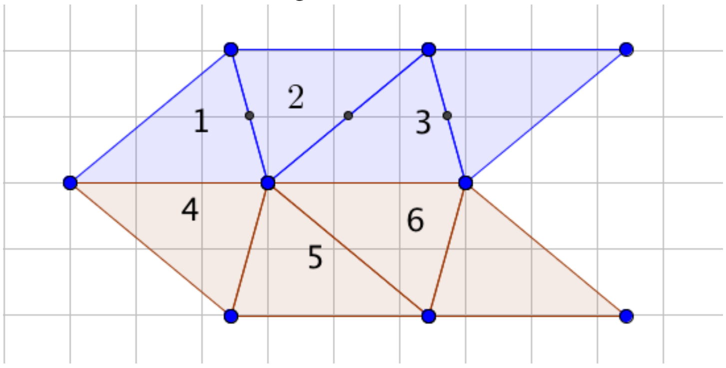

Fig. 5

Nota: questa volta si ottengono triangoli con colori differenti, perché quando operiamo con una simmetria assiale (ossia con un'isometria *dispari*), il triangolo “cambia colore” dal momento che il retro del foglio da cui sono stati ritagliati ha un colore diverso. (vedi scheda TRA_attività_c).

Si chiede alla classe di osservare i triangoli che compongono la Fig. 5.
Qual è la trasformazione che fa corrispondere al triangolo 1 il triangolo 6 della Fig. 5 ?

Se immaginiamo di procedere alternando strisce tra loro simmetriche come in Fig. 6, otteniamo una tassellazione “pmg” (https://oiler.education/tales/catalogo, visualizza alternativa), ma in questo secondo caso il tassello base (vedi Fig.7) non cambia colore nella simmetria.

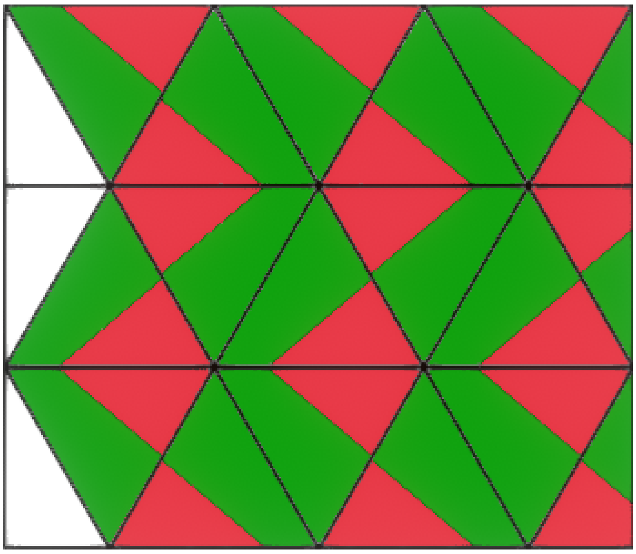

Fig. 6

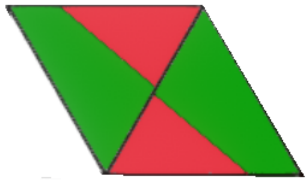

Fig. 7

Fase 4: operiamo solo con simmetrie assiali.
Chiediamo a studenti/esse di partire da un triangolo e aggiungere altri triangoli ottenuti tramite simmetrie assiali sui vari lati (come nella Fig. 8, realizzata con GeoGebra, in cui il triangolo di partenza è il triangolo A di colore marrone). Ogni volta che si opera con una simmetria assiale il colore del triangolo viene cambiato da marrone ad azzurro (o viceversa). Che tipo di isometrie si stabiliscono fra le varie figure ottenute?

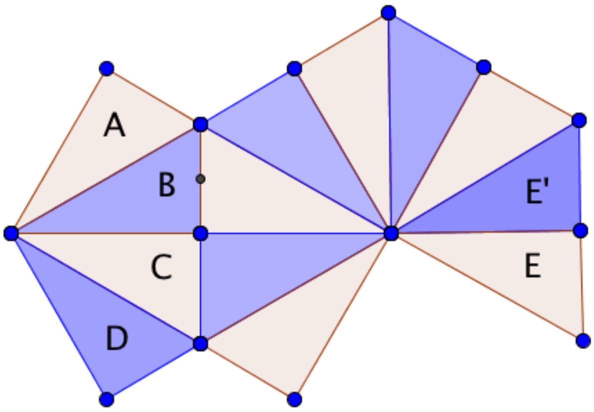

Fig. 8

Si chiede di individuare le isometrie tra due triangoli presenti nella figura ottenuta, e di giustificare la risposta.
Per esempio: tra il triangolo A e il triangolo C c'è una rotazione, che è infatti la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti.
Tra i triangoli A e D (di colore diverso) vi è necessariamente un'isometria dispari* (vedi nota), in questo caso una simmetria assiale (se ne individua facilmente l'asse).
Tra i triangoli B e E (di colore diverso) vi è necessariamente un'isometria dispari, ma che non è una simmetria assiale. Quindi è una glissosimmetria (infatti c'è una traslazione dal triangolo B al triangolo E' e poi una simmetria assiale dal triangolo E' al triangolo E).

Nota: la figura 8 è stata scelta volutamente semplice (in particolare i triangoli sono rettangoli e i cateti del triangolo B sono paralleli agli assi). Nei casi più generali i triangoli che si ottengono via via non tassellano il piano e possono anche sovrapporsi.

Ripetiamo dunque le stesse domande con riferimento a una figura "meno regolare" (come la Fig. 9). Per alcuni triangoli la situazione è la stessa.

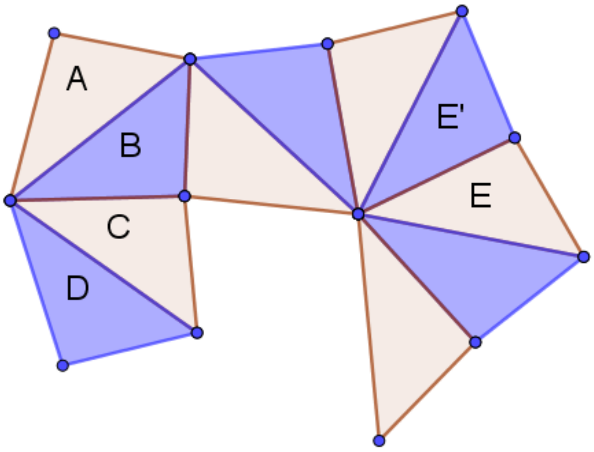

Fig. 9

Più difficile è, per esempio, trovare la relazione tra il triangolo B e il triangolo E (vedi Fig. 9). Come in precedenza, si deve trattare di un'isometria dispari, perché i due triangoli hanno colori diversi, e quindi si tratta di una glissosimmetria dal momento che non c'è una simmetria assiale tra il triangolo B e il triangolo E.

Riusciamo a trovare due isometrie (una pari e una dispari) componendo le quali, il triangolo B viene trasformato nel triangolo E?

(Risposta: si può operare con una traslazione che porti, per es., il vertice del triangolo B opposto al lato più lungo nel corrispondente vertice del triangolo E opposto al lato più lungo. A questo punto è sufficiente eseguire una simmetria assiale per far coincidere i due triangoli) (vedi la Fig. 10, in cui è indicato il vettore della traslazione e l'asse di simmetria).

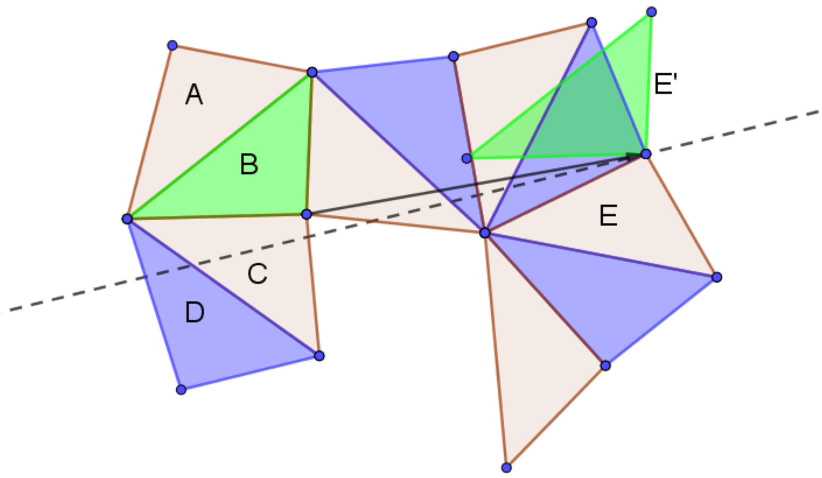

Fig. 10

Osservazione: in questo modo, nell'ultimo esempio, abbiamo implicitamente accettato la definizione (più generale) di glissosimmetria come composizione di una traslazione con una simmetria assiale, in cui però l'asse di simmetria non è parallelo alla direzione di traslazione (come invece è stata definita nell'attività con il pantografo (vedi scheda GLI_attività_a_b).

Che le due definizioni siano equivalenti si può dimostrare (teorema delle simmetrie) ma forse in questa fase non è necessario e può risultare difficile proporre questa definizione più generale di glissosimmetria nel primo biennio (per approfondimenti vedi la scheda APP_triennio_attività).

(*) Un'isometria si dice dispari (o indiretta) se inverte il verso di percorrenza dei vertici di un poligono, o più in generale di una figura chiusa, al quale viene applicato. Un'isometria dispari si ottiene quindi dalla composizione di un numero dispari di simmetrie assiali; l'insieme delle isometrie dispari contiene, come sottoinsiemi, le simmetrie assiali e le glissosimmetrie.