

LA COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE: Esplora e congettura Alla scoperta della composizione di isometrie

Scheda studente 1(a): composizione di due simmetrie assiali

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna con Geogebra un triangolo ABC utilizzando lo strumento *Poligono*  e una retta r (esterna) ad ABC con lo strumento *Retta* .
- Utilizzando il comando *Simmetria assiale*  disegna il triangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r .
- Disegna ora un'altra retta s (esterna ad ABC)
- Disegna il triangolo $A''B''C''$ simmetrico di $A'B'C'$ rispetto alla retta s utilizzando il comando *Simmetria assiale* .

Che relazione deve esserci tra r ed s affinché il triangolo $A''B''C''$ sia il traslato del triangolo ABC?

Perché?

Possibile suggerimento:

- disegna il vettore \mathbf{v} da A ad A'' ;
- disegna il triangolo $A'_1B'_1C'_1$ traslato di ABC rispetto al vettore \mathbf{v} ;
- colora il triangolo $A'_1B'_1C'_1$ di verde;
- muovi le rette r ed s in modo da far coincidere il due triangoli $A''B''C''$ e $A'_1B'_1C'_1$.

Che cosa osservi?

Come sono le due rette?

Verifica la tua congettura ripercorrendo la costruzione considerando le rette r ed s già nella relazione che hai individuato oppure analizza il file GeoGebra allegato

Quindi, eseguire due simmetrie assiali con assi _____ è equivalente a fare _____ in quanto _____

Qual è la lunghezza del vettore di traslazione rispetto alla distanza tra i due assi di simmetria (puoi aiutarti facendo esplorazioni con GeoGebra)?

Perché?

Scheda studente 2(a): composizione di due simmetrie assiali

Cosa accade se invece di due assi paralleli consideri due assi incidenti?

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna un triangolo ABC utilizzando lo strumento *Poligono*  e le rette r ed s, esterne al triangolo, incidenti in un punto O, con lo strumento *Retta* ;
- Individua, utilizzando il comando *Intersezione* , il punto O in cui r ed s si incontrano
- Utilizzando il comando *Simmetria assiale*  disegna il triangolo A'B'C' simmetrico di ABC rispetto alla retta r
- Disegna il triangolo A''B''C'' simmetrico di A'B'C' rispetto alla retta s.

In che relazione sono i triangoli ABC e A''B''C''?

Riesci a trovare una sola isometria che trasforma ABC in A''B''C''? Se sì, quale?

Suggerimento:

- Traccia la circonferenza di centro O e passante per A. Che cosa osservi?
- Considera la circonferenza di centro O e passante per B. Che cosa osservi?

Quindi:

con due simmetrie assiali con assi _____ si riesce a fare una _____.

Quanto misura l'angolo di rotazione del triangolo rispetto all'angolo formato dai due assi di simmetria (puoi aiutarti facendo misurazioni con GeoGebra)?

Perché?

- Muovi le rette r ed s in modo che l'angolo da esse formato sia di 90° . Cosa osservi? Che tipo di isometria ottieni?
-
-

Scheda studente 3(a): composizione di due rotazioni con lo stesso centro di rotazione

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna un quadrilatero ABCD utilizzando lo strumento *Poligono* 
- Crea 3 *slider* α , β , γ con lo strumento *Slider*  e posizionali sulla destra della vista grafica, uno sotto l'altro
- Disegna con lo strumento *Punto*  un punto O che sarà il centro di rotazione
- Con lo strumento *Rotazione*  ruota il quadrilatero ABCD rispetto al centro O dell'angolo α° in senso orario; ottieni la figura trasformata A'B'C'D'
- Ruota la figura A'B'C'D' rispetto al centro O dell'angolo β° in senso orario; ottieni il poligono finale A''B''C''D''.

In che relazione sono i quadrilateri ABCD e A''B''C''D''?

Qual è l'isometria che trasforma ABCD in A''B''C''D''?

Suggerimento: file *Iso_a_Scheda3_1.ggb*

- Ruota ABCD rispetto al centro O dell'angolo γ° in senso orario. Colora la figura di blu con opacità massima
- Muovi lo slider γ finché la figura ABCD si sovrappone ad A''B''C''D''.

Quindi:

- due rotazioni rispetto ad uno stesso centro di rotazione e nello stesso verso sono equivalenti a
-

- se le rotazioni sono una in un verso orario e una antiorario che cosa succede?
-

Prova con un esempio.

Se $\alpha=60^\circ$ e $\beta=75^\circ$ ottieni _____ $\gamma=$

Se $\alpha=60^\circ$ e $\beta=-75^\circ$ ottieni _____ $\gamma=$

Scheda studente 4(a): composizione di due simmetrie centrali

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna con lo strumento *Poligono*  il triangolo ABC e due punti O e O' con lo strumento Punto  .
- Con lo strumento *Simmetria centrale*  disegna il simmetrico di ABC rispetto al punto O; ottieni il triangolo A'B'C'
- Ripeti ora la stessa trasformazione sul triangolo A'B'C' rispetto al punto O'. Ottieni il triangolo A''B''C''.

Riesci a ottenere il triangolo A''B''C'' con una sola trasformazione partendo da ABC?

Se sì, di che trasformazione si tratta?

Quindi, eseguire due simmetrie centrali con centri diversi è equivalente ad effettuare _____

Approfondimento

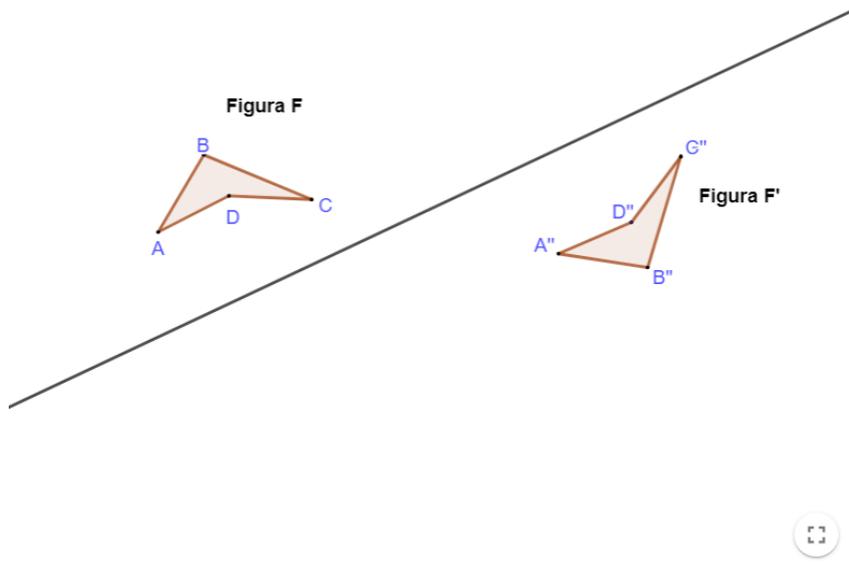
Nella scheda 2 hai osservato che è possibile ottenere una simmetria centrale componendo due simmetrie assiali con una qualunque coppia di rette perpendicolari incidenti nel centro di simmetria.

Quindi, due simmetrie centrali le puoi realizzare con _____

Prova a realizzare con GeoGebra la composizione delle due simmetrie centrali appena costruite utilizzando solo simmetrie assiali. Che cosa noti?

Scheda studente 5(a): glisso-simmetria

Osserva questa figura:



come puoi passare dalla figura iniziale F a quella finale F' con solo due isometrie?

La composizione di queste due isometrie si chiama **glisso-simmetria**

La glisso-simmetria si ottiene quindi componendo una _____
con una _____

Quale relazione lega le due isometrie che vengono composte per realizzare la glisso-simmetria?

Osserva questa immagine. Cosa osservi?



Scheda studente 6(a): composizione di tre simmetrie assiali (nel piano), assi paralleli

Fino ad ora hai visto la simmetria assiale, la rotazione (con il caso particolare della simmetria centrale), la traslazione e alcune loro composizioni.

Componendo due simmetrie assiali si ottiene una _____ oppure una _____

Esistono altre isometrie del piano? Ad esempio, cosa succede se componiamo 3 simmetrie assiali?

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

Considera 3 simmetrie assiali con assi r , s , t .

- Disegna con lo strumento *Poligono*  una triangolo ABC
- Disegna con lo strumento *Retta*  tre rette r , s , t parallele tra loro
- Con lo strumento *Simmetria assiale*  traccia il simmetrico di ABC rispetto alla retta r , poi il simmetrico $A'B'C'$ del triangolo che hai ottenuto rispetto alla retta s e poi il simmetrico $A''B''C''$ dell'ultimo triangolo rispetto alla retta t .

Che cosa osservi?

Suggerimento:

Qual è la relazione tra ABC e $A''B''C''$?

- Traccia eventualmente l'asse del segmento AA''

Che tipo di isometria ti permette di trasformare ABC in $A''B''C''$?

Quali sono gli elementi utili per definire questa isometria?

Quindi, componendo tre simmetrie assiali con assi paralleli, ottengo

Scheda studente 7(a): composizione di tre simmetrie assiali (nel piano) assi incidenti (caso 1)

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

Disegna le rette r , s perpendicolari a una retta t

- Con lo strumento *Poligono*  disegna un quadrilatero convesso ABCD che non presenti simmetrie (inserisci le lettere in modo antiorario)
- Con lo strumento *Simmetria assiale*  esegui in successione la simmetria rispetto alla retta r , alla retta s . Ottieni il poligono trasformato $A''B''C''D''$.
- Con lo strumento *Simmetria assiale*  esegui la simmetria rispetto alla retta t . Ottieni il poligono trasformato $A'''B'''C'''D'''$.

Riesci a ottenere $A'''B'''C'''D'''$ da ABCD con una sola isometria (del menu standard di GeoGebra)?

- Noti qualche analogia con un'altra isometria? Se sì, quale?

Quindi la glissosimmetria si ottiene componendo una _____ con una _____ con una relazione ben precisa tra le due trasformazioni ovvero _____.

La glissosimmetria cambia l'ordinamento di una figura chiusa? (da antiorario diventa orario); (da "destra" a "sinistra").

Approfondimento:

Si può vedere che non esistono altri tipi di isometrie del piano giungendo al fatto che le uniche isometrie del piano sono: simmetrie assiali, traslazioni, rotazioni, simmetrie assiali, glissosimmetrie.

Come hai visto le traslazioni e le rotazioni non cambiano l'ordinamento di una figura chiusa mentre le simmetrie assiali e le glissosimmetrie cambiano l'ordinamento. Le prime vengono chiamate pari e le altre dispari. Componendo due simmetrie dispari si ottiene una isometria pari, una qualunque isometria si ottiene componendo al massimo 3 simmetrie assiali. C'è un'analogia dell'aritmetica del ("pari-dispari",+) gruppo

Scheda studente 8(a): composizione di tre simmetrie assiali (nel piano) assi incidenti (caso 2)

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

Disegna le rette r , s , t incidenti in uno stesso punto O

- Con lo strumento *Poligono*  disegna un quadrilatero convesso $ABCD$ che non presenti simmetrie (inserisci le lettere in modo antiorario)
- Con lo strumento *Simmetria assiale*  esegui in successione la simmetria rispetto alla retta r , alla retta s . Ottieni il poligono trasformato $A''B''C''D''$.
- Con lo strumento *Simmetria assiale*  esegui la simmetria rispetto alla retta t . Ottieni il poligono trasformato $A'''B'''C'''D'''$.

Riesci a ottenere $A'''B'''C'''D'''$ da $ABCD$ con una sola isometria (del menu standard di GeoGebra)?

Suggerimento:

- Traccia l'asse del segmento AA''' . Per quale punto del piano passa?
- Traccia la circonferenza di centro il punto e passante per A . Che cosa osservi?

Quindi componendo 3 simmetrie assiali con assi incidenti in uno stesso punto O è equivalente a fare una _____

Scheda studente 9(a): Tassellazioni del piano

Osserva le seguenti immagini. Che cosa osservi?



Le pavimentazioni sono un esempio reale delle tassellazioni del piano.

In geometria piana con il termine **tassellazioni**, (o tassellature o pavimentazioni) si intendono i modi di ricoprire il piano con una o più figure geometriche ripetute all'infinito senza sovrapposizioni o spazi vuoti. Se queste figure sono poligoni regolari si parla di tassellazioni regolari.

Con quali poligoni regolari dello stesso tipo è possibile tassellare il piano?

Con il triangolo equilatero?

Sì, perché _____

No, perché _____

Con il quadrato?

Sì, perché _____

No, perché _____

Con il pentagono regolare?

Sì, perché _____

No, perché _____

Con l'esagono regolare?

Sì, perché _____

No, perché _____

Quindi, qual è la condizione che deve sussistere affinché si possa tassellare il piano con un poligono regolare?

Quali sono gli unici poligoni regolari con cui è possibile farlo?

Suggerimento:

Ti puoi aiutare compilando la tabella seguente:

Numero dei lati di un poligono regolare	Somma degli angoli interni di un poligono regolare	Ampiezza angolo interno
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Scheda studente 10(a): somma di vettori

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna un triangolo utilizzando lo strumento *Poligono*  e un vettore \mathbf{v} lo strumento *Vettore* .

- Trasla il triangolo secondo il vettore \mathbf{v} con lo strumento *Traslazione* .
- Riporta il triangolo nella posizione iniziale utilizzando una sola traslazione. Che caratteristiche ha il vettore \mathbf{u} di quest'ultima traslazione?

Direzione _____

Verso: _____

Modulo: _____

Qual è il legame tra il vettore \mathbf{v} e il vettore \mathbf{u} ?

Approfondimento:

Esiste un vettore che trasforma una figura in sé stessa? Come potresti indicarlo?

- Disegna un triangolo ABC utilizzando lo strumento *Poligono* .
- Disegna due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} con lo strumento *Vettore* . (Suggerimento: colorare i vettori con due colori diversi)
- Con lo strumento *Traslazione*  trasla il triangolo ABC secondo il vettore \mathbf{a} , ottieni il triangolo A'B'C'
- Trasla ora il triangolo A'B'C' secondo il vettore \mathbf{b} , ottieni il triangolo A''B''C''
- Trasla ora il triangolo ABC prima secondo il vettore \mathbf{b} e poi secondo il vettore \mathbf{a} .

Che cosa osservi?

E' possibile trasformare ABC in A''B''C'' mediante una sola traslazione?

Questa traslazione si chiama "somma" delle due traslazioni.

Considera due terne di vertici corrispondenti, ad esempio AA'A'' e AA'₁A'', disegna i vettori **a** e **b** che trasformano rispettivamente A in A' e A' in A'' (Suggerimento: se hai colorato i vettori mantieni le colorazioni scelte). Considera il vettore che trasla A in A''; questo vettore viene chiamato vettore "somma" (somma di **a** e **b**).

Quindi dati due vettori è possibile definire la _____ di due vettori.

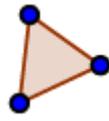
Il vettore si può ottenere sia _____

sia _____

Poni l'attenzione sul triangolo ABC e sul triangolo A'B'C' .

Scheda studente 11(a): tassellazioni del piano con triangoli qualunque

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.



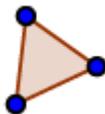
- Con lo strumento Poligono disegna un triangolo qualunque ABC
- Con lo strumento Punto medio o centro disegna il punto medio di uno dei lati, ad esempio BC
- Utilizzando solo una simmetria centrale e due traslazioni [vedi scheda 10] prova a iniziare la tassellazione del piano utilizzando "piastrelle" uguali al triangolo dato. Descrivi il tuo procedimento.

- Prova a modificare il triangolo ABC trascinando uno dei suoi vertici. Ottieni ancora una tassellazione?

Quindi è possibile tassellare il piano con _____ perché _____

Scheda studente 12(a): tassellazioni del piano con quadrilateri qualunque

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.



- Disegna ora lo strumento Poligono un quadrilatero ABCD non intrecciato.
- Con lo strumento Punto medio o centro disegna il punto medio di uno dei lati.
- Utilizzando solo una simmetria centrale e due traslazioni prova a iniziare la tassellazione del piano utilizzando come "piastrelle" dei quadrilateri uguali a quello dato inizialmente.

Descrivi come hai operato

- Prova a modificare il quadrilatero iniziale ABCD trascinando uno dei suoi vertici. Riesci ancora a tassellare il piano con questo nuovo quadrilatero?

E se il quadrilatero ABCD è concavo (non intrecciato), ottieni ancora una tassellazione del piano?

Quindi è possibile tassellare il piano con _____ perché _____
