LA SIMMETRIA ASSIALE: Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Problem solving usando le simmetrie assiali

Scheda docente (c)

Introduzione
L'attività si propone, attraverso una serie di esercizi guidati, di consolidare l'apprendimento di alcune proprietà delle simmetrie, utilizzando anche la loro rappresentazione analitica nel piano cartesiano.

Prerequisiti
Simmetria assiale, piano cartesiano.

Spazi
Aula (in presenza) o a distanza.

Tempo medio per svolgere l'attività in classe
Circa 2 ore (la durata può variare in base ai prerequisiti da richiamare).

Modalità
Le schede per la classe sono indicative. Ciascuna scheda-studente può essere usata dal docente come canovaccio, fornendo le informazioni necessarie per lo svolgimento delle attività in modo graduale e sulla base delle sollecitazioni richieste eventualmente dalla classe; oppure può essere data direttamente nelle mani dei singoli studenti/esse così come formulata. Si consiglia comunque di far lavorare la classe divisa in gruppi o quanto meno a coppie, in modo laboratoriale, lasciando il tempo di scoprire proprietà e di verificarle.

Si illustrano di seguito gli esercizi proposti nelle schede studenti (c) con le soluzioni suggerite e alcune indicazioni per i docenti.

<u>SCHEDA 1 docente</u>

Si tratta di un problema classico che si collega anche allo studio dei fenomeni di riflessione in fisica.

Ulteriore prerequisito
Disuguaglianza triangolare.

Obiettivo specifico della scheda
Utilizzare la simmetria assiale per argomentare.

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti *A* e *B*, situati dalla stessa parte rispetto a una retta *r*, nel determinare il cammino minimo che congiunge *A* con *B* toccando *r*. Si risolva il problema nel modo che si preferisce. (Esame di Stato LS, corso di Ordinamento 2012, quesito n. 9).

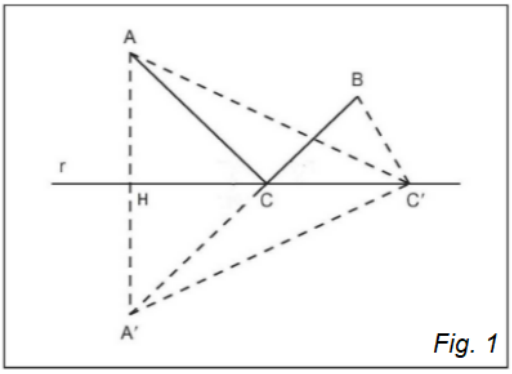


Fig. 1

SOLUZIONE

1. Dopo che la classe ha risposto alla prima domanda (individuando il punto *C* sulla retta *r* come soluzione al quesito, Fig.1), si può proporre un'attività di tipo laboratoriale analizzando la traiettoria di una pallina (o di un raggio laser) che, partendo da un punto dato, rimbalza lungo una parete (o nel caso del raggio laser si riflette su uno specchio).

Di seguito viene riportata la dimostrazione proposta alla classe nel punto 5 della scheda di lavoro degli studenti [LINK: SIM_schede_stud_c]

2. Sia *A'* il simmetrico di *A* rispetto alla retta *r*, sia *C* il punto di intersezione fra il segmento $A'B$ e la retta *r* ed infine sia *C'* un generico punto su *r*. Dalla congruenza fra i triangoli ACH e $A'CH$ ne discende che $AC \cong A'C$. Ugualmente risultano congruenti fra loro i segmenti AC' e $A'C'$.

3. Per quanto abbiamo appena detto, $AC + CB = A'B$ mentre $AC' + C'B = A'C' + C'B$.

4. Nel triangolo $A'BC$ il lato $A'B < A'C' + C'B$ in virtù della disuguaglianza triangolare. Pertanto il punto cercato è il punto *C* e il minimo percorso è $AC + CB$.

<u>SCHEDA 2</u> docente

Questo è un esercizio che conduce per mano l'allievo/a nell'affrontare lo studio delle simmetrie assiali più elementari nel piano cartesiano.
In un primo momento è richiesto di determinare, nel modo che l'allievo/a ritiene più opportuno, le equazioni delle rette *a*, *b* e *c* simmetriche di una retta *r* assegnata rispetto agli assi cartesiani e all'origine. Successivamente viene chiesto di risolvere il problema servendosi delle equazioni delle simmetrie.

Ulteriori prerequisiti
Grafici di rette nel piano cartesiano, uso dell'equazione esplicita della retta.

Obiettivo specifico della scheda
Individuare, riconoscere simmetrie e formulare la loro espressione analitica.

Nel piano cartesiano si tracci, per esempio, la retta *r* di equazione $x + 2y + 4 = 0$. Si traccino poi: la retta *a* simmetrica di *r* rispetto all'asse *x*, la retta *b* simmetrica di *r* rispetto all'asse *y*, la retta *c* simmetrica di *r* rispetto all'origine. Quali sono le equazioni delle rette *a*, *b*, *c*? Le rette *a*, *b*, *c* si corrispondono, a due a due, in opportune simmetrie?

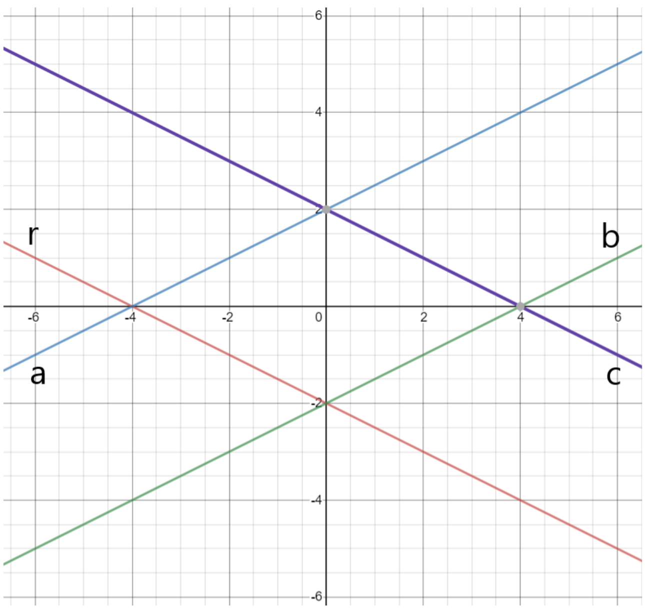
SOLUZIONE

Le tre equazioni richieste sono, nell'ordine:

$a)\ x - 2y + 4 = 0;$ $\qquad b)\ x - 2y - 4 = 0;$ $\qquad c)\ x + 2y - 4 = 0.$

- le rette *a*, *b* si corrispondono nella simmetria rispetto all'origine;
- le rette *a*, *c* si corrispondono nella simmetria rispetto all'asse *y*;
- le rette *b*, *c* si corrispondono nella simmetria rispetto all'asse *x*.

Le rette trovate si corrispondono anche rispetto ad altre simmetrie; ad esempio le rette *a* e *c* si corrispondono rispetto alla simmetria di asse $y = 2$. Tale scheda può fornire l'occasione per applicare le equazioni delle simmetrie ad assi paralleli agli assi *x* e *y*.



Partendo dalla definizione di simmetria centrale e di simmetria assiale si conduce lo studente ad individuare le equazioni delle simmetrie:

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$$

E si porta con semplici calcoli algebrici a trovare la retta trasformata.

SCHEDA 3 docente

Con questa scheda si vuol far ipotizzare il risultato della successiva applicazione di simmetrie assiali.

Obiettivo specifico della scheda
Evidenziare la potenza della formalizzazione, rispetto alla semplice attività grafica, per dimostrare le proprietà individuate.

a) Dato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, sia α la simmetria rispetto all'asse *x* e sia β la simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante. A partire da un punto *P*, si applica prima la simmetria α, ottenendo così un punto *P*', poi si applica β a *P*', quindi ancora α al punto ottenuto, poi β, e così via alternando α e β. Dopo quanti passi vi è la certezza che, qualunque sia *P*, il punto tornerà alla posizione iniziale? Per quali punti particolari è possibile tornare alla posizione iniziale dopo 1, 2, 3, ... passi?
b) Cosa succede se si compongono le precedenti trasformazioni anche con la simmetria di asse *y*? (In altre parole, si consideri la composizione delle tre simmetrie rispetto all'asse *x*, alla bisettrice del 1° e 3° quadrante e all'asse *y*).

SOLUZIONE

a) Alla posizione iniziale si torna dopo 8 passi. Dette $(x; y)$ le coordinate di un generico punto *Q*, il simmetrico di *Q* rispetto all'asse *x* è il punto $(x; -y)$, mentre il simmetrico di *Q* rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante è il punto $(y; x)$. Nel caso dell'esercizio proposto, applicando in modo alterno α e β a partire da $P(x_0; y_0)$ si ottiene la sequenza di punti:

$$(x_0; y_0) \xrightarrow{\alpha} (x_0; -y_0) \xrightarrow{\beta} (-y_0; x_0) \xrightarrow{\alpha} (-y_0; -x_0) \xrightarrow{\beta} (-x_0; -y_0) \xrightarrow{\alpha} (-x_0; y_0) \xrightarrow{\beta} (y_0; -x_0) \xrightarrow{\alpha} (y_0; x_0) \xrightarrow{\beta} (x_0; y_0)$$

Dunque, in generale, dopo otto passi si ritrova *P*. Solo in alcuni casi particolari si ritrova il punto P prima dell'ottavo passo. Notiamo innanzitutto che se il punto iniziale è $O(0; 0)$ allora si trasforma in se stesso dopo un qualunque numero di passi cioè è un punto fisso. Un punto sull'asse *x* torna alla posizione iniziale dopo 1 passo; un punto sulla bisettrice del 2° e del 4° quadrante torna su sé stesso dopo 3 passi, un punto sull'asse *y* dopo 5 passi e infine un punto sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante dopo 7 passi. Si noti che la composizione di α con β è la rotazione di 90° in senso antiorario attorno all'origine.

b) Sia $P(x_0; y_0)$ e sia γ la simmetria rispetto all'asse *y*. Allora, applicando nell'ordine le simmetrie α, β, γ otteniamo rispettivamente $P'(x_0; -y_0)$, $P''(-y_0; x_0)$ e $P'''(y_0; x_0)$. In definitiva, la composizione delle tre simmetrie considerate equivale alla simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante (quindi si torna al punto di partenza dopo 6 passi).