# LA SIMMETRIA ASSIALE: Risolvi problemi, argomenta e dimostra

# Problem solving usando le simmetrie assiali

## Scheda studente 1(c): il problema di Erone

Figura 1

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti *A* e *B*, situati dalla stessa parte rispetto a una retta *r*, nel determinare il cammino minimo che congiunge *A* con *B* toccando *r*. Si risolva il problema nel modo che si preferisce. (Esame di stato corso di Ordinamento 2012, quesito n. 9).

1. Osserva la seguente immagine. Quale, fra i diversi punti sulla retta *r*, rappresenta secondo te quello che meglio minimizza il cammino richiesto? Se vuoi, puoi usare un righello graduato (ad esempio, calcolando quanto fa $AC + CB$, poi $AD + DB$, ecc.).


*Fig. 2*

2. Ora focalizza la tua attenzione sul punto che hai verificato essere quello che rende minimo il percorso. Puoi anche raffinare la ricerca provando a disegnare qualche altro punto nei paraggi di esso e calcolando la somma delle distanze di ciascuno di essi da *A* e *B*.

3. Chiamiamo con *P* il punto che sembra risolvere il quesito. Prova ora a prolungare il segmento $BP$, nel semipiano generato da *r* non contenente *A*, *B*, di un segmento $PA'$ congruente a $PA$. Unisci *A* e *A*'.

4. Che relazione esiste fra il segmento $AA'$ e la retta *r*?

Il punto *A'* è il simmetrico di *A* rispetto alla retta *r*. In generale, per risolvere il quesito può convenire prima di tutto disegnare il simmetrico di uno dei due punti (ad esempio si disegna il punto *A'* simmetrico di *A*), si unisce quest'ultimo con *B* e l'intersezione fra la retta *r* e il segmento $A'B$, che chiameremo *C*, rappresenta proprio il punto cercato che risolve il quesito.

5. Osserva la seguente figura. Alla luce di quanto appena scoperto, e ricordando la disuguaglianza triangolare, prova a dimostrare che la veridicità di quanto sopra affermato.

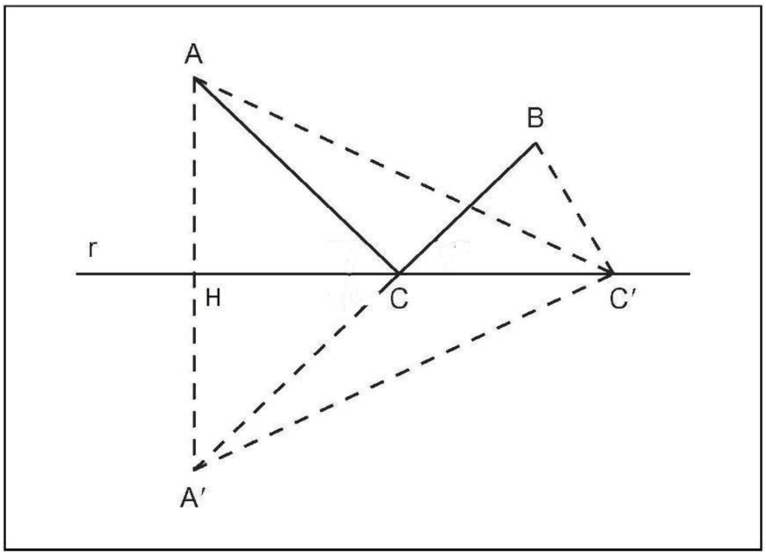


*Fig. 3*

1. $AC \cong \cdots\cdots$
2. $A'C \cong \cdots\cdots$
3. $AC + CB = \cdots\cdots + CB = \cdots\cdots$
4. $AC' + C'B = \cdots\cdots + C'B$
5. $A'B < \cdots\cdots + \cdots\cdots$ cvd

# Scheda studente 2(c): simmetrie nel piano cartesiano

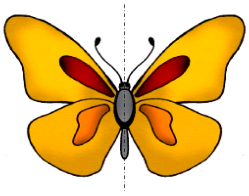

Figura 1

Nel piano cartesiano si tracci la retta *r* di equazione $x + 2y + 4 = 0$. Si traccino poi: la retta *a* simmetrica di *r* rispetto all'asse *x*, la retta *b* simmetrica di *r* rispetto all'asse *y*, la retta *c* simmetrica di *r* rispetto all'origine. Quali sono le equazioni delle rette *a*, *b*, *c*? Le rette *a*, *b*, *c* si corrispondono, a due a due, in opportune simmetrie?

Prova a determinare le equazioni delle rette *a*, *b* e *c* tracciando le rette sul piano cartesiano. Successivamente segui le indicazioni della scheda o per verificare ciò che hai trovato, o per determinare tali equazioni.

Su un foglio di carta disegna un piano cartesiano e un triangolo. Traccia una retta *s* parallela all'asse delle ordinate[1] e, come avrai avuto modo di fare in precedenti attività, piega il foglio in corrispondenza di tale retta. Riproduci quindi il triangolo nella seconda metà del foglio (ad esempio, posandolo sul vetro di una finestra in modo da osservare in controluce il triangolo di partenza e poterlo ricalcare nella seconda metà vuota). Poi riapri il foglio. Dovresti ottenere un disegno analogo a quello riportato qui di seguito:

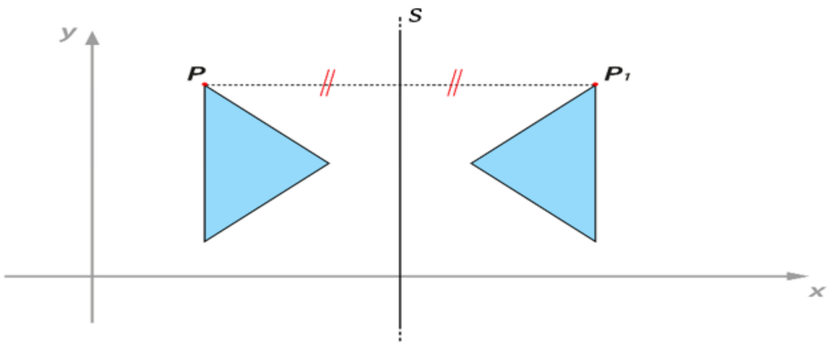


*Fig. 2*

Soffermati ora su un vertice del triangolo (che chiameremo *P*) e sul suo simmetrico P' rispetto alla retta *s*.

1. Se la retta $s$ ha equazione $x = x_0$, esprimi le coordinate di $P'(x'; y')$ in funzione delle coordinate di $P(x; y)$ e di $x_0$.

2. Scrivi quindi le relazioni che permettono di individuare una simmetria assiale (con asse parallelo all'asse delle ordinate).

3. Nel caso particolare in cui la retta *s* coincide con l'asse delle *y*, vale a dire $x = 0$, come diventano le equazioni della simmetria?

[1] Per ottenere un disegno più chiaro, si suggerisce di tracciare una retta che non interseca il triangolo, per quanto il ragionamento proposto resta valido anche nel caso di retta secante il triangolo.

4. Ricava *x*, *y* in quest'ultimo caso e sostituiscile nell'equazione della retta $r: x + 2y + 4 = 0$.

5. Hai ottenuto l'equazione della retta *b*! Riportala qui di seguito: ……………………………….

Per ottenere la retta *a*, ripeti lo stesso ragionamento finora svolto disegnando in un piano cartesiano, un punto *P*, una retta *s'* e il simmetrico $P'$ rispetto a *s'*.

6. Se la retta *s'* ha equazione $y = y_0$, esprimi le coordinate di $P'(x'; y')$ in funzione delle coordinate di $P(x; y)$ e di $x_0$.

7. Scrivi quindi le relazioni che permettono di individuare una simmetria assiale (con asse parallelo all'asse delle ascisse).

8. Nel caso particolare in cui la retta *s'* coincide con l'asse delle *x*, vale a dire $y = 0$, come diventano le equazioni della simmetria?

9. Ricava *x*, *y* in quest'ultimo caso e sostituiscile nell'equazione della retta $r: x + 2y + 4 = 0$.

10. Hai ottenuto l'equazione della retta *a*! Riportala qui di seguito: ……………………………….

Disegna ora un nuovo piano cartesiano, individua un punto generico $P(x; y)$ e un punto $O(x_0; y_0)$ che sarà il centro della simmetria. Costruisci il punto $P'(x'; y')$ simmetrico di *P* rispetto ad *O*.

11. Il punto *O* è il punto …………….. del segmento $PP'$;

12. Sfruttando la condizione precedente, che relazione esiste fra $x; x'; x_0$ e $y; y'; y_0$?

13. Scrivi quindi le due equazioni che ti danno le nuove coordinate di $P'$ in funzione delle coordinate di *P* ed *O*;

14. Ricava *x* e *y* e sostituiscili nella equazione che rappresenta la retta *r*. Considera il caso in cui il punto *O* coincida con l'origine degli assi cartesiani ($x_0 = y_0 = 0$).

15. Hai ottenuto l'equazione della retta *c*! Riportala qui di seguito: ……………………………….

Considera il seguente disegno (Fig. 3). Accanto ad ogni retta, scrivi la relativa equazione in base a quanto appena ottenuto.

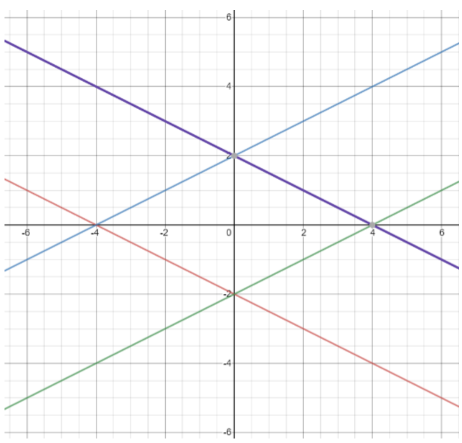

*Fig. 3*

# Scheda studente 3(c): una simmetria dopo l’altra

a) Dato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, sia α la simmetria rispetto all’asse *x* e sia β la simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante. A partire da un punto $P$, si applica prima la simmetria α, ottenendo così un punto $P'$, poi si applica β a $P'$, quindi ancora α al punto ottenuto, poi β, e così via alternando α e β. Dopo quanti passi vi è la certezza che, qualunque sia $P$, il punto tornerà alla posizione iniziale? Per quali punti particolari è possibile tornare alla posizione iniziale dopo 1, 2, 3, … passi?

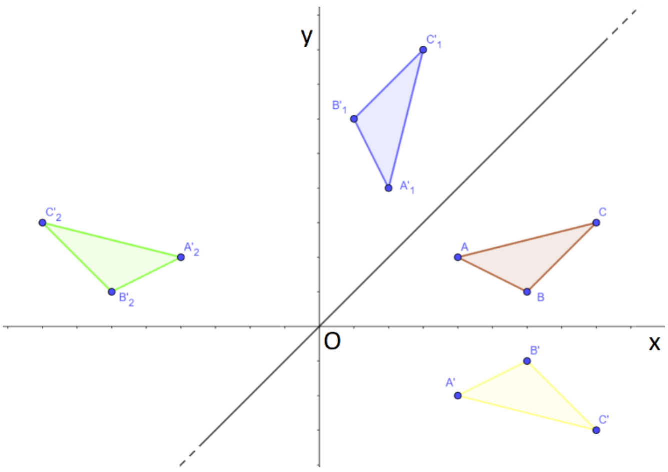


*Fig. 1*

b) Cosa succede se si compongono le precedenti trasformazioni anche con la simmetria di asse y? (In altre parole, si consideri la composizione delle tre simmetrie rispetto all'asse *x*, alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, all'asse *y*).

1. Scegli delle coordinate a tuo piacimento per un punto $P$. Trova il suo simmetrico $P'$ rispetto all’asse *x*; da questo punto trova il simmetrico rispetto alla bisettrice 1° e 3° quadrante per poi applicare nuovamente una simmetria rispetto all’asse *x* e procedi in questo modo fino ad ottenere nuovamente $P$. Quanti passi hai dovuto svolgere prima di tornare al punto di partenza?

2. Esegui gli stessi passaggi, questa volta a partire da delle coordinate generiche per $P$, ad esempio $P(x_0; y_0)$.

Ora considera delle posizioni particolari di $P$ (ad esempio: coincidente con l’origine, sugli assi cartesiani, sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante o su quella del 2° e 4° quadrante) ed applica la successione delle simmetrie.

3. Per ciascuno di questi casi, quanti sono i passi necessari per tornare alla posizione di partenza?

4. Qual è il risultato della composizione delle due simmetrie α e β? Si può parlare di rotazione? In caso affermativo, sapresti determinare l’angolo, il centro e il verso di rotazione?

Consideriamo ora quanto richiesto al punto b) e sia γ la simmetria rispetto all’asse delle *y*. A partire da un generico punto $P(x_0; y_0)$, applica la prima simmetria α trovando $P'$, poi applica la seconda simmetria β trovando $P''$ ed infine applica la terza simmetria γ ottenendo $P'''$.

5. Che relazione esiste fra il punto di partenza $P$ e quello di arrivo $P'''$?

6. Alla luce della risposta data al punto precedente, quanti passi sono necessari, se si compongono nell'ordine le simmetrie $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, per partire da un punto $P$ e tornare al punto di partenza?