ISOMETRIE PASSO PASSO

Presentazione

Questa scheda presenta la traduzione in italiano di una cosiddetta “vignetta”. Essa propone un punto di vista superiore per l’insegnante e possibili argomenti di approfondimento per studenti più motivati.

Le *vignette* sono prodotte nell’ambito del *Progetto Klein* (Klein Project): https://www.mathunion.org/icmi/activities/klein-project/activities/klein-project e si propongono di illustrare alcuni temi recenti di matematica che possano fungere da stimolo per gli insegnanti per trattare argomenti nuovi (http://blog.kleinproject.org/). Alcune di esse sono già state tradotte in italiano a cura dell’UMI (Unione matematica italiana) (https://umi.dm.unibo.it/progetti/klein-project/).

La vignetta qui tradotta presenta la classificazione dei *gruppi di tassellazioni* attribuita a William Thurston e John Conway. Vengono anche illustrati esempi di tassellazioni presenti in alcuni marciapiedi del Portogallo.

La traduzione della vignetta non è stata semplice, per una terminologia non sempre coerente e non chiaramente definita. La classificazione “di Conway” illustrata non appare immediata, perché non sono sempre descritte le figure base, né i punti in cui vengono applicate le varie trasformazioni. In qualche caso abbiamo inserito note, in altri abbiamo tradotto liberamente.

Anche sulle attribuzioni storiche c’è qualche dubbio, perlomeno andrebbero indagate.

La terminologia “caleidoscopio, giro, miracolo, meraviglia” sembra riferirsi talvolta a gruppi di isometrie, altre a singole isometrie. Per chiarimenti segnaliamo le prime 50 pagine del libro di Conway, scaricabile gratuitamente (https://vdocuments.mx/download/the-symmetries-of-things), in cui l’esposizione è più chiara.

Può apparire abbastanza divertente l’idea del “menù”, che attribuisce un costo alle varie isometrie in modo da ottenere un totale di 2, corrispondente al costo di una traslazione. Ma per capirlo occorre essere già a conoscenza delle proprietà della tassellazioni (Link: www.oiler.education/tales/catalogo).

A dire il vero, la vignetta è tratta da un altro contributo dell’autrice, non citato in bibliografia, che spiega tutto in modo più dettagliato della vignetta stessa (Link: https://math.ch/TMU2017/wallpaper_stamps_cannas_wettingen_13september2017.pdf), ma da cui si evince anche la difficoltà di presentare in classe la classificazione di Conway. Infatti il “costo” 2 della traslazione è legato alla caratteristica di Eulero di particolari solidi: le tassellazioni sono qui viste (in un’ottica superiore) come traccia di solidi che rotolano.

La proposta finale della vignetta è di individuare nella propria città esempi di tassellazioni. La condividiamo, suggerendo ovviamente di uscire dal Portogallo!

La vignetta è necessariamente un punto di arrivo di un percorso didattico. Prerequisiti necessari sono:

- isometrie e loro composizione
- figure che tassellano il piano
- gruppi di isometrie che trasformano in sé una figura
- esempi di tassellazioni

Gli argomenti menzionati richiedono attività diverse e a vari livelli, dopo le quali la classificazione di Conway può essere una “ciliegina” finale.

ISOMETRIE PASSO PASSO

Traduzione italiana di "Symmetry step by step"

A cura di Giuliana Massotti, Lorenzo Mazza, Marta Menghini

(Traduzione commentata dell'articolo "Symmetry[1] Step by Step" di Ana Cannas da Silva)[2]
(https://www.mathunion.org/icmi/activities/klein-project/activities/klein-project)

La simmetria affascina da sempre l'umanità ed è da lungo tempo usata in architettura, arte, ingegneria e scienze. Da migliaia di anni motivi con caratteristiche simmetriche sono usati per creare stoffe, cesti, pavimenti, carte da parati, carte da pacchi, ecc.
Alla fine del XIX secolo il matematico e mineralogista russo Yevgraf Fyodorov stabilì che esistono 17 gruppi di isometrie nel piano[3]. Possiamo quindi avere esattamente 17 schemi di tassellazione nelle carte da parati e non di più!
Come è noto, tutti questi modi di tassellare il piano si ritrovano nelle arti decorative dell'antichità.
L'esistenza dei 17 gruppi è stata dimostrata negli anni '80 su base geometrica, utilizzando le conoscenze sull'addizione di frazioni ed alcune nozioni di base di topologia. Tale dimostrazione fu scoperta da Bill Thurston e diffusa da John H. Conway (si veda in proposito la correzione di Marston Conder al termine della vignetta)[4].
Conway creò quindi una terminologia per classificare le idee di Thurston, basata su quattro possibili caratteristiche di un motivo: **caleidoscopio, giro, miracolo e meraviglia,** che verranno brevemente descritte nella Sezione 1.
Oltre a classificare tali caratteristiche dei motivi base, Conway stabilì anche un sistema di notazione con simboli aventi una corrispondenza mnemonica (stella*, cifre, O, croce X). Ciascun gruppo di tassellazione viene quindi associato da Conway e Thurston ad una notazione formata da un'opportuna combinazione di simboli che identificano il gruppo stesso; tale notazione risulta più comprensibile e descrittiva rispetto alle precedenti classificazioni cristallografiche[5].
La classificazione dei gruppi di isometrie piane di Conway e Thurston è esaminata nella Sezione 2 ricorrendo all'aritmetica elementare.
Concludiamo, nella Sezione 3, con uno studio delle pavimentazioni realizzate con ciottoli in alcune aree pedonali in Portogallo e nella passeggiata sul lungomare di Rio de Janeiro (Figura 1 al centro) che probabilmente rappresenta l'esempio più famoso al mondo.

---

[1] In inglese il termine *symmetry* indica in generale un'invarianza per trasformazione, ed è chiarito dall'aggettivo (rotational symmetry, translational symmetry, reflection symmetry), può anche essere riferito a una similitudine (scale symmetry); non è quindi del tutto equivalente al termine italiano *isometria* - che comunque useremo – e che denota una biiezione dal piano in se stesso che conserva la distanza euclidea.
[2] Tutte le note sono dei traduttori.
[3] Più precisamente, 17 gruppi discreti di isometrie piane, il cui sottogruppo delle traslazioni è generato da due elementi indipendenti, che prendono il nome di gruppi di carte da parati (o gruppi cristallografici), essi ricoprono in maniera uniforme e regolare tutto il piano per ripetizione di un modulo.
[4] La nota cui fa riferimento l'autrice afferma che il primo a produrre la dimostrazione fu M. MacBeath 20 anni prima di Thurston e Conway. Tuttavia l'esistenza di soli 17 motivi è nota, e dimostrata, da ben prima di Conway, Thurston, e MacBeath. Quello che questi autori hanno fatto è stato di provarlo in una maniera diversa, riconducibile al concetto di "orbifold".
[5] Parere personale dell'autrice originale.

Figura 1: Pavimentazione della piazza Rossio (Lisbon), passeggiata di Copacabana (Rio de Janeiro) e area pedonale di Belém (Lisbon).

1. Caratteristica di un motivo

• La caratteristica del motivo chiamato **caleidoscopio** indica la presenza di una o più riflessioni (simmetrie assiali) ed ha come simbolo una stella *. Ad esempio una sedia ha soltanto un piano di riflessione (un piano la divide in due parti fra loro specchiate) quindi l'isometria è rappresentata dal simbolo *.

Quando, come in un caleidoscopio[6], si intersecano diversi piani-specchio, indichiamo il numero di specchi che si intersecano in ogni punto. Ad esempio, il marciapiede a rete mostrato nella figura 2 costituito da una griglia, è dotato di numerose simmetrie assiali. Se ci concentriamo su un settore triangolare delimitato da tre specchi (un ottavo di quadrato), chiamato motivo base e ci immaginiamo all'interno di questo triangolo fondamentale, possiamo vedere l'intero marciapiede riprodotto all'infinito. Per riuscire a classificare questi motivi dobbiamo determinare gli angoli di questo triangolo, oppure, che è equivalente, determinare il numero di piani-specchio che si intersecano ad ogni vertice. Ci sono 4 piani-specchio che si intersecano al centro di un quadrato, 4 piani-specchio che si intersecano ad ogni vertice e 2 al centro di ogni lato del quadrato, quindi la notazione (classificazione) della simmetria è * 4 4 2.

Figura 2. Marciapiede in Rua Garrett a Lisbona (Chiado), con notazione ∗ 4 4 2.

[6] Si ha un *caleidoscopio* quando nel motivo compaiono simmetrie definite da una o più riflessioni (specchi).

• Un **giro** non ha assi di simmetria (piani-specchio che riflettono), ma è caratterizzato da angoli di rotazione minimi positivi che sono una frazione di 360 gradi[7]; come nell'esempio del marciapiede della Figura 3, in cui i centri di rotazione corrispondono ai tre punti distinti indicati in figura, i cui angoli sono 360/4, 360/4 e 360/2. La sequenza di simboli associata è formata dai denominatori delle frazioni: 4 4 2.


Figura 3. Marciapiede in Piazza Restauradores a Lisbona, con notazione 4 4 2.

• Il motivo chiamato **Miracolo**, rappresentato da una croce X, si ritrova quando si forma un motivo base non attraversato da alcun asse di simmetria (cioè da alcun piano-specchio) e privo di rotazioni[8].


Figura 4. Marci ıa la cui sequenza di simboli è X X.

• La caratteristica denominata **Meraviglia**, contraddistinta da O, si realizza quando il motivo non presenta nessuna delle caratteristiche precedentemente descritte. Ad esempio il marciapiede in Figura 5, che rappresenta il marciapiede di piazza Restauradores, è concepito secondo una ripetizione orizzontale e verticale di un motivo base e non possiede nessuna delle caratteristiche degli esempi precedenti, quindi il suo simbolo è O.

---

[7] Si ha un giro quando nel motivo compaiono una o più simmetrie rotazionali intorno a un punto.

[8] Si ha un miracolo quando nel motivo si può disegnare un cammino da un particolare alla sua immagine isometrica tale (il cammino) da non intersecare nessuna retta di riflessione del motivo.

Figura 5. Marciapiede con notazione O.

2. Motivi ripetuti nel piano

Una metafora può aiutarci a scoprire i 17 motivi con le loro sequenze di simboli[9]. Immaginiamo che il ristorante Symmetry offra il seguente menu

Piatto del giorno	Prezzo	Combinazione †
O	2	-
*	1	-
cifra *N*	$\frac{N-1}{N}$	$\frac{N-1}{2N}$
X	1	-

† 2, 3, 4,… hanno un 50% di sconto se offerti alla destra di *. Ad esempio, 3 costerebbe 2/3 d'euro ma la combinazione *3 costa solo $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ d'euro.

Immaginiamo che in tempi difficili il budget per il pranzo sia solo di 2 euro. Cosa è possibile mangiare a pranzo utilizzando l'intero budget? Ad esempio, l'opzione * 4 4 2 costa $1 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 2$ euro, mentre l'opzione 2 2 X costa anch'essa $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$ euro.

Teorema magico: i motivi del piano sono equivalenti alle combinazioni di simboli il cui costo totale è esattamente pari a 2.

Quali sono i possibili motivi e da dove viene il teorema magico?

---

[9] Un motivo può avere più caleidoscopi, più giri, più miracoli. La "segnatura" di un motivo è una sequenza di simboli che riassume tutte le caratteristiche del motivo.
Per ogni meraviglia, nella stringa compare una O. Per ogni miracolo, nella stringa compare una X. Per ogni giro, nella stringa compare un numero naturale (se è una rotazione di 360/k gradi, compare il numero k).
Per ogni caleidoscopio, nella stringa compare un asterisco,*, seguito da vari numeri naturali; l'idea è di contare quanti specchi si incontrano in ognuno dei vertici del dominio fondamentale del caleidoscopio (per una semplice simmetria bilaterale si pone solo l'asterisco).
Attribuendo a ogni simbolo che compare nella stringa un peso (secondo una regola opportuna), sommando tutti i pesi si ottiene sempre e soltanto 2.
Questo limita considerevolmente il tipo di motivi ripetuti nel piano che possono darsi: esattamente 17.

Usando il teorema magico, la risposta alla prima domanda non è altro che un esercizio. Va sottolineato che in assenza di stelle, il costo di ogni cifra è pari ad almeno 1/2 ed è sempre inferiore a 1. Di conseguenza, la prima sequenza di simboli senza la stella è

6 3 2, 4 4 2, 3 3 3, 2 2 2 2, X X, 2 2 X, O.

Infatti, supponendo che *a*, *b*, *c* rappresentino cifre, la combinazione * *a b c* costa 2 se *a b c* costa 2. Quindi il precedente elenco è inizialmente associato alle sequenze che iniziano con *:

* 6 3 2, * 4 4 2, * 3 3 3, * 2 2 2 2, * X, * *.

Aggiungendo (a sinistra) frazioni (cioè rotazioni), si possono ottenere sequenze miste:

4 * 2, 3 * 3, 2 * 2 2, 2 2 *

Scopriamo così che ci sono 17 tipi di tassellazioni.
Riguardo alla seconda domanda, il lettore dovrebbe far riferimento al testo [NOS] per scoprire le origini del teorema magico. Il libro [CBG] contiene un'analisi più che completa e delle affascinanti illustrazioni. Tale libro spiega anche in quali spazi sono presenti gli schemi i cui costi sono inferiori a 2, e quelli il cui costo è superiore a 2.

3. La matematica della pavimentazione in ciottoli.

La pavimentazione in ciottoli portoghese fu concepita nel XIX secolo con lo scopo di tenere occupati i prigionieri nel castello di Sao Jorge. Da allora, questa pavimentazione è diventata iconica per la città di Lisbona ed è lo stile più usato per i marciapiedi nelle aree storiche del Portogallo.

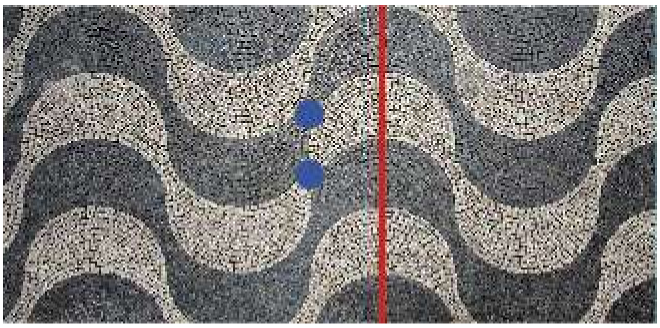

Figura 6. Schema "ondas do mar largo" con sequenza di simboli 2 2 ∗.

Il motivo più famoso *ondas do mar largo* ("onde nel mare aperto") fu usato nel 1849 nella piazza dedicata al re Pedro IV del Portogallo, comunemente noto come *Rossio*, e fu esportato a Copacabana nel 1906 con grande successo (vedi figura 1). Re Pedro IV di Portogallo è stato anche il primo imperatore del Brasile, con il nome di Pedro I.
In *ondas do mar largo* troviamo simmetrie assiali e due tipi di rotazione (centro bianco e nero), nel punto in cui la distanza fra le onde è minore. Quindi la notazione è 22* (vedi Figura 6).
Possiamo trovare tutti gli schemi di tassellazione nei marciapiedi portoghesi?

A Lisbona è stato avviato uno studio per indagare i tipi di tassellazioni presenti nelle pavimentazioni in ciottoli portoghesi con lo scopo di completare l'elenco. La tipologia 4*2 è stata trovata nella città di Guimaraes. I seguenti modelli non sono stati ancora trovati[10]:

632 333 *333 22X O

Il tipo O è illustrato precedentemente (in figura 5), mentre i motivi che non ancora trovati sono illustrati in figura 7. Altri esempi possono essere trovati in [PEF].

Figura 7. Dettagli di un cesto, il ripiano di un tavolo, un'immagine caleidoscopica e una spugna, che illustrano rispettivamente gli schemi di isometrie 6 3 2, 3 3 3, ∗ 3 3 3, 2 2 X.

Incoraggiamo il lettore a ritrovare tali motivi sui marciapiedi nel suo quartiere. L'autrice ringrazia le email di contributo dal mondo!

4. Bibliografia

[CBG] Conway, J. H., H. Burgiel, C. Goodman-Strauss, The Symmetries of Things, A K Peters, 2008.
[NOS] Cannas da Silva, A., Um Novo Olhar Sobre Simetria, http://www.math.ethz.ch/~acannas/Outreach.
[PEF] Padroes em Falta, http://www.math.ethz.ch/~acannas/Outreach.
[SPP] Simetria Passo a Passo – Matematica nas Cal cadas de Lisboa, http://www.math.ist.utl.pt/simetria.
[WPG] Wallpaper Group, http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper group. Department of Mathematics, ETH Zurich, 8092 Zurich Switzerland e Departamento de Matem atica, Instituto Superior Tecnico, 1049-001 Lisboa, Portugal
Work partially supported by the Foundation for Science and Technology (FCT Portugal) and by the Gulbenkian Foundation (Portugal);
Lisbon photos by Joao Ferrand; Figure 7 photos by Dror Bar-Natan.

[10] Il marciapiedi di figura 5 non è evidentemente in ciottoli.