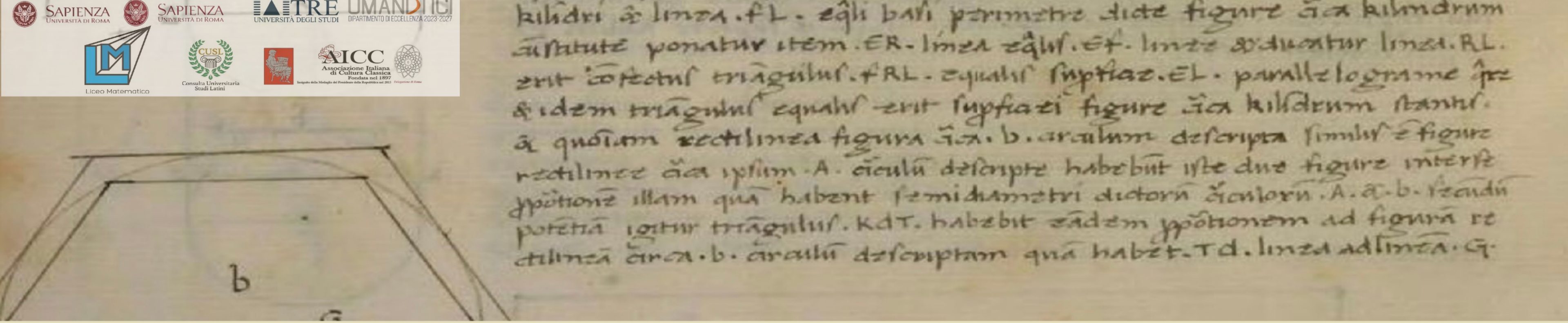


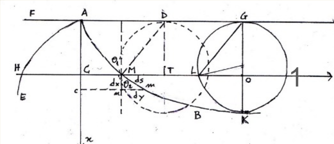
“Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur”: La sfida di J. Bernoulli

(con un “ospite” impossibile)

Un percorso interdisciplinare per il Liceo Matematico

Francesca Coppa - Sapienza, Università di Roma

Piera Filippi, Loredana Morgante - Liceo Scientifico Plinio Seniore, Roma

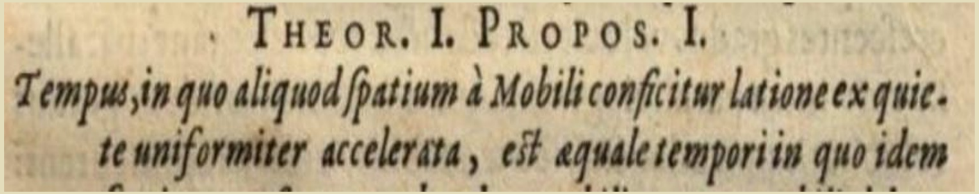


Il percorso nella pratica didattica

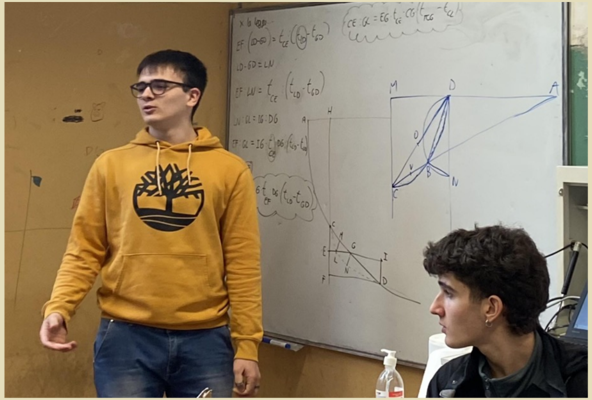
- Il percorso è stato sperimentato nel **Liceo Matematico**:

→ ore aggiuntive; modalità laboratoriale; attività interdisciplinari.

- Il Liceo Matematico riconosce il valore didattico della dimensione storica della Matematica.

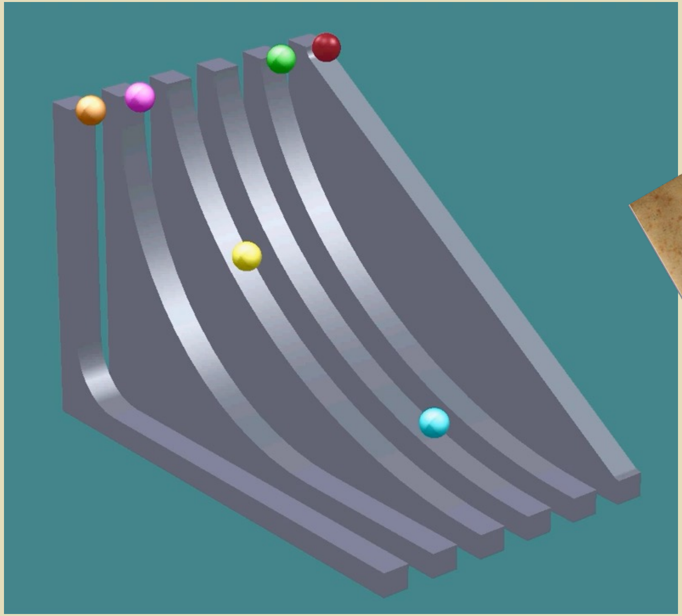

THEOR. I. PROPOS. I.

Tempus, in quo aliquod ſpatium à Mobili conficitur latione ex quiete uniformiter accelerata, eſt æquale tempori in quo idem

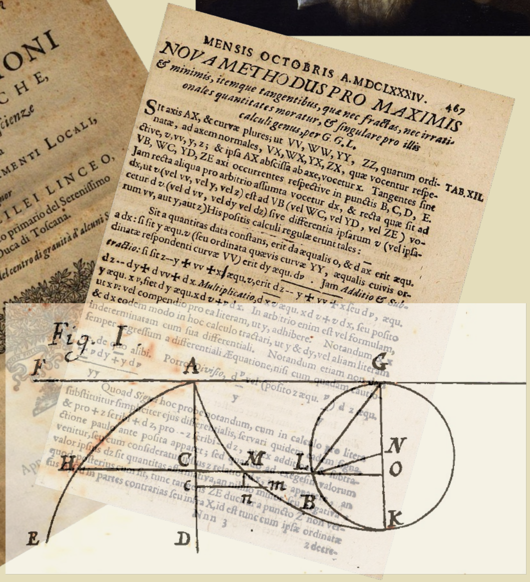


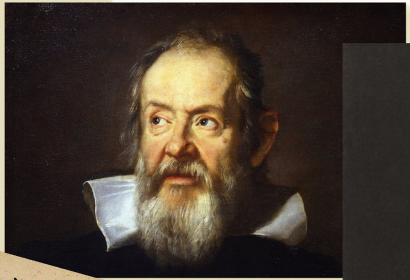
Il percorso didattico: Il *Problema Novum*

Il percorso didattico presenta il problema della **brachistocrona** nella sua **evoluzione storica**.
Rivolto ad una classe **quinta** Liceo.



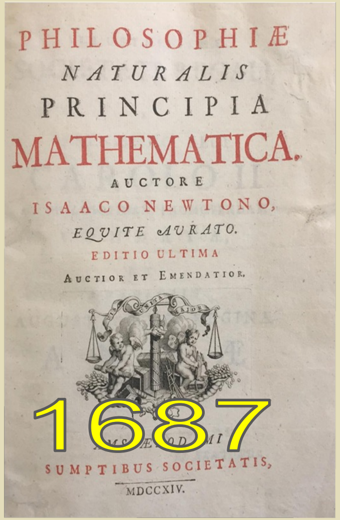

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuove scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.

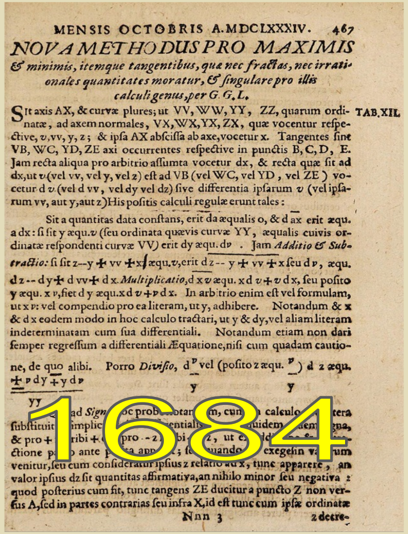

MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467
NOVA METHODUS PRO MAXIMIS
& minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.



Il *Problema Novum*: **motivazioni didattiche**

- Sperimentare il passaggio dalla matematica classica al **calcolo infinitesimale,** attraverso la risoluzione del problema **cinematico**




MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS & minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

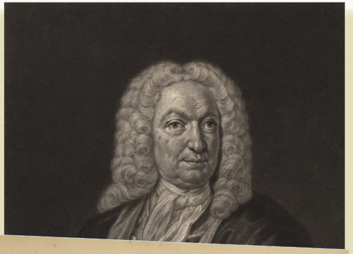
Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d v (vel d vv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

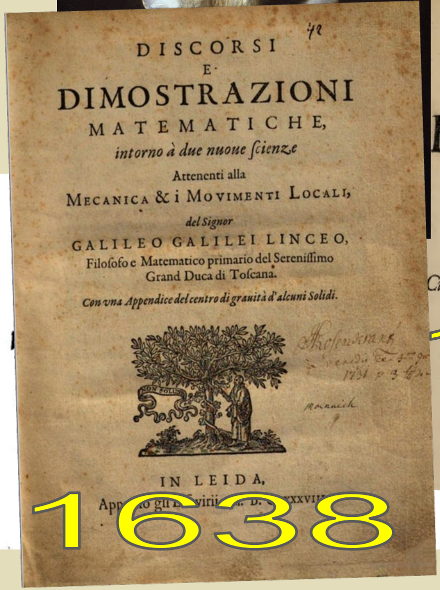
TAB. XII.

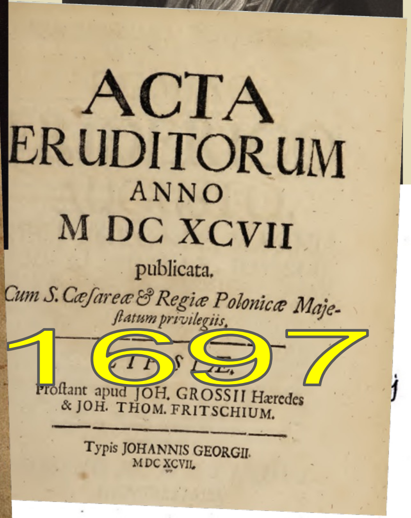
Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu. a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit z -- y + vv + x æqu. v, erit dz -- y + vv + x seu dv, æqu. dz -- dy + d vv + d x. *Multiplicatio*, d x v æqu. x d v + v d x, seu posito y æqu. x v, fiet d y æqu. x d v + v d x. In arbitrio enim est vel formulam, ut x v, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) d z æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

Nnn 3 z decre-





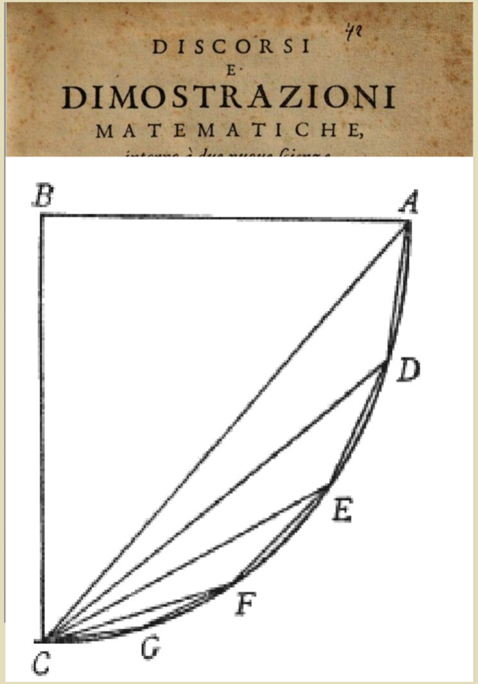


Modulo 1 (8h) *La soluzione di Galilei*

- Nella terza giornata dei “Discorsi e Dimostrazioni” attacca un problema **straordinario**: la curva di minimo tempo di percorrenza: ***colligi posse videtur****…****velocissima…non per brevissimam lineam…sed per circuli portionem fieri.***

- E’ un problema di **minimo** posto in ambito **cinematico**

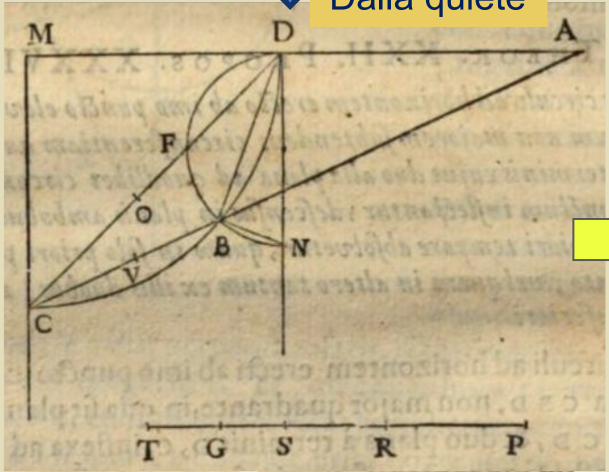
- Pur portando ai limiti delle sue possibilità la matematica classica, deve usare procedimenti nuovi (**infinitesimali**), di cui tuttavia non sa fornire una formalizzazione. **Crisi**.



[...] lo scienziato pisano non saprà uscire rompendo con la matematica classica, neanche quando la teoria degli indivisibili, elaborata dal suo allievo Cavalieri sulla base di evidenti spunti galileiani, gliele darà l’occasione e lo strumento. (E. Giusti)

La soluzione di Galilei

Dalla quiete



ut mox demonſtrabitur. ergo tempus R S majus eſt tempore G T. quod demonſtrare oportebat. Cum verò C F major ſit C B, F D verò minor B A; habebit C D ad D F majorem rationem, quam C A ad A B; ut autem C D ad D F, ita quadratum C O ad quadratum O F; cum ſint C D, D O, D F, proportionales. ut verò C A ad A B, ita quadratum C V ad quadratum V B. ergo C O ad O F majorem rationem habet quam C V ad V B. igitur, ex Lemmate prædicto, C O major eſt quam C V. Conſtat inſuper, tempus per D C ad tempus per D B C, eſſe, ut D O C ad D O cum C V.

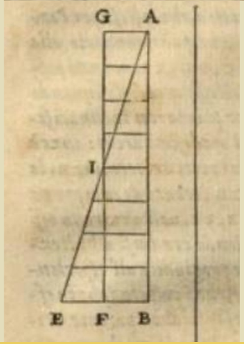
Essendo $t_{DC}=t_{CA}$, che denoteremo con t, si ha:

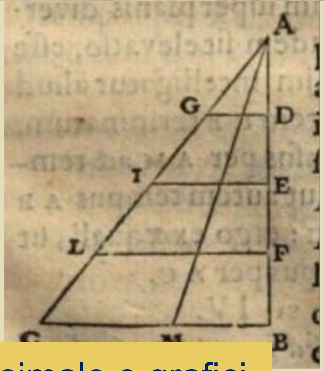
- $T_{FC}:t=(\sqrt{CD}-\sqrt{DF}):\sqrt{DC}$ e $T_{BC}:t=(\sqrt{AC}-\sqrt{AB}):\sqrt{AC}$, da cui segue che:

$$T_{FC}>T_{BC}\Leftrightarrow(\sqrt{CD}-\sqrt{DF}):\sqrt{DC}>(\sqrt{AC}-\sqrt{AB}):\sqrt{AC}$$

Dunque, per arrivare alla tesi, basta dimostrare che:

$1-\sqrt{\frac{DF}{CD}} > 1-\sqrt{\frac{AB}{AC}}$ che equivale a dire che $\frac{DF}{CD}<\frac{AB}{AC}$.





Calcolo infinitesimale e grafici

La soluzione di Galilei

Lettura critica, traduzione e analisi del linguaggio scientifico

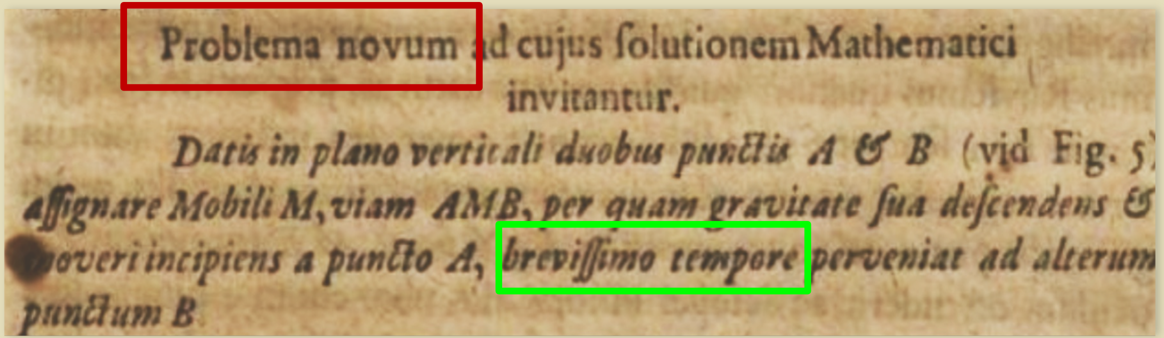
- *Latio-onis - horizontem*
- *Subduplatus - subtendens*
- *celeritatis gradus*
- *momentum velocitatis*
- *celeritatis momenta*
- *motu equabile*
- *motu naturaliter accelerato*
- *gradus sudduplus*
- *numeri impares ab unitate*
- *plano inclinato*
- *mobile*

THEOR. I. PROPOS. I.

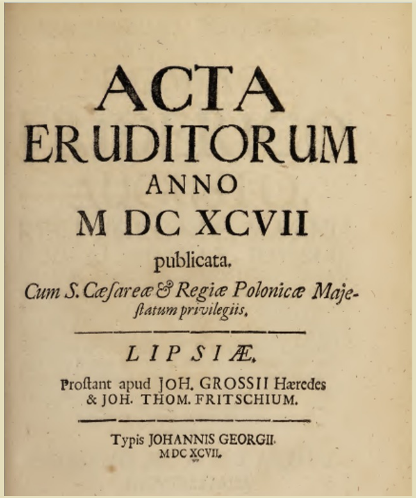
Tempus, in quo aliquod ſpatium à Mobili conficitur latione ex quiete uniformiter accelerata, eſt æquale tempori in quo idem ſpatium conficeretur ab eodem mobili motu æquabili delato, cujus velocitatis gradus ſubduplus ſit ad ſummum & ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati.

Modulo 2 (6h): *La sfida di Johann Bernoulli*
Due proposte di risoluzione

Appena 60 anni dopo la risoluzione di Galilei!


Problema novum ad cujus ſolutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid Fig. 5) aſſignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate ſua deſcendens & moveri incipiens a puncto A, breviſſimo tempore perveniat ad alterum punctum B


ACTA ERUDITORUM ANNO M DC XCVII publicata.

Cum S. Cæſareæ & Regiæ Polonicæ Majeſtatum privilegiis.

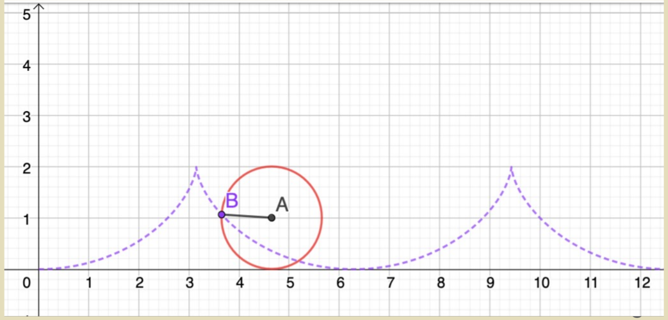
LIPSIÆ,

Proſtant apud JOH. GROSSII Hæredes & JOH. THOM. FRITSCHIUM.

Typis JOHANNIS GEORGII. M DC XCVII.

- ❑ il problema viene risolto utilizzando strumenti di calcolo differenziale: la **brachistocrona** è un ramo di **cicloide!**
- ❑ Analisi e studio della **cicloide** e delle sue proprietà

Acta Eroditurum, periodico mensile, fondato da Otto Mencke e Gottfried Leibniz, pubblicato dal 1682 al 1782 in Germania.



1- La risoluzione di Johann

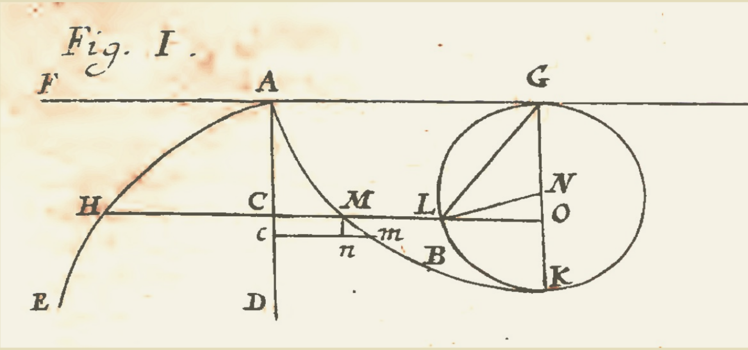
- Il formalismo e le rappresentazioni **grafiche** sono molto più vicine alle attuali

- Dimostrazione: sorprendente analogia **ottica!**

- Uso del principio di **Fermat** e quindi **localmente** della legge di **Snell**

- Usa **legge di caduta di Galilei**

- Soluzione: **equazione differenziale** per una curva (la cicloide)



Fermatius in Epiſtola ad *De la Chambre* (vid. Epiſt. Carteſii Lat. Tom. III, p. 147, & *Fermatii* Opera Mathem. p. 156 ſeqq) ſtabilivit,

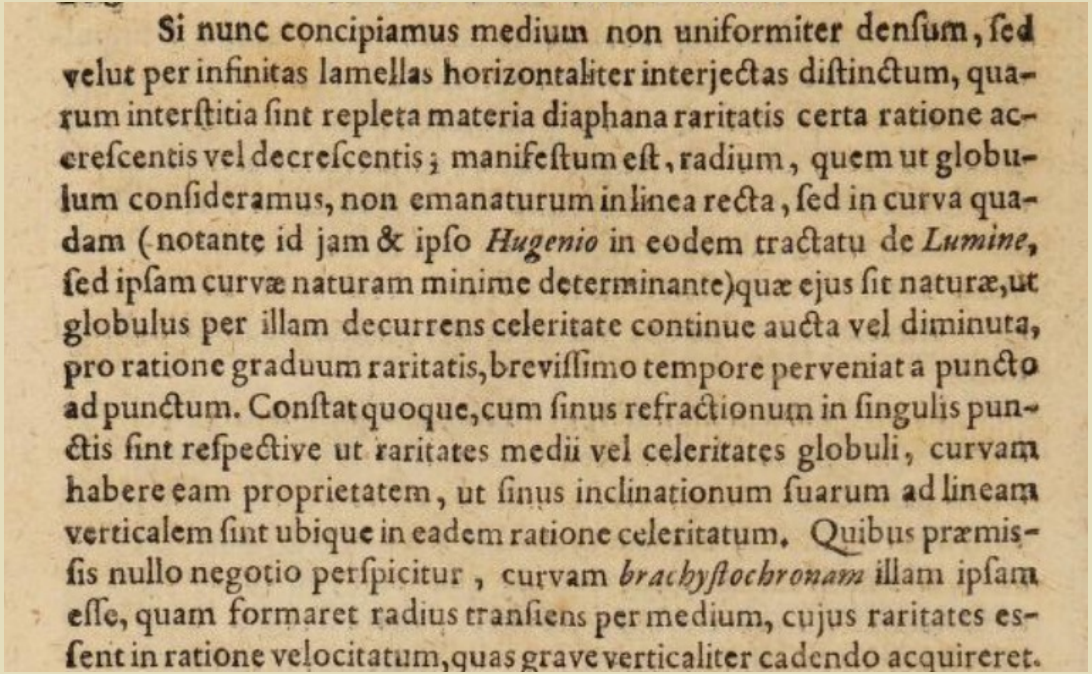
Sumamus jam ſpecialem caſum, & quidem hypotheſin communem a *Galilæo* primitus introductam & demonſtratam, quod velocitates gravium cadentium ſint in ratione ſubduplicata altitudinum emenſarum; in hoc enim proprie quæſtionis tenor conſiſtit. Quo ſup-

ſi ſubſtituantur in æquatione generali, habebitur hæc $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$
ex qua concludo: curvam *Brachyſtochronam* eſſe *Cycloidem vulgarem*.

1- La risoluzione di Johann

Anche da un punto di vista
formale e **lessicale**

- ❑ Ripresa della lezione di Galilei
- ❑ Allontanamento da essa in favore di una lingua latina semplificata e duttile alle esigenze della matematica

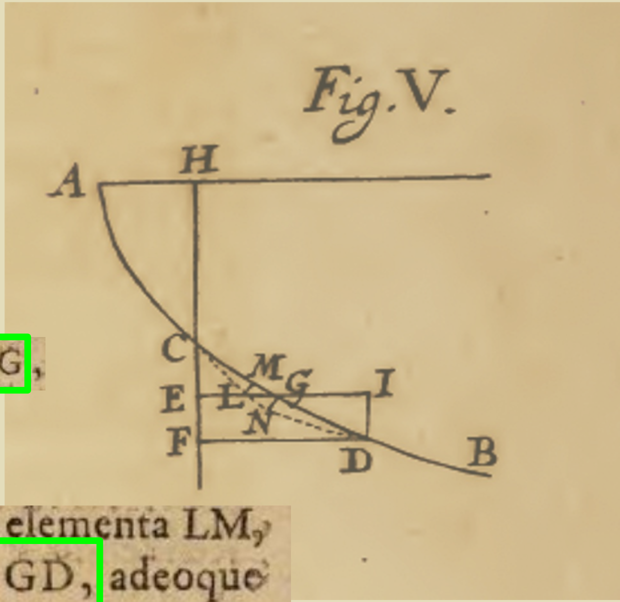

Si nunc concipiamus medium non uniformiter denſum, ſed velut per infinitas lamellas horizontaliter interjectas diſtinctum, quarum interſtitia ſint repleta materia diaphana raritatis certa ratione accreſcentis vel decreſcentis; manifeſtum eſt, radium, quem ut globulum conſideramus, non emanaturum in linea recta, ſed in curva quadam (notante id jam & ipſo *Hugenio* in eodem tractatu de *Lumine*, ſed ipſam curvæ naturam minime determinante) quæ ejus ſit naturæ, ut globulus per illam decurrens celeritate continue aucta vel diminuta, pro ratione graduum raritatis, breviſſimo tempore perveniat a puncto ad punctum. Conſtat quoque, cum ſinus refractionum in ſingulis punctis ſint reſpective ut raritates medii vel celeritates globuli, curvam habere eam proprietatem, ut ſinus inclinationum ſuarum ad lineam verticalem ſint ubique in eadem ratione celeritatum. Quibus præmiſſis nullo negotio perſpicitur, curvam *brachyſtochronam* illam ipſam eſſe, quam formaret radius tranſiens per medium, cujus raritates eſſent in ratione velocitatum, quas grave verticaliter cadendo acquireret.

2- La risoluzione di Jakob

Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo
Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Scienze dell'Antichità
Sapienza Università di Roma
Roma Tre Università degli Studi
Dipartimento di Studi Umanistici
Dipartimento di Eccellenza 2023-2027
Liceo Matematico
CUSL Consulta Universitaria Studi Latini
AICC Associazione Italiana di Cultura Classica
Fondata nel 1897

- ❑ Approccio Geometrico

Lemma: Se la curva ACEDB diventa tale, da essere richiesta, per la quale un grave discendendo giunga da A a B nel **più breve tempo possibile** e in quella siano assunti **due punti vicini a piacere** C e D, dico che la porzione della curva CED è quella di tutte le altre curve terminate nei punti C e D per la quale un grave dopo essere scivolato da A è misurato **in un brevissimo tempo**.



- ❑ Introduzione esplicita dei **differenziali: GL** come differenziale di **EG**.

punctum L, ſic ut GL ſit incomparabiliter minor ipſa EG,

- ❑ Proprietà di minimo della curva e scelta di **L**

DL, ſuper C & D deſcripta concipiantur arcuum elementa LM, erit ex natura minimi $t\,CL + t\,LD = t\,CG + t\,GD$, adeoque

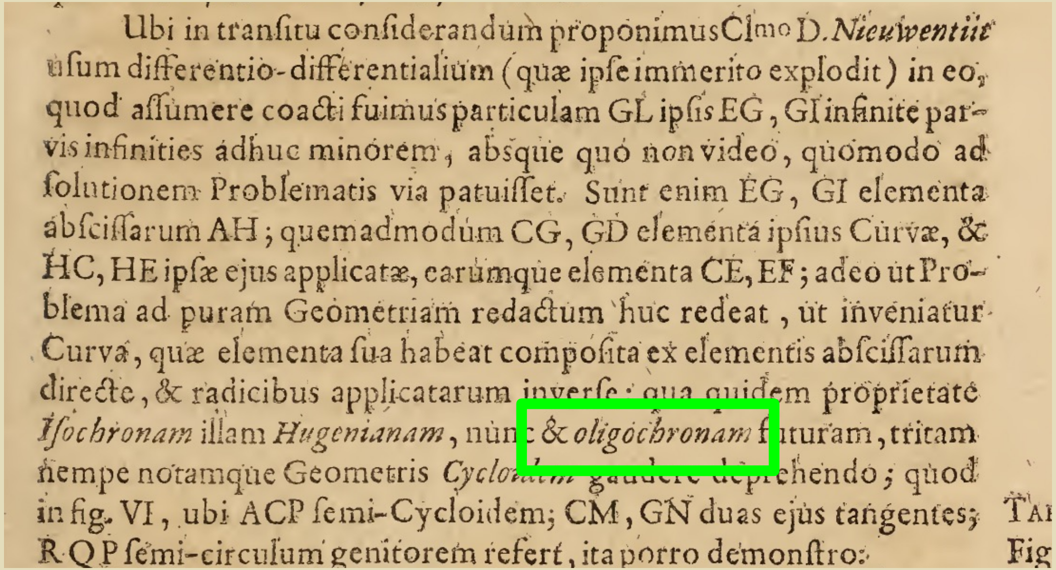
- ❑ legge di caduta di Galilei

EG. CG :: CS.CM :: (ex nat. Cycl.) QS. QP :: RS.RQ :: √RS (√HC) √RP.

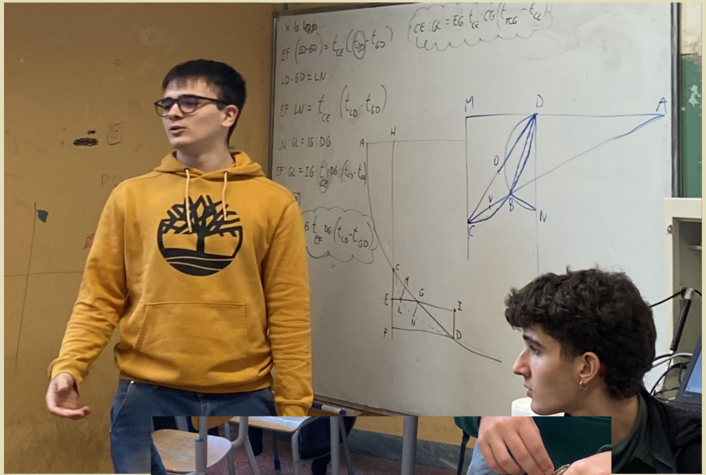
2- La risoluzione di Jakob

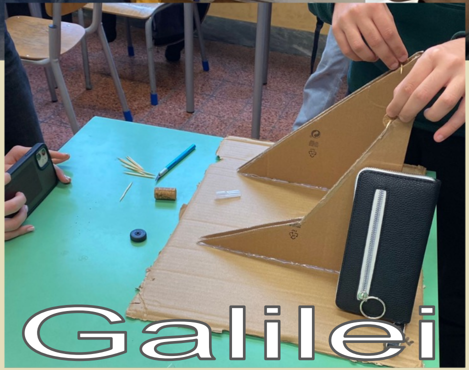
Sia nella struttura sia nell'impostazione linguistica, ricalca quello di Johann

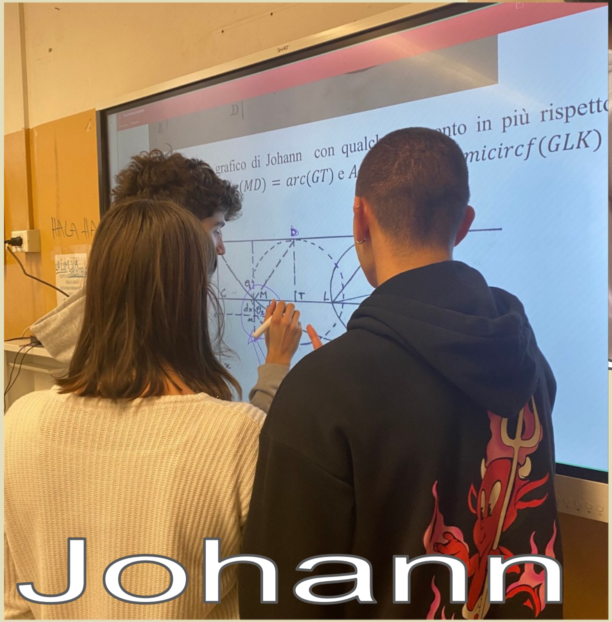
- ❑ Lessico semplificato e specifico
- ❑ Interessante neologismo ***oligocrona*** nel significato di curva più breve


Ubi in tranſitu conſiderandum proponimus Clmo D. *Nieuwentiit*
uſum differentio-differentialium (quæ ipſe immerito explodit) in eo,
quod aſſumere coacti fuimus particulam GL ipſis EG, GI infinite par-
vis infinities adhuc minorem, absque quo non video, quomodo ad
ſolutionem Problematis via patuiſſet. Sunt enim EG, GI elementa
abſciſſarum AH; quemadmodum CG, GD elementa ipſius Curvæ, &
HC, HE ipſæ ejus applicatæ, earumque elementa CE, EF; adeo ut Pro-
blema ad puram Geometriam redactum huc redeat, ut inveniatur
Curva, quæ elementa ſua habeat compoſita ex elementis abſciſſarum
directe, & radicibus applicatarum inverſe: qua quidem proprietate
Iſochronam illam *Hugenianam*, nunc & *oligochronam* futuram, tritam
nempe notamque Geometris *Cycloidem* gaudere deprehendo; quod
in fig. VI, ubi ACP ſemi-Cycloidem; CM, GN duas ejus tangentes; TA
RQP ſemi-circulum genitorem refert, ita porro demonſtro: Fig

Modulo 3 (6h – Debate)
Novissima dissertatio discipulorum!







Il ritorno da parte degli studenti-Sondaggio

- La lingua **latina** è stata vissuta come strumento di **migliore comprensione** dei concetti avvicinandosi al procedimento originale non ricostruito.

- L'analisi **storica** ha permesso di apprezzare il portato delle scoperte scientifiche del '600.

- Sono state indicate altre tematiche di possibile interesse, come: i testi di **Fibonacci**, **geografia**, **medicina** e soprattutto **astronomia**.

- Richiede pianificazione accurata delle attività e delle compresenze

Conclusioni e prospettive future

- E’ possibile introdurre attività didattiche interdisciplinari tra Latino e Matematica nei Licei

- Realizzare percorsi interdisciplinari **latino-matematica** coinvolgendo **più** scuole su tutto il territorio **nazionale già dal prossimo a.s.** definendo percorsi appropriati per tutti i 5 anni.

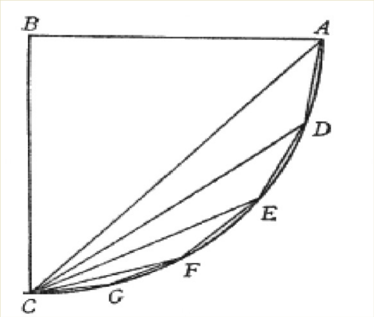
- Il Latino **naturalmente** consente di esportare questo progetto didattico in **Europa,** proponendo progetti **Erasmus +.**

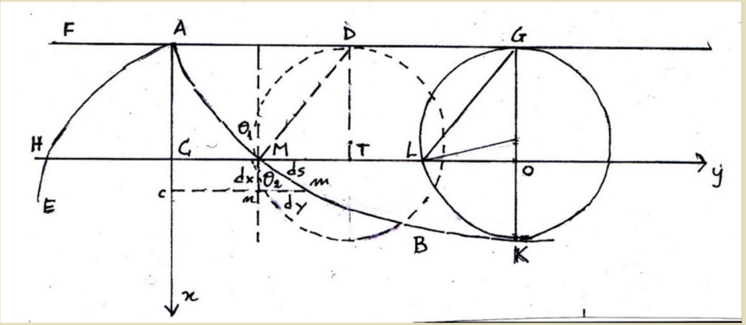
Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo
Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Scienze dell'Antichità
Sapienza Università di Roma
Roma Tre Università degli Studi
Dipartimento di Studi Umanistici
Dipartimento di Eccellenza 2023-2027
Liceo Matematico
CUSL Consulta Universitaria Studi Latini
AICC Associazione Italiana di Cultura Classica Fondata nel 1897

Grazie!

Francesca Coppa - Sapienza, Università di Roma

Piera Filippi, Loredana Morgante - Liceo Scientifico Plinio Seniore, Roma





Bibliografia

Bernoulli Johann, Supplementum Defectus Geometriae Cartesianae circa Inventionem Locorum. Annotata, quaendam in schediasmata Leibnitianum et Tschirnhausianum in ultimo Actorum novemb. Edita de complanatione superficierum conoidearum et sphaeroidearum. Problema novum mathematicis propositum. *Acta eruditorum, 1696, pg 264-269*

Bernoulli Jakob, Solutio problematum fraternorum, Peculiari programmate Cal. Jan 1967 Groningae, nec non Actorum Lips. Mense Junio et Decemb. 1696, et Febr. 1697, propositorum; una cum propositione reciproca aliorum, *Acta eruditorum, 1697, pgg 211-217*

Bernoulli Johann, Curvatura radii in diaphanis non uniformibus,Solutioque Problematis a se in Actis 1696,p. 269, Propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, & de curva Syncronaseuradiorum und contruenda, *Acta eruditorum, 1697, pgg 206-211*

Cresci L., *Le curve celebri. Invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti*, Muzzio, 1998. Padova.

Freguglia P., La geometria tra tradizione e innovazione, Bollati Boringhieri Scienze.

Freguglia P., Giaquinta M., Early aspects and techniques of calculus of variations, Birkhauser.

Freguglia P., Giaquinta M., *Intorno all'idea di curva matematica*, Pitagora Editrice *Bologna*.

Galilei G.,a cura di Enrico Giusti, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Einaudi, 1990.

Galilei G.,a cura di Garuso, Geymonat, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, .

Goldistine, H. H., A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century, Springer Verlag, 1980.