

Partitur figurae linearis aliorum paralleli cetera a rectis aequali numeru h
 eare superficies probati esse eam superficies rectilinee figure circa kilindrum
 drum supra descriptoru. quoniam contentu linea. et. equali lateri
 kilidri a linea. fL. eam basi perimetro dicte figure circa kilindrum
 astatute ponatur item. ER. linea eam. et. linee addatur linea. RL.
 erit contentus triangulus. fRL. equalis superfac. EL. parallelograme
 a idem triangulus equalis erit superfaci figure circa kilindrum stanti.
 a quoniam rectilinea figura circa. b. circulum descripta similis e figure
 rectilinee circa ipsam. A. circulu descripte habebit iste due figure interse
 ppositione illam qua habent semidiametri dictoru circuloru. A. a. b. secundu
 potesta igitur triangulus. KdT. habebit eadem ppositionem ad figuram re
 ctilineam circa. b. circulu descriptam qua habet. Td. linea ad linea. G.

**L'incontro dell'Occidente latino e dell'Oriente arabo:
 le origini medievali della scienza moderna espresse
 con il linguaggio di Leonardo Pisano**

Laura Tomassi
Chiara Bajo

L'approccio storico alla didattica della matematica

“La storia della matematica diventa una componente necessaria del vitale progetto educativo volto a comprendere la nostra natura umana come essenzialmente storica e culturale, e a comprendere che anche le nostre azioni più creative sono possibili solo se ci basiamo su sistemi di pensiero storico-culturali. Proprio come non abbiamo inventato le lingue che siamo arrivati a parlare, non inventiamo (o reinventiamo) la matematica. Incontriamo la matematica, che non ci impedisce di apportare nuovi contributi ad essa. Incontrando la matematica, ci impegniamo in essa, ci divertiamo, assumiamo una posizione critica nei suoi confronti e possiamo espanderla e trasformarla.”

(L. Radford, G. Santi, 2022)



“

“Porre in relazione lo sviluppo del pensiero matematico degli studenti con lo **sviluppo storico concettuale**”.

(L. Radford, 2012)



“



L'origine accessibile

“ [...] come ripeto sempre, il discente deve avere l'origine delle cose perché l'origine è più chiara e più naturale per la sua mente. Noi dobbiamo solo trovare **un materiale che renda l'origine accessibile**”.

(M. Montessori, Conferenza Maggio 1931)

L'origine che prendiamo in considerazione è il XIII secolo, periodo in cui la **Rivoluzione Commerciale** impone la risoluzione di alcune **problematiche matematiche**.



Problematiche matematiche

Problemi di proporzionalità

- Una enorme quantità di misure e sottomisure generalmente diverse da una località a un'altra, e anche, nella stessa località, diverse da merce a merce.

Numeri razionali

- Impossibilità di eseguire le divisioni esatte, cosa indispensabile, ad esempio, nella divisione degli utili tra diversi soci o nel calcolo di una eredità.

Rapporti tra grandezze non omogenee

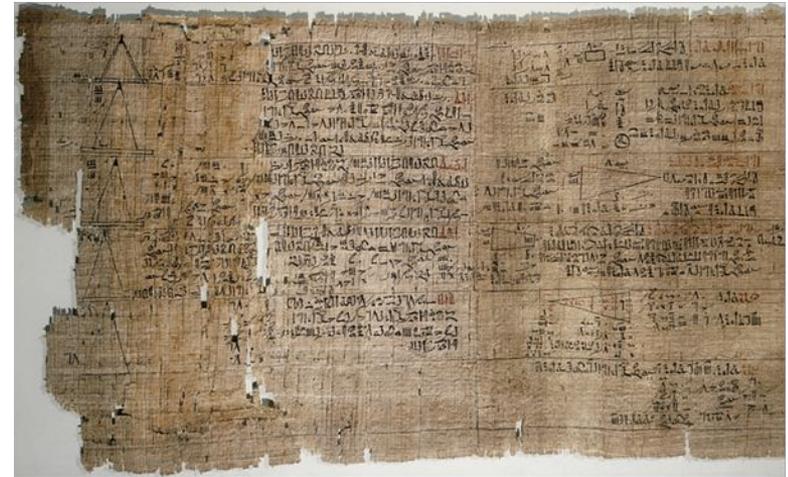
- Definizione di grandezze derivate.





Il pensiero proporzionale

- Il linguaggio delle proporzioni ha descritto matematicamente la realtà molto prima della formalizzazione di Euclide, come testimonia il *papiro di Rhind* (1650 a.C. ca.). (Cartocci, 2007)
- Nel Medioevo acquista enorme importanza sia nella “scienza alta” (Bradwardine, *Tractatus de proportionibus*), sia nell’ambiente delle scuole d’Abaco.
- Tale formalizzazione prosegue anche in epoca moderna, attraverso la *geometrizzazione galileiana* dello spazio fisico. (Napolitani, 1987)



didascalia



Il Liber Abaci (1202)

Primo Libro
d'Abaco, ma
anche trattato
di matematica

Lo scopo era la
formazione dello strato
culturale intermedio che
conosceva il latino ma
aveva capacità di leggere
e scrivere in volgare.





Compiti di realtà storica

- I problemi del *Liber Abaci* come **compiti di realtà storica**: Fibonacci sceglie **oggetti** (*tinea/tina*), **animali** (*equi; coniculi*), **azioni e situazioni** (*baractus*) della vita quotidiana che fanno parte dell'immaginario comune, in modo che i suoi esempi siano comprensibili a Pisa come a Bugia o in qualsiasi altro luogo del mondo allora conosciuto.
- Tale esempi sono volti a fissare la mente su **un tipo di problema matematico, su una procedura** o a **raccontare una realtà** importante per i risultati numerici che produce.
- Problemi astratti o concreti che cominciano col formare il corpo della nuova matematica, nata con l'introduzione dei numeri razionali e dei relativi algoritmi.
- Il racconto permette di **enunciare verbalmente** una sorta di **proto-algebra** nella quale le incognite sono indicate con una locuzione, che ricorre nei diversi passaggi algebrici, al posto di una lettera che la rappresenti simbolicamente.



Scopo dello studio

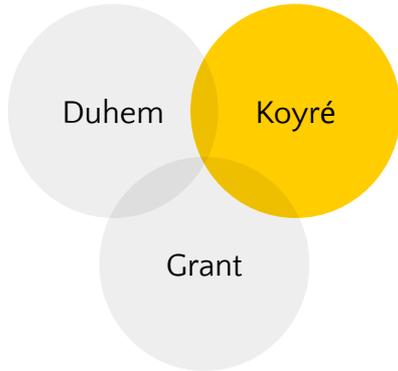
- Le metodologie risolutive espone da Leonardo Pisano, attraverso diagrammi e spiegazioni, sono fonte di ispirazione per attività didattiche atte a formare un pensiero algebrico vivo e consapevole; e rivolte a studenti del primo e secondo biennio del Liceo Classico, nella fattispecie classi seconde e terze.
- Viene presentata una “matematica umanistica”, che si serve della lingua originale in cui è espressa, come traccia per comprendere la complessità culturale esistente nel Medioevo e come strumento per illustrare la ricchezza dell’incontro tra culture, ove si fondano i presupposti per la nascita della scienza moderna.

Ci si domanda

se questa *algebra retorica*, come viene chiamata, non possa essere didatticamente un passo preliminare all’algebra simbolica vera e propria, come è avvenuto storicamente.



Le radici della scienza moderna



Il Medioevo, un terreno fertile dove affondano le radici della modernità

“In altre parole, una rivoluzione scientifica avrebbe mai potuto avvenire nel secondo XVII se, in precedenza, le opere di scienza e di filosofia naturale greco-arabe non fossero state massicciamente tradotte in latino? La risposta sembrava ovvia: no, essa non avrebbe potuto avvenire. Senza quelle traduzioni, molti secoli avrebbero dovuto passare prima che l’Europa potesse raggiungere il livello della scienza greco-araba, con conseguente ritardo di ogni possibile trasformazione della scienza”. (E. Grant, 2017)

Secondo Edward Grant questa età rappresenta “un nuovo inizio” nella sua descrizione delle origini medievali della scienza moderna.



Fonti e risorse



Progetto Fibonacci

<https://www.progettofibonacci.it/index.html>



Almagesto di Tolomeo

<https://books.google.it/books?hl=it&lr=&id=YTbSDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR7&dq=ptolemy+almagesti&ots=DqAVCS4IfM&sig=mH8a7j-AU7k3EwyhUT3-ZWo8Xgs>



Sphaerica di Menelao

<https://archive.org/details/menelaisphaeric00costgoog/page/n4/mode/thumb?view=theater>



Epistola Ameti de proportione et proportionalitate in Ms. S.Marco 184, Biblioteca Medicea Laurenziana
<http://mss.bmlonline.it/s.aspx?Id=AWOS4ux51A4r7GxMdiO&c=ALFONSI%20REGIS%20ET%20ALIORUM%20%5b0%5dPERA%20ASTRONOM%5bICA%5d%20ET%20GEOMETR%5bICA%5d>



Quesiti

1 Quali sono secondo te i legami tra il latino e la matematica? L'USO DELLA LOGICA

2 Quali i legami tra la matematica e la storia? LA MATEMATICA SI È SVILUPPATA NEL CORSO DELLA STORIA. POPOLI DIFFERENTI HANNO FORNITO NUOVE IDEE E UN AVANZAMENTO DELLE CONOSCENZE MATEMATICHE

badando più al contenuto che alla forma

Quali sono secondo te i legami tra il latino e la matematica? L

Quali i legami tra la matematica e la storia?

1) NEL LATINO, COME NELLA MATEMATICA, SONO LA MEMORIA E IL RAGIONAMENTO CHE LAVIAMO MAGGIORMENTE. POSSIAMO CONSIDERARLE MATEMATICHE SIMILI PER IL FATTO CHE IN TUTTE E DUE ABBIAMO REGOLE DI GRAMMATICA DA SAPERE A MEMORIA E PER ANCHE APPLICABILI, PER ESEMPIO SU FRASI E VERSIONI O SU PROBLEMI ED ESPRESSIONI.

2) LA MATEMATICA E LA STORIA SI LEGANO MEZZO NELL'AMBITO DELLA MEMORIA



Forma e materia del libro manoscritto

Lezione propedeutica

Elementi di Paleografia latina e nozioni di Anatomia del libro

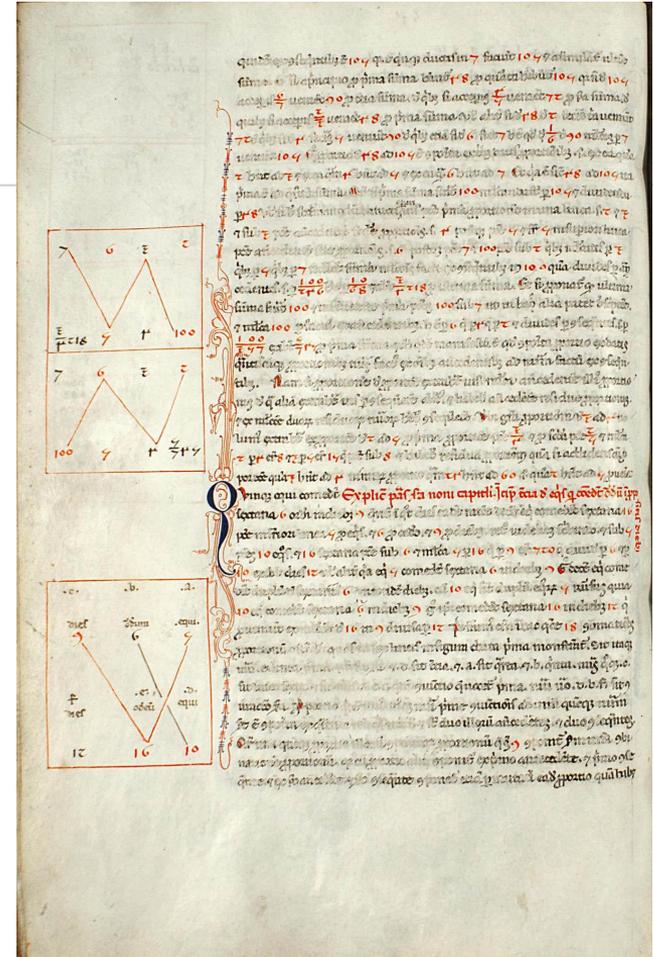
- Forma e dimensioni
- Struttura e fascicolazione
- Supporti scrittori
- Evoluzione delle tipologie di scrittura e miniature
- La grafia dei numeri
- *Scriptoria* e copisti
- Il particolarismo grafico medievale

I manoscritti: storia e possessori

- **Conventi Soppressi C.1. 2616**, Biblioteca Nazionale Centrale, Firenze
- **S.Marco 184**, Biblioteca Medicea Laurenziana, Firenze

Strumenti

- Tavola delle abbreviazioni





Il testo

Fase 1

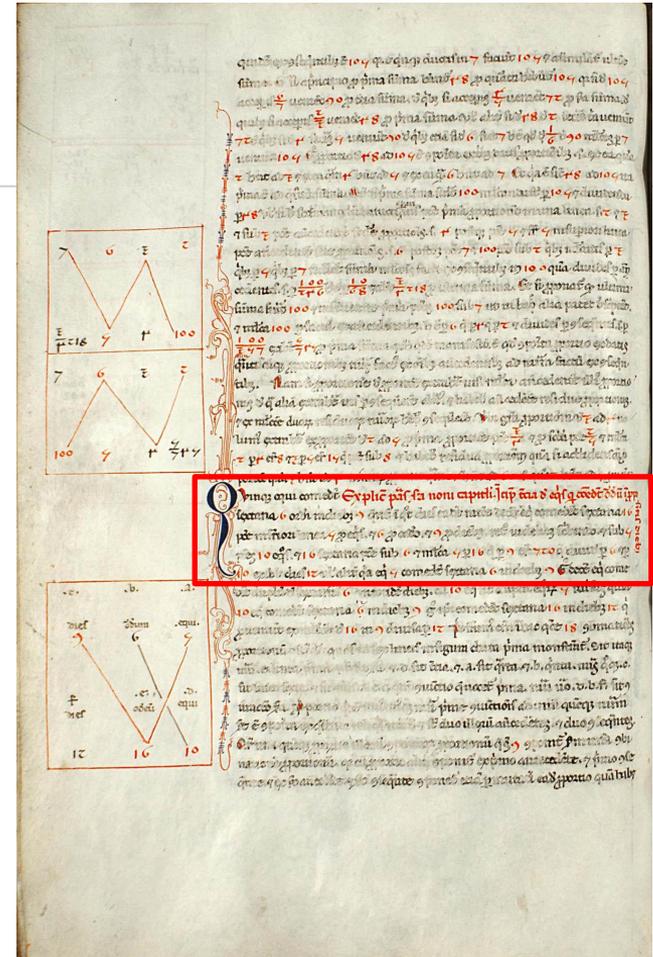
- Prova di lettura e trascrizione dei passaggi utili da manoscritto

Fase 2

- Traduzione delle righe in cui è esposto il problema *De equi qui comedunt ordeum in propositis diebus*

Quesito e soluzione

- **Riesci** a elaborare una soluzione per il quesito proposto?
- **Osserva** la soluzione proposta da Fibonacci nello schema riportato sulla sinistra della figura a margine del manoscritto.
- **Pensi** di saper spiegare il senso di questo diagramma? Ha qualcosa in comune con la soluzione da te fornita?

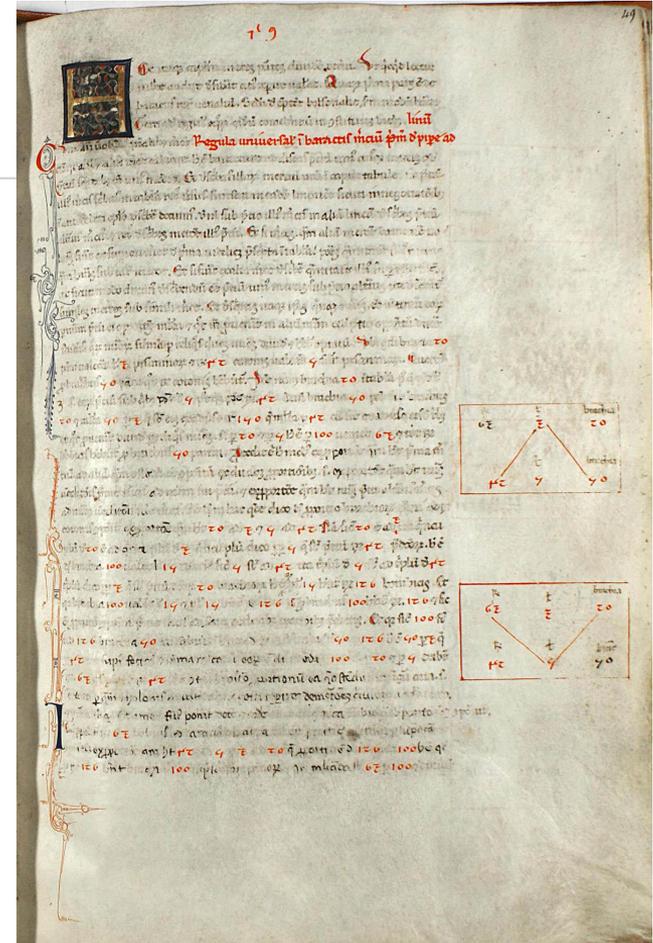




Problemi di ecdotica: critica del testo

Elementi di Paleografia latina e nozioni di Anatomia del libro

- Lo *stemma codicum*
- I testimoni del *Liber Abaci*
- La collazione
- Lezioni, varianti ed errori
- L'apparato critico
- L'edizione critica





Le fonti di Fibonacci

Il ruolo della Geometria

- Vi sono citazioni di scienziati e opere?
- Sapresti individuarle?

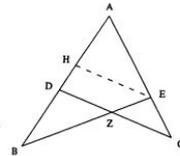


Fig. 1.

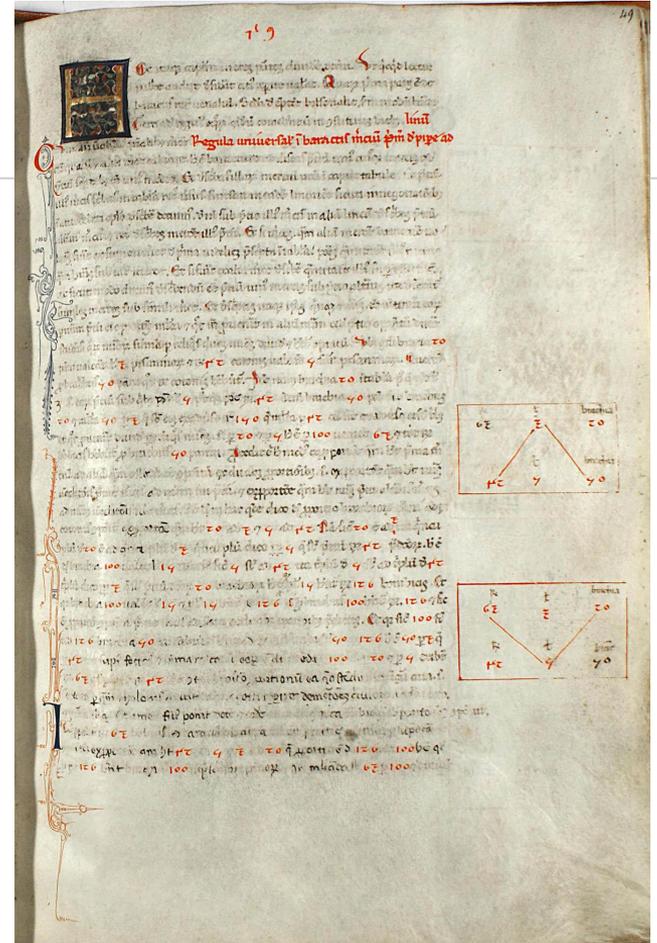
La figura Cata

“trouve son origine dans la fameuse proposition du chapitre XI (« Préliminaires pour les démonstrations sphériques ») du livre I de la Composition mathématique du Almageste dans laquelle Ptolémée énonce un résultat relatif à ce que les mathématiciens arabes puis latins appelleront la « figure sécante » (shakl al-qatta, figura sector). « Si à deux droites AB et AG, on en mène deux autres BE et GD, qui s'entrecroisent au point Z, je dis que la raison de CA à AE est composée de la raison de GD à ZD et de celle de ZB à BE (3)».

(S. Koelblen, 1994)

L'origine

Lo studioso Roshdi Rashed ne dà conto in *Apollonius: Les Coniques*, tome 1.1 : *Livre I*, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 2008.





Ex Arabico in Latinum

La Scuola di Toledo

Denominazione con la quale ci si riferisce al movimento traduttivo di opere scientifiche dall'arabo condotto in Spagna tra il XII e il XIII secolo.

Traduzioni scientifiche e Traduttori

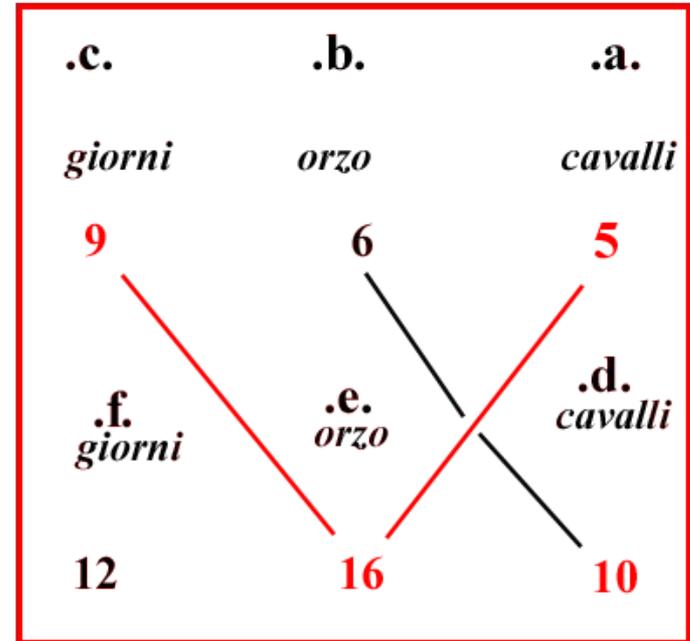
- **Gherardo da Cremona.** Il traduttore più prolifico del Medioevo. Dopo la morte, avvenuta nel 1187, i suoi *socii* redassero la *Commemoratio librorum*, un catalogo di tutte le sue traduzioni.
- **Michele Scoto.** A lui Fibonacci dedica il *Liber Abaci*. Lui compare a Toledo tra i traduttori.





Il senso matematico dello schema

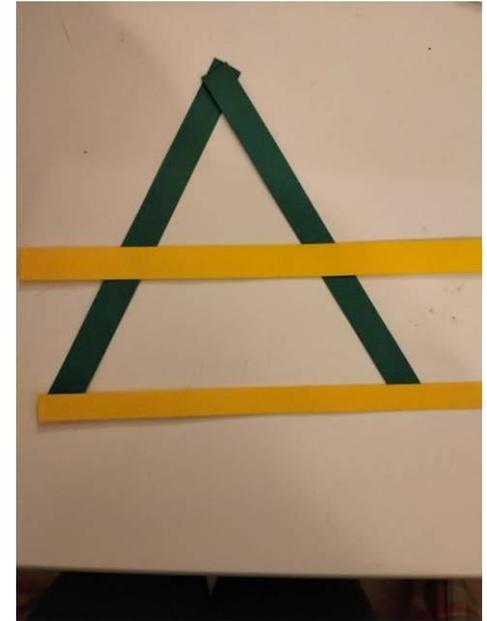
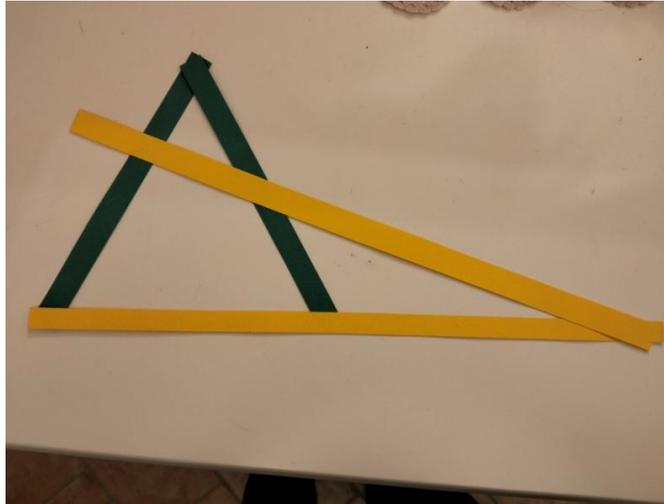
La regola del cinque





Un modello materiale molto semplice

- Questa attività dà conto della parola *sectoris* sinonimo di “cata”.
- Dati 4 listelli si possono considerare delle posizioni reciproche, due delle quali sono molto interessanti perché permettono di formulare dei teoremi che ci rendono conto dei rapporti tra i segmenti che si ottengono dalla *sectio*.





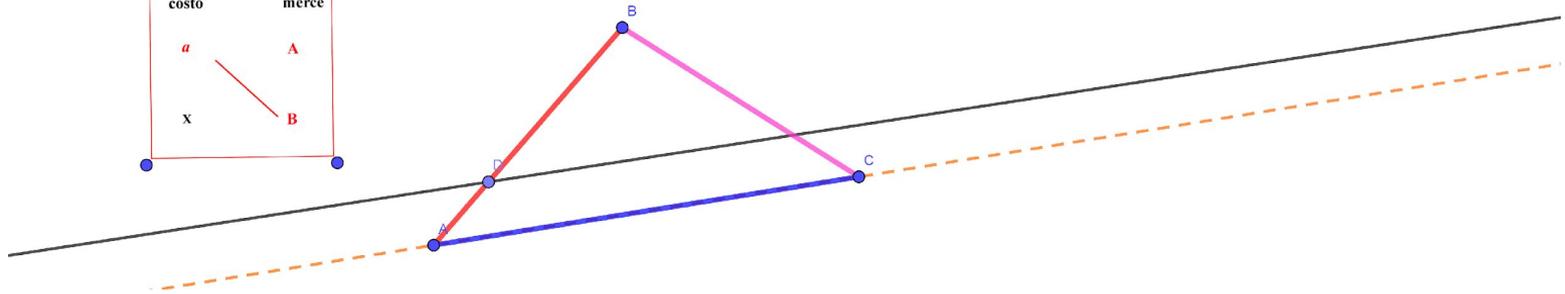
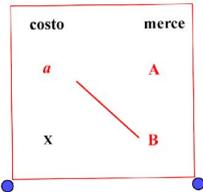
Un modello digitale più generale

TEOREMA DI MENELAO CASO LIMITE TALETE SLIDER.ggb



Attività di geometria dinamica con Geogebra

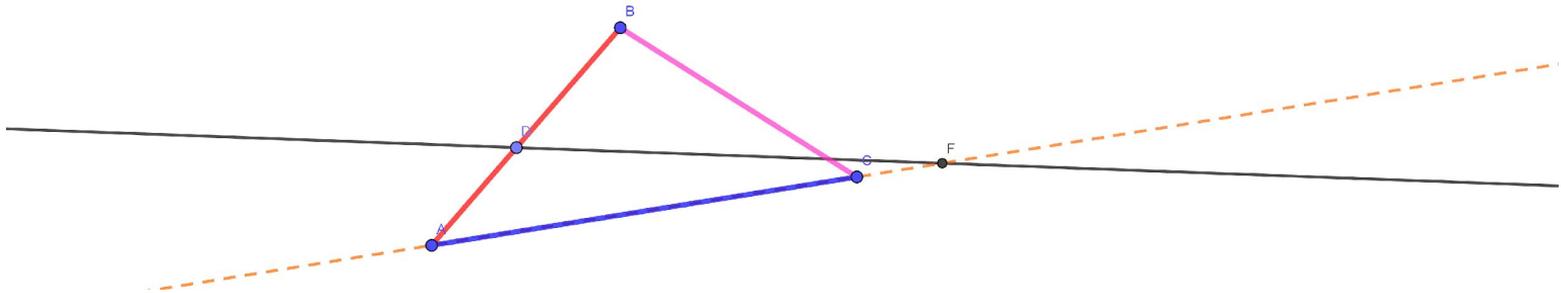
Teorema di Talete:regula arboris (proposizione VI.2 Elementi di Euclide)





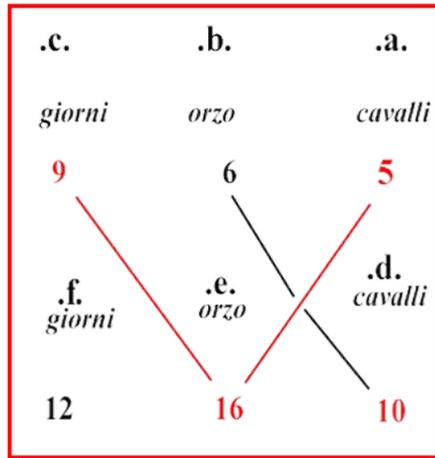
Attività di geometria dinamica con Geogebra

.c.	.b.	.a.
<i>giorni</i>	<i>orzo</i>	<i>cavalli</i>
9	6	5
.f.	.e.	.d.
<i>giorni</i>	<i>orzo</i>	<i>cavalli</i>
12	16	10

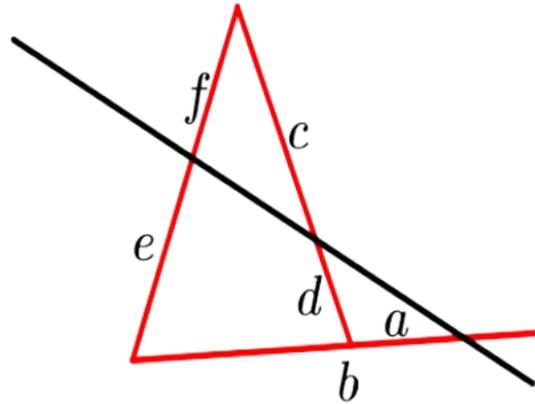




Dobbiamo dimostrare che



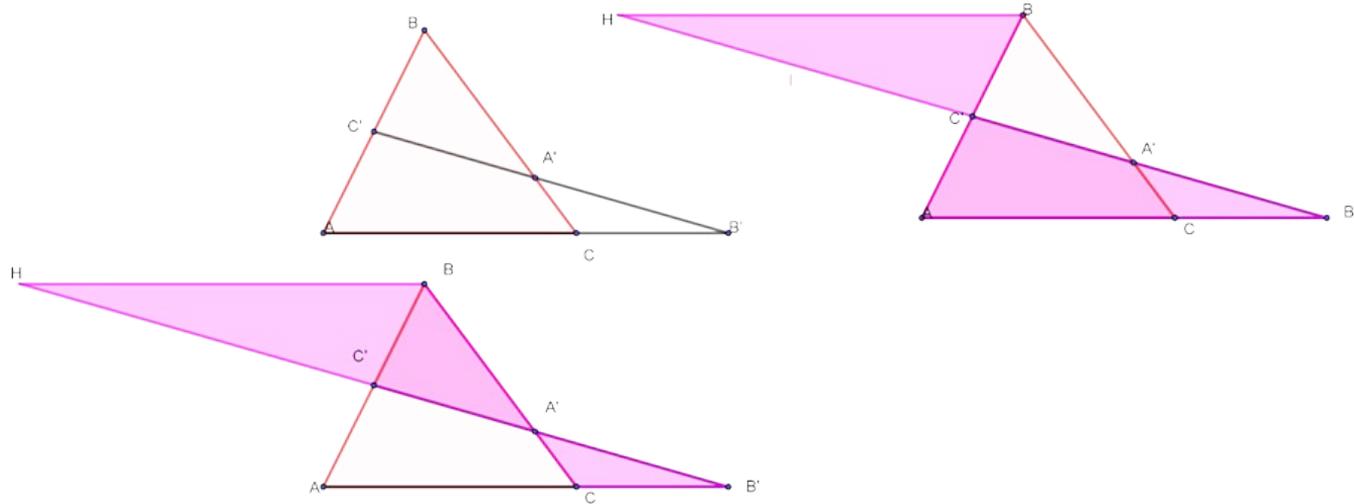
$$a \times e \times c = d \times b \times f$$



$$\frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$



Criteri di dimostrazione





Bibliografia

1. Cartocci, A. (2007). *La matematica degli Egizi: i papiri matematici del Medio Regno*. Firenze University Press.
2. Napolitani, P. I. E. R. (1987). La geometrizzazione della realtà fisica: il peso specifico in Ghetaldi e Galileo. *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 7, 139-237.
3. Radford, L., & Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: prospective teachers conversing with the history of mathematics. *ZDM—Mathematics Education*, 54(7), 1479-1492
4. Grant, E. (2017). *Le origini medievali della scienza moderna*. Giulio Einaudi Editore.
5. Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 6(4), 117-133.
6. Ghione F, Catastini La matematica che trasformò il mondo. Il Liber abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci , Carocci 2023
7. H. Lamar Crosby, Jr., *Thomas of Bradwardine His Tractatus de proportionibus* (Madison, Wis., 1955)
8. Catastini, L., & Ghione, F. (2005). Nella mente di Desargues tra involuzioni e geometria dinamica. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 8(1), 123-147.
9. N. Rozza *Le fonti di Leonardo Fibonacci* Spolia. Journal of Medieval Studies. Periodico telematico = Spolia (2016) 264-81
10. Toomer, G. J. (Ed.). (1998). *Ptolemy's almagest*. Princeton University Press.
11. Koelblen, S. (1994). Une pratique de la composition des raisons dans un exercice de combinatoire. *Revue d'histoire des sciences*, 209-247.
12. Sabine Rommevaux *Les nouvelles théories des rapports mathématiques du XIVe au XVIe siècle* Turnhout, Brepols 2014 pp. 302 (De diversis artibus. Collection de travaux de l'Académie internationale d'histoire des sciences 92)
13. Charles Stuart F. Burnett *Dialectic and Mathematics According to Ahmad ibn Yusuf: A Model for Gerard of Cremona's Programme of Translation and Teaching?* in *Langage, sciences, philosophie au XIIe siècle. Actes de la table ronde internationale organisée les 25 et 26 mars 1998 par le centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales et le programme international de coopération scientifique (France-Japon) «Transmission des sciences et des techniques»* cur. Joël Biard, Paris, Vrin 2000, pp. 83-92
14. Marshall Clagett (ed. trad. comm.) *Archimedes in the Middle Ages I The Arabo-Latin Tradition* Madison, WI, University of Wisconsin Press 1964 pp. XXXII-720
15. R. Rashed, *Apollonius: Les Coniques*, tome 1.1 : *Livre I*, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 2008.



Sitografia

1. Liber Abaci

<https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=1>

2. *Epistola Ameti de proportione et proportionalitate* in Ms. S.Marco 184, Biblioteca Medicea Laurenziana

<http://mss.bmlonline.it/s.aspx?Id=AWOS4ux511A4r7GxMdiQ&c=ALFONSI%20REGIS%20ET%20ALIORUM%20%5b0%5dPERA%20ASTRONOM%5bICA%5d%20ET%20GEOMETR%5bICA%5d>

3. *Sphaerica* di Menelao

<https://archive.org/details/menelaisphaeric00costgoog/page/n4/mode/thumb?view=theater>

4. *Almagesto* di Tolomeo

<https://books.google.it/books?hl=it&lr=&id=YTbSDwAAOBAI&oi=fnd&pg=PR7&dq=ptolemy+almagesti&ots=DqAVCS4lfM&sig=mH8a7j-AU7k3EwyhUT3-ZWo8Xgs>

5. Progetto Fibonacci

<https://www.progettofibonacci.it/index.html>