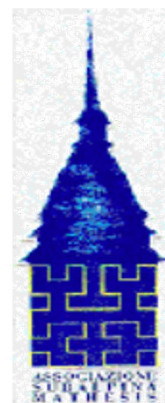




UNIVERSITÀ  
DI TORINO



DIPARTIMENTO  
DI MATEMATICA  
GIUSEPPE PEANO  
UNIVERSITÀ DI TORINO



Progetto Klein Italia



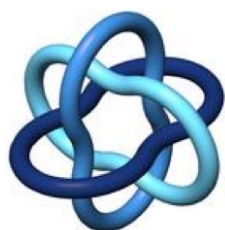
Liceo Matematico

# Dalle 'vignettes Klein' dell'ICMI alle 'proposte Klein' del'UMI

Ferdinando Arzarello e Ornella Robutti  
Università di Torino

Torino 18 maggio 2023

Arzarello & Robutti 2023 - Progetto Klein



International  
Mathematical Union



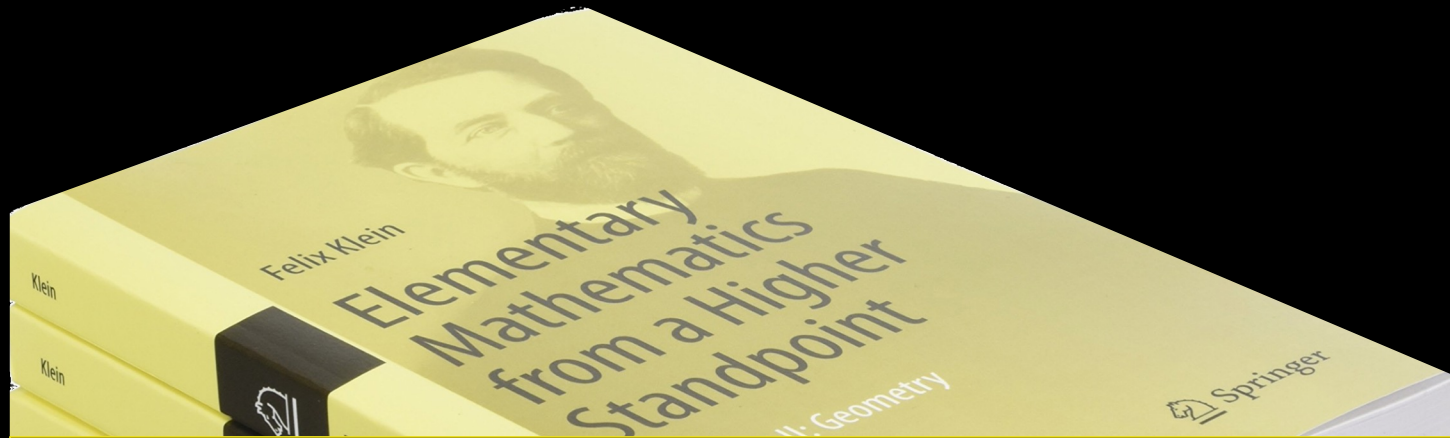
International Commission  
on Mathematical Instruction

# Sommario

- Il progetto dell'ICMI-IMU
- Il progetto dell'UMI-Liceo Matematico
- Esempi:
  - Le isometrie passo passo
  - Matrici e immagini digitali
- Conclusioni

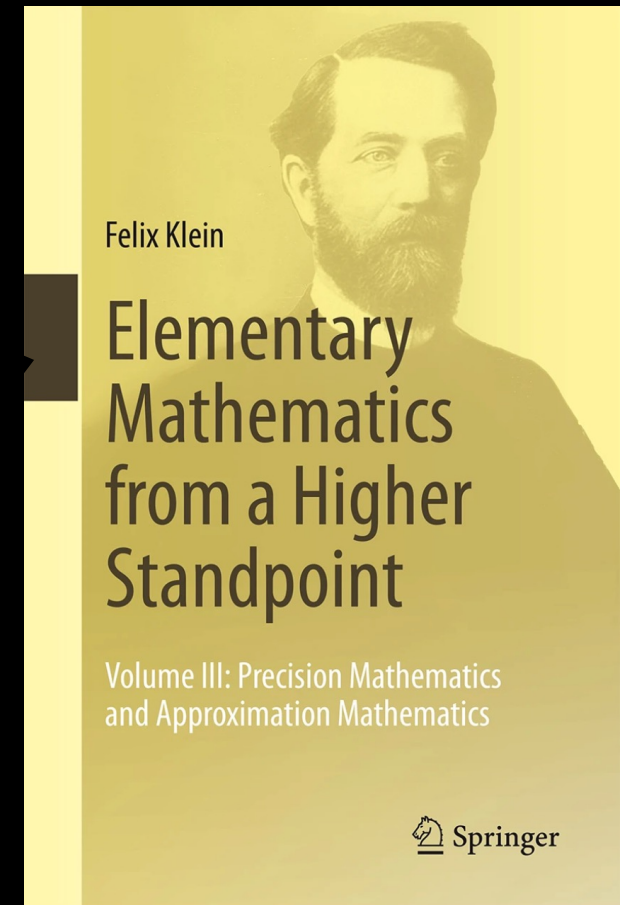
# L'inizio della storia: Felix Klein

1902-1928



“Il mio compito sarà di mostrare le mutue connessioni tra i problemi nei vari campi. [...] Spero che trariate dalla matematica uno stimolo profondo per il vostro insegnamento.”

“Questo libro è pensato solo come uno sprone mentale, non come un manuale dettagliato.”



## Il Progetto dell'ICMI: Klein 21° sec.

- Nasce 100 anni dopo la pubblicazione dei voll. 1, 2;
- Vuole introdurre gli insegnanti agli sviluppi recenti della matematica creando un valido collegamento con la loro attività quotidiana in classe;
- Riguarda la matematica: i suoi temi, i suoi problemi, le sue sfide e le sue applicazioni;
- Si riferisce alla situazione educativa del 21° secolo, che è molto diversa da quella in cui lavorava Klein.



## PK21: come?

- All'inizio fu ideato con l'idea di produrre una versione moderna del libro di Klein con un CD.
- Successivamente si è avuta l'idea di produrre delle "Vignettes" (storie matematiche), rendendole disponibili in un blog.
- L'iniziativa è poi cresciuta con seminari e lavori in differenti parti del mondo, per condividere e coinvolgere le comunità di ricercatori/insegnanti nel progetto.

# Le idee comuni delle “vignettes”

Tipicamente le “vignettes” non superano le 10 pagine e trattano un argomento di matematica “contemporanea” (ultimi 100 anni).

Le “vignettes” si propongono di trasmettere il seguente messaggio:

**La matematica è una disciplina viva all'interno della scienza: non tutto è stato detto e si verificano continuamente nuovi sviluppi.**

**La scienza e la tecnologia offrono problemi alla matematica e la matematica permette nuove scoperte alla scienza e alla tecnologia.**

# Le idee comuni delle “vignettes”

Più precisamente, si propongono di **comunicare**:

- Come lavorano i matematici

- Il potere di un'idea “furba”

- La forza dell'interdisciplinarietà

- Riducendo al minimo gli aspetti tecnici

- Intrecciandosi con la cultura dell'insegnante

- Accompagnando l'insegnante oltre quello che già sa



### Art and Mathematics: Knots and Links

Posted on [March 11, 2022](#) by [admin](#)

CHRISTIAN MERCAT ET MICHÈLE ARTIGUE

Friezes and tilings frequently accompany the teaching of isometries. The objects that we will consider in this vignette, like the one in Figure 1, are not far from them. However, their understanding involves other mathematics: topology and the theory of graphs, which are more recent than geometry. They constitute a fabulous subject to makes you feel and experience the power of mathematics, its delicacy and rigor.



Figure 1. A braid with four ribbons forming a frieze.

English

Receive notice of every new vignette.

Enter your email address.

Email Address

Subscribe

#### List of Vignettes

- [Art and Mathematics: Knots and Links](#)
- [From synthetic geometry to dynamic geometry and back: the case of circular inversion](#)
- [Contribution of the month: Prizes in mathematics, 2020](#)
- [The Enormous Theorem](#)
- [How do I Solve this Equation? Look at the Symmetries! – The Idea behind Galois Theory](#)
- [Trading in a Town](#)
- [How Google works: Markov chains](#)

#### List of Vignettes

- [Art and Mathematics: Knots and Links](#)
- [From synthetic geometry to dynamic geometry and back: the case of circular inversion](#)
- [Contribution of the month: Prizes in mathematics, 2020](#)
- [The Enormous Theorem](#)
- [How do I Solve this Equation? Look at the Symmetries! – The Idea behind Galois Theory](#)
- [Trading in a Town](#)
- [How Google works: Markov chains and eigenvalues](#)
- [Dimension](#)
- [Fair voting: the quest for gold](#)
- [Goodstein Sequences: The Power of a Detour via Infinity](#)
- [Matrices and Digital Images](#)
- [Banach's microscope to find a fixed point](#)
- [What is the way of packing oranges? – Kepler's conjecture on the packing of spheres](#)
- [Higher Dimensions](#)
- [Benford's law: learning to fraud or to detect frauds?](#)
- [Map colouring and Gröbner Bases](#)
- [Symmetry Step by Step](#)
- [Recurrence and induction](#)
- [Trying to predict a floating leaf: chaos and predictions](#)
- [How to get rid of quantifiers?](#)
- [The Revenge of the Infinitesimals](#)
- [Classifying objects](#)
- [The Hairy Ball Theorem](#)
- [Calculators, Power Series and Chebyshev Polynomials](#)
- [The shocking behaviour of moving fluids](#)
- [Public-key cryptography](#)
- [A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves](#)

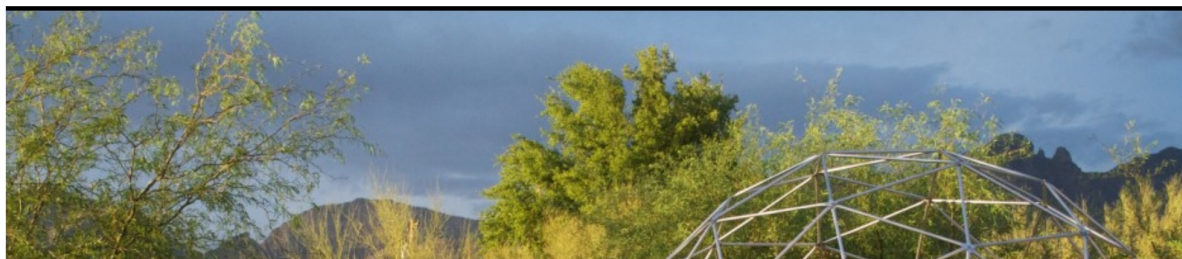
## Sites of the Month

- Site of the Month October: The German Imaginary-Project
- Site of the Month September: The Global Math Project
- The Snapshots Project
- The International Day of Mathematics
- Klein Concert
- Site of the Month: 3Blue1Brown
- Mathematics News
- The Wolfram MathWorld List of Unsolved Problems
- Famous Problems in the History of Mathematics
- Hilbert's Problems
- +Plus Magazine
- Applications of Mathematics
- mathoverflow
- MathWorld
- Mathematical Impressions
- On-Line Encyclopaedia of Integer Sequences
- TEDEd Lessons Worth Sharing
- CultureMATH
- Mathematical Etudes
- The Largest Known Primes
- Imaginary
- Accromath
- The Laboratory of Mathematical Instruments
- Math Here and Now
- Mathematical Association of America
- Mathematics Today
- Bridges
- Mathematikum
- Images des Maths
- Il Giardino di Archimede
- NRICH
- Mathematics of Planet Earth

# www.blog.kleinproject.org

## Klein Project Blog

Connecting mathematical worlds



[Home](#) [About](#) [Contact Us](#) [What is a Klein vignette?](#) [Licence](#)

### Art and Mathematics: Knots and Links

Posted on March 11, 2022 by admin

CHRISTIAN MERCAT ET MICHÈLE ARTIGUE

Friezes and tilings frequently accompany the teaching of isometries. The objects that we will consider in this vignette, like the one in Figure 1, are not far from them. However, their understanding involves other mathematics: topology and the theory of graphs, which are more recent than geometry. They constitute a fabulous subject that makes you feel and experience the power of mathematics, its delicacy and rigor.



Figure 1. A braid with four ribbons forming a frieze.

English

#### Receive notice of every new vignette.

Enter your email address.

Email Address

Subscribe

#### List of Vignettes

- Art and Mathematics: Knots and Links
- From synthetic geometry to dynamic geometry and back: the case of circular inversion
- Contribution of the month: Prizes in mathematics, 2020
- The Enormous Theorem
- How do I Solve this Equation? Look at the Symmetries! – The Idea behind Galois Theory
- Trading in a Town
- How Google works: Markov chains

## Books of the Month

- Book of the month: Felix Klein – Visions for mathematics, applications and teaching
- Book of the month: Étienne Ghys, La petite histoire des flocons de neige.
- A Richer Picture of Mathematics – The Göttingen Tradition and Beyond
- Developing Research in Mathematics Education
- The Legacy of Felix Klein
- Three Volumes of Felix Klein's "Elementary Mathematics from a Higher Standpoint"
- Journey Through Genius
- Unsolved Problems in Number Theory
- Famous Problems in Mathematics
- The Pythagorean Theorem
- Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology
- $E = mc^2$ : A Biography of the World's Most Famous Equation
- Gamma – Exploring Euler's constant
- The Story of Phi
- 4000 Jahre Algebra (4000 Years of Algebra)
- Fantasia Mathematica
- Metamagical Themas
- How To Lie With Statistics
- The Exact Sciences in Antiquity
- The Story of a Number
- Mathematics for the Million
- Historical Topics for the Mathematics Classroom
- Geometry and the Imagination
- The Laboratory of Mathematical Instruments
- Proofs From The Book
- Mathematicians's Delight
- Gödel, Escher, Bach – An Eternal Golden Braid
- Cuentos Con Cuentas
- Mathematical Models



Liceo Matematico

# 2021: il Progetto Klein Italia (UMI)



Progetto Klein Italia

**TRADUZIONE** delle ‘vignettes’ dall’inglese all’italiano, mantenendone la struttura, il tessuto narrativo, le immagini, in modo da renderle fruibili agli insegnanti italiani (lavoro che era iniziato già dal 2013 con M. Panero e M. De Simone come traduttrici di alcune ‘vignettes’).

**TRASPOSIZIONE DIDATTICA** (nel senso di Y. Chevallard) delle ‘vignettes’ in modo da adattarle al contesto culturale e istituzionale della scuola italiana, arricchendole di spunti, immagini, attività, ristrutturandola e aggiungendo le opportune metodologie didattiche.





# 2021: il Progetto Klein Italia (UMI)



Si sono costituiti a fine gennaio 2021 due nutriti gruppi di lavoro, formati da docenti universitari e insegnanti, che hanno scelto di iniziare con la trasposizione delle due 'vignettes' seguenti:

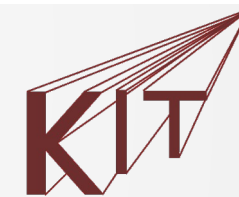
- *Symmetry step by step* (→ *Le isometrie passo passo*)
- *Matrices and Digital Images* (→ *Matrici e Immagini digitali*)

Il lavoro è coordinato da F. Arzarello e O. Robutti, con l'aiuto di A. Montone e L. Tomasi per il gruppo Simmetrie, e di E. Faggiano e M. Mattei per il gruppo Immagini.



Liceo Matematico

# Symmetry step by step



Progetto Klein Italia

## 1. TRADUZIONE (dall'inglese all'italiano)

delle vignette dall'inglese all'italiano, mantenendone la struttura, il tessuto narrativo, le immagini, in modo da renderle fruibili agli insegnanti italiani

### ISOMETRIE PASSO PASSO

#### Traduzione italiana di “Symmetry step by step”

A cura di Giuliana Massotti, Lorenzo Mazza, Marta Menghini

(Traduzione commentata dell'articolo “Symmetry<sup>1</sup> Step by Step” di Ana Cannas da Silva)<sup>2</sup>  
(<https://www.mathunion.org/icmi/activities/klein-project/activities/klein-project>)



ritrovano nelle arti decorative dell'antichità.

La simmetria affascina da sempre l'umanità ed è da lungo tempo usata in architettura, arte, ingegneria e scienze. Da migliaia di anni motivi con caratteristiche simmetriche sono usati per creare stoffe, cesti, pavimenti, carte da parati, carte da pacchi, ecc.

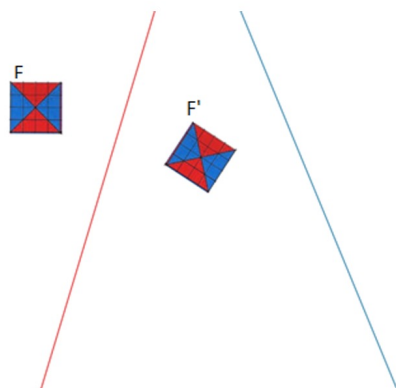
Alla fine del XIX secolo il matematico e mineralogista russo Yevgraf Fyodorov stabilì che esistono 17 gruppi di isometrie nel piano<sup>3</sup>. Possiamo quindi avere esattamente 17 schemi di tassellazione nelle carte da parati e non di più!

Come è noto, tutti questi modi di tassellare il piano si



## 2. TRASPOSIZIONE DIDATTICA (nel senso di Chevallard)

delle vignette in modo da adattare al contesto istituzionale italiano, arricchendole di spunti, immagini, attività, ristrutturandola, aggiungendo le metodologie didattiche



### Scheda studente 3(a): la simmetria assiale e le sue proprietà

Osserva quello che hai fatto nella scheda 2 e rispondi alle seguenti domande:

- Quante volte hai puntato lo spillo per disegnare la figura  $F'$  simmetrica di  $F$  rispetto alla retta di colore rosso? \_\_\_\_\_
- Dove hai puntato lo spillo? \_\_\_\_\_
- Quante volte hai puntato lo spillo per disegnare la figura  $F''$  simmetrica di  $F$  rispetto alla retta di colore blu? \_\_\_\_\_
- Dove hai puntato lo spillo? \_\_\_\_\_
- Racconta come hai fatto per disegnare la figura simmetrica che si ottiene piegando il foglio lungo una retta. \_\_\_\_\_
- Guarda le due figure simmetriche  $F'$  ed  $F''$  rispettivamente rispetto alla retta di colore rosso e alla retta di colore blu.
- Cosa ti sembra che abbiano di uguale? Spiega perché. \_\_\_\_\_
- E cosa ti sembra che abbiano di diverso? Spiega perché. \_\_\_\_\_

# Le isometrie passo a passo



L. Tomasi



O. Robutti



A. Montone

Anna Amirante  
Ilaria Bencivenni  
Luigi Bernardi  
Andrea Bruno  
Federica Ferretti  
Michele Fiorentino  
Flavia Mammana  
Giuliana Massotti  
Lorenzo Mazza  
Marta Menghini  
Michele Pertichino

# Le isometrie passo a passo

18 sezioni

	Contesto matematico
	Contesto reale

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE  SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE  SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE  SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE



# Le 18 sezioni: competenze

Esplora e congettura

Scopri, classifica e generalizza

Risolvi problemi, argomenta e dimostra

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

## I contesti:

- uno interno alla matematica, quello delle figure geometriche e delle loro trasformazioni
- uno esterno alla matematica, nel mondo reale: l'arte, i manufatti, le tassellazioni e i fregi

# Le 18 sezioni: nodi concettuali

1. Traslazione
2. Simmetria assiale
3. Rotazione
4. Glissosimmetria
5. Composizione di isometrie
6. Approfondimenti e problemi

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

Una casella: riga e colonna

Una casella:

- Scheda docente
- Scheda studente

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

Una casella: riga e colonna

Una casella:

- Scheda docente
- Scheda studente

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

# Rotazione + esplora e congettura – scheda docenti

## Obiettivi

- Conoscere le caratteristiche della traslazione come trasformazione del piano e degli elementi che la caratterizzano.
- Applicare traslazioni e altre isometrie per costruire fregi.
- Realizzare un fregio con il software GeoGebra.

## Fase 1:

L'attività si propone di introdurre la traslazione nel piano, partendo dall'idea intuitiva di spostamento per arrivare poi a caratterizzare la traslazione mediante un vettore. Come si evince dalla scheda studente, si introduce la traslazione tramite attività di esplorazione e congettura. Si chiede alla classe di osservare alcuni triangoli disposti nel piano; ciascun insieme di triangoli si ottiene mediante traslazione secondo vettori che possono avere alcune caratteristiche comuni: la direzione, il modulo e il verso.

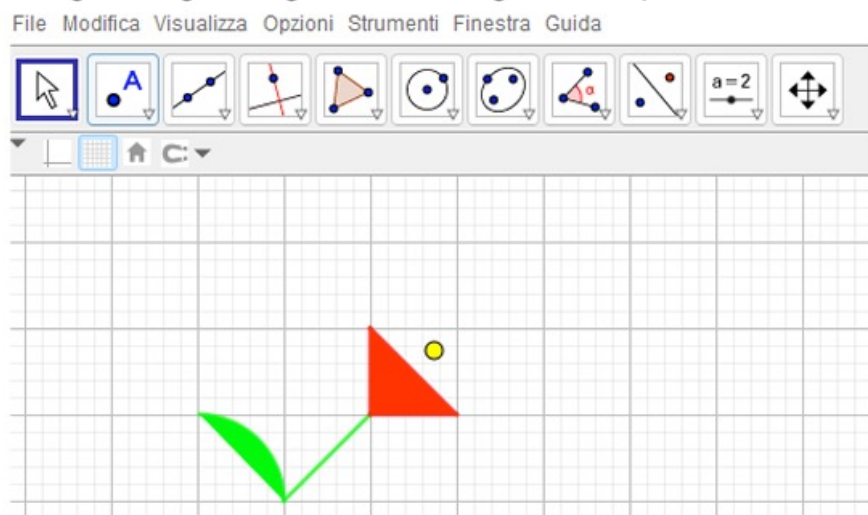
Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE



## Scheda studenti 2(a): realizza il tuo fregio

Apri GeoGebra, nascondi la vista di Algebra e gli assi cartesiani

- Disegna la figura seguente o una figura a tuo piacimento.



Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

# Rotazione + scopri, classifica e generalizza – scheda docente



Lo scopo di una coppia di giocatori/trici A e B è quello di creare una configurazione a piacere procedendo come segue:

**A** traccia una retta a sua scelta unendo due punti;

**B** dovrà tracciare la retta simmetrica a quella disegnata da **A** seguendo la simmetria rispetto all'asse tracciato inizialmente dall'insegnante ed in seguito tracciare un'altra retta a sua scelta;

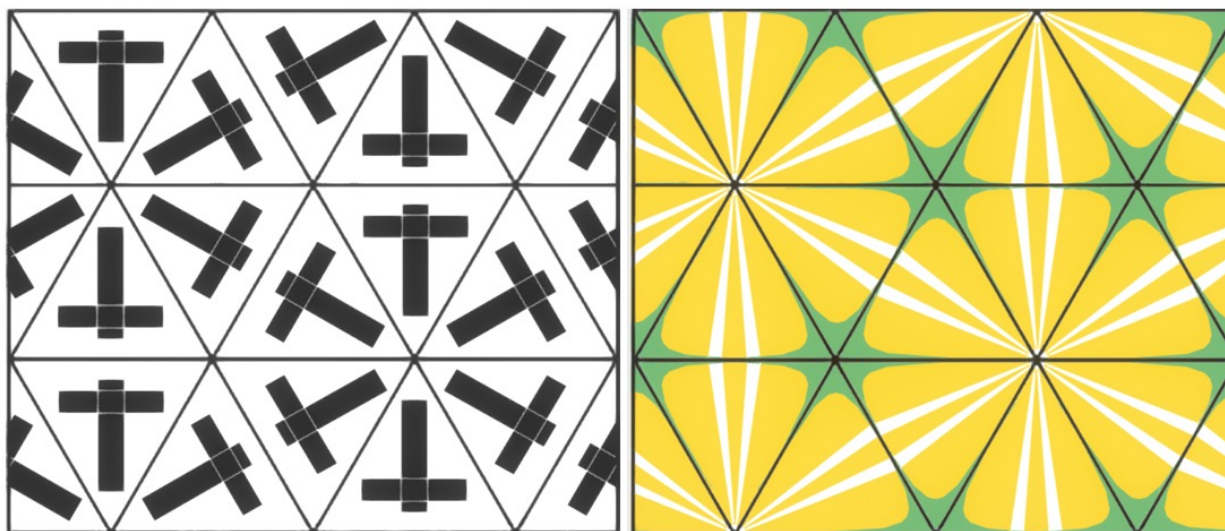
**A**, dopo aver tracciato la retta simmetrica a quest'ultima disegnata da **B**, potrà procedere a disegnare la propria, e così via.

Riportiamo in figura un esempio di giocata parziale:

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

# Rotazione + scopri, classifica e generalizza – scheda studente

**Tassellazione:** sei triangoli equilateri, con rotazioni di  $60^\circ$ , formano un esagono regolare. Gli esagoni regolari tassellano il piano per traslazione.



Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE



# Rotazione + risolvi problemi, argomenta e dimostra - scheda docente



## Introduzione

L'attività esplora la rotazione tramite l'analisi dei rosoni (finestre e motivi circolari con molte simmetrie, tipici nell'architettura e nell'arte).

## Obiettivi dell'attività

Comprende il concetto di n-centro di simmetria.

## Software usato

Rosette Symmetry [<https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/rosette.html>]

## Spazi

aula informatica

## Tempo medio per svolgere l'attività in classe

2 ore

## Modalità

In presenza o a distanza

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

# Rotazione + risolvi problemi, argomenta e dimostra - scheda studente

1. Individua simmetrie e rotazioni del seguente rosone, quindi riprodurlo completamente o in parte, tenendo conto delle isometrie che hai individuato.



Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE



# Comp. di isometrie + scopri, classifica e generalizza - scheda docente

## Introduzione

L'attività si concentra sulle **tassellazioni del piano**. Anche nel caso delle tassellazioni del piano abbiamo vari gruppi di isometrie possibili che corrispondono alle diverse modalità secondo cui le figure si ripetono nel piano. Nel caso delle tassellazioni del piano i gruppi di isometrie - oggetto di indagine delle varie attività - sono 17.

## Obiettivi dell'attività

- scoprire le isometrie nel piano, anche nel mondo della realtà e dell'arte;
- classificare le isometrie del piano, utilizzando un software di supporto;
- generalizzare le caratteristiche e le proprietà delle isometrie del piano per collocarle in una classificazione completa

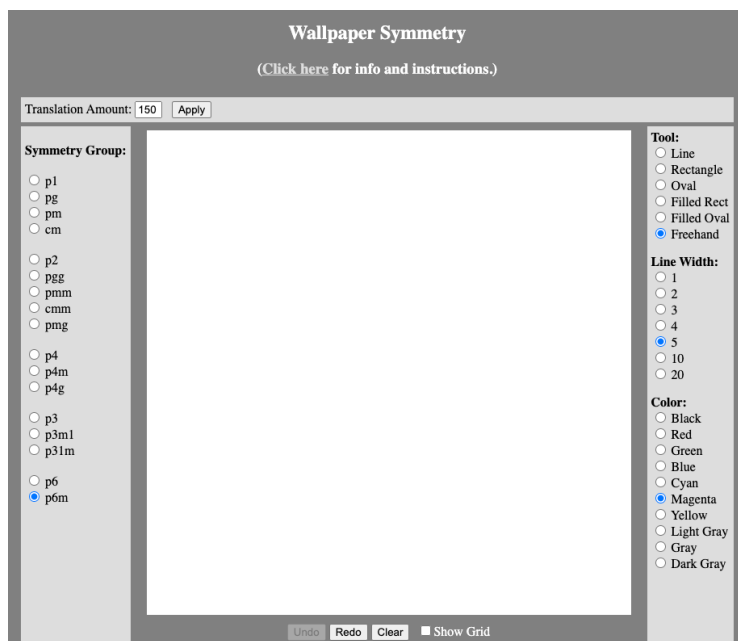
Usando il software **Wallpaper Symmetry** [<https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html>]

descrivere come agisce il gruppo di isometria **PM**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

# Comp. di isometrie + scopri, classifica e generalizza - scheda docente



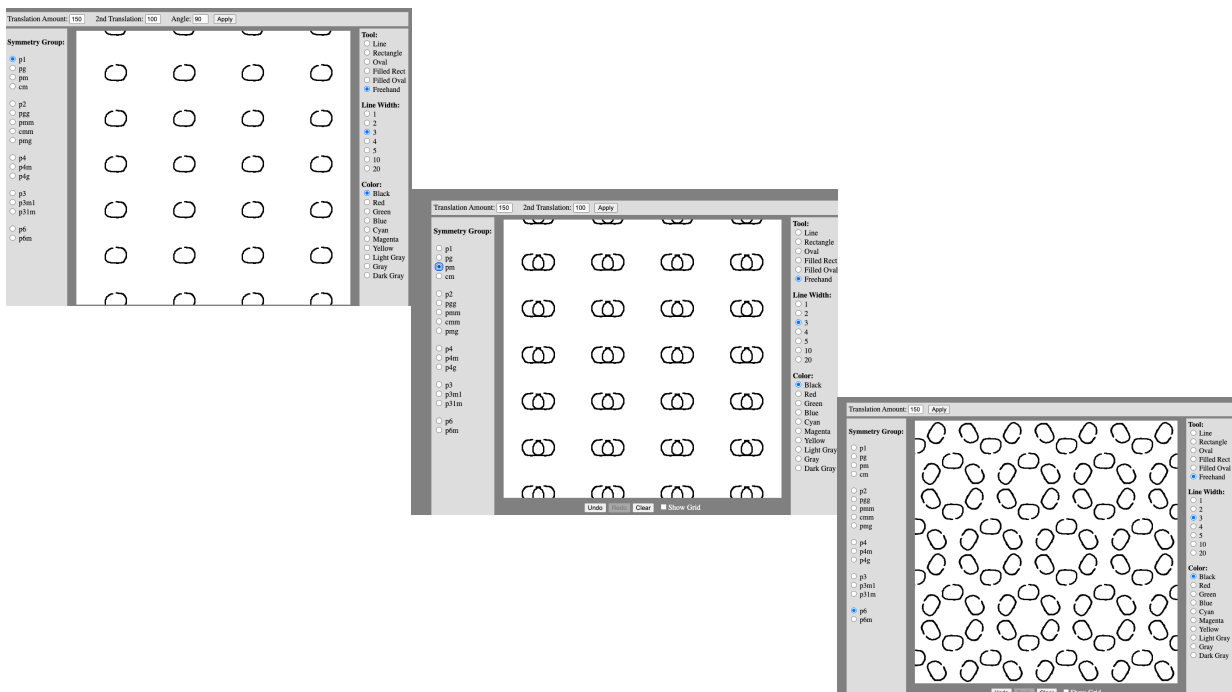
## Wallpaper Symmetry

<https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html>

Arzarello & Robutti 2023 - Progetto Klein

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

# Comp. di isometrie + scopri, classifica e generalizza - scheda studente



Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE


Apri il software **Wallpaper Symmetry** [\[https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html\]](https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html) seleziona a destra lo strumento *freehand* e fai un semplice disegno che non abbia simmetrie. Seleziona, a destra, il gruppo di isometria **P1** e descrivi le proprietà di simmetria della tassellazione ottenuta. Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?



# Comp. di isometrie + scopri, classifica e generalizza - scheda studente

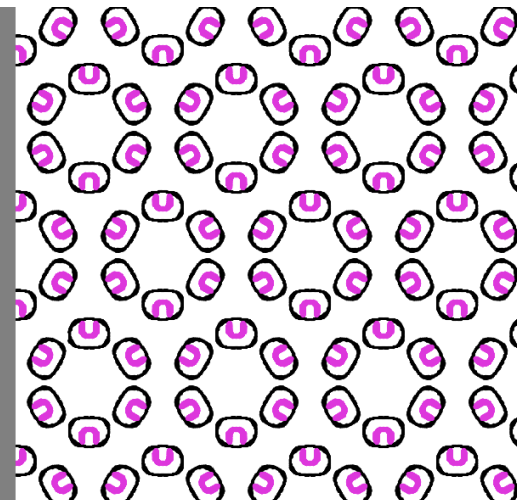
Symmetry Group:

- p1
- pg
- pm
- cm
- 
- p2
- pgg
- pmm
- cmm
- pmg
- 
- p4
- p4m
- p4g
- 
- p3
- p3m1
- p31m
- 
- p6
- p6m



Symmetry Group:

- p1
- pg
- pm
- cm
- 
- p2
- pgg
- pmm
- cmm
- pmg
- 
- p4
- p4m
- p4g
- 
- p3
- p3m1
- p31m
- 
- p6
- p6m



Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie			
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE



# Approfondimenti e problemi + esplorazione e congettura – scheda docente



## Introduzione

Questa attività ha lo scopo di guidare gli studenti verso la conoscenza di alcune delle principali caratteristiche delle isometrie dello spazio (tridimensionale), attraverso un approccio di esplorazione, scoperta e congettura, con l'ausilio del software GeoGebra.

## Obiettivi

Conoscere le proprietà fondamentali delle isometrie dello spazio e di alcune composizioni di isometrie.

## Destinatari

Studenti del secondo biennio della scuola secondaria di II grado (preferibilmente classe IV, dopo aver introdotto alcune nozioni di geometria dello spazio).

## Software usato

GeoGebra classico 5 - vista Grafici 3D / GeoGebra Classroom

## Prerequisiti

Conoscenza degli elementi di base della geometria dello spazio e del software GeoGebra (vista Grafici 3D).

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE



# Approfondimenti e problemi + scopri, classifica e generalizza – scheda docente



## Introduzione

Questa attività ha lo scopo di guidare gli studenti/esse allo studio della composizione di isometrie 3D (dello spazio tridimensionale) e alla classificazione delle isometrie dello spazio, attraverso un approccio di scoperta, con l'aiuto del software GeoGebra.

## Obiettivi

Conoscere come si ottengono tutte le isometrie dello spazio mediante la composizione di al più quattro simmetrie planari e classificare le isometrie 3D.

## Destinatari

Studenti del Secondo biennio della Scuola secondaria di II grado (preferibilmente classe IV, dopo aver introdotto alcune nozioni di geometria dello spazio).

## Software usato

GeoGebra 5 classico-vista Grafici 3D / GeoGebra Classroom

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA STUDENTE

# Approfondimenti e problemi + esplora e congettura – scheda studente

## SIMMETRIA PLANARE

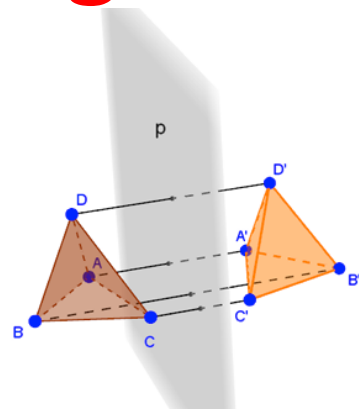


Figura 2

Quanto hai visto permette di comprendere una proprietà fondamentale delle simmetrie planari: esse cambiano l'ordine delle lettere in una parola e capovolgono l'ordinamento nello spazio.

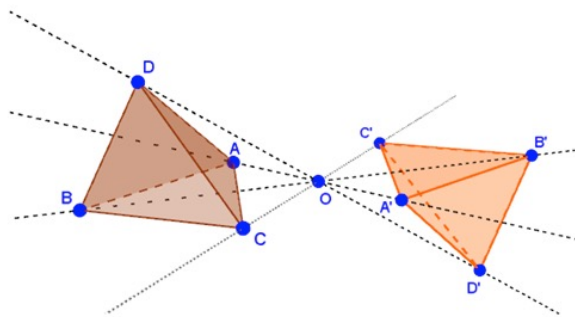
L'immagine della mano destra tramite una simmetria planare (specchio piano) è ..... la mano.....



Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

# Approfondimenti e problemi + esplorazione e congettura – scheda studente

## SIMMETRIA CENTRALE



Quanto hai visto permette di comprendere una proprietà fondamentale delle simmetrie centrale (3D): esse sono diverse dalle simmetrie centrali nel piano.

Rispetto a una *Simmetria centrale* (3D) l'immagine della mano destra rispetto al punto O (nello spazio) è la mano .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) una retta si trasforma in una .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) un piano si trasforma in un .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) una retta passante per il centro di simmetria si trasforma in .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) un piano passante per il centro di simmetria si trasforma in .....

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) un triangolo ABC (orientato in verso antiorario) si trasforma in

Competenze			
Isometrie	<b>Esplora e congettura</b>	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
<b>APPROFONDIMENTI E PROBLEMI</b>	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE

## Scheda studente 2(a): Composizione di due simmetrie planari con piani incidenti

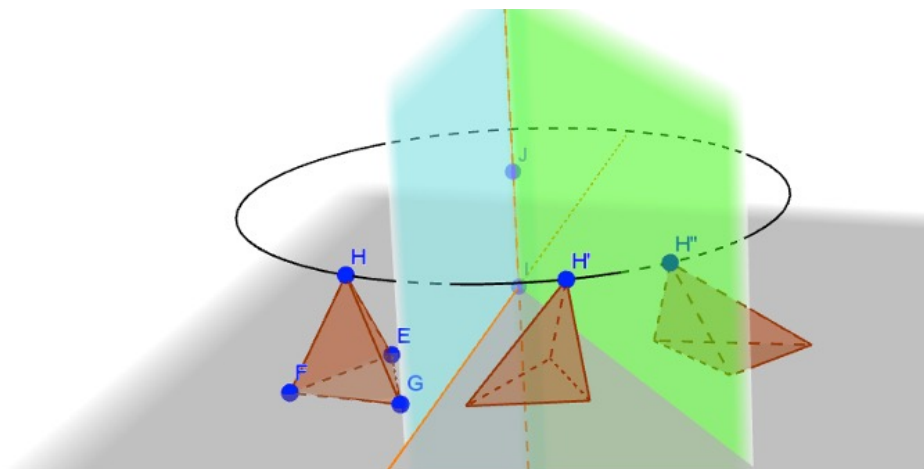


Figura 3



- Osserva che le due piramidi  $ABCD$  e  $A''B''C''D''$  (figura 3) così ottenute si corrispondono dunque in una rotazione attorno alla retta  $r$  intersezione dei due piani di simmetria, verso (antiorario) dal piano  $p$  al piano  $q$  e di angolo doppio rispetto all'angolo diedro formato dai piani  $p$  e  $q$ .

Competenze	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Isometrie	Esplora e congettura	Scopri, classifica e generalizza	Risolvi problemi, argomenta e dimostra
LA TRASLAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA SIMMETRIA ASSIALE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA ROTAZIONE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
LA GLISSOSIMMETRIA	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE		SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE
APPROFONDIMENTI E PROBLEMI	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE	SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE SCHEDA DOCENTE SCHEDA STUDENTE



# Matrici e Immagini digitali



 <p>G. Righetti</p>	<p><b>Gruppo SNAP</b>  M. Rosa Marrone (S)  Tiziana Santacroce (S)  Michele Somma (S)</p>	<p><b>Gruppo Python</b>  Paolo Da Pelo (S)  Davide Passaro (S)  Daniela Tondini (U)</p>  <p>S. Finzi Vita</p>
--	---	--

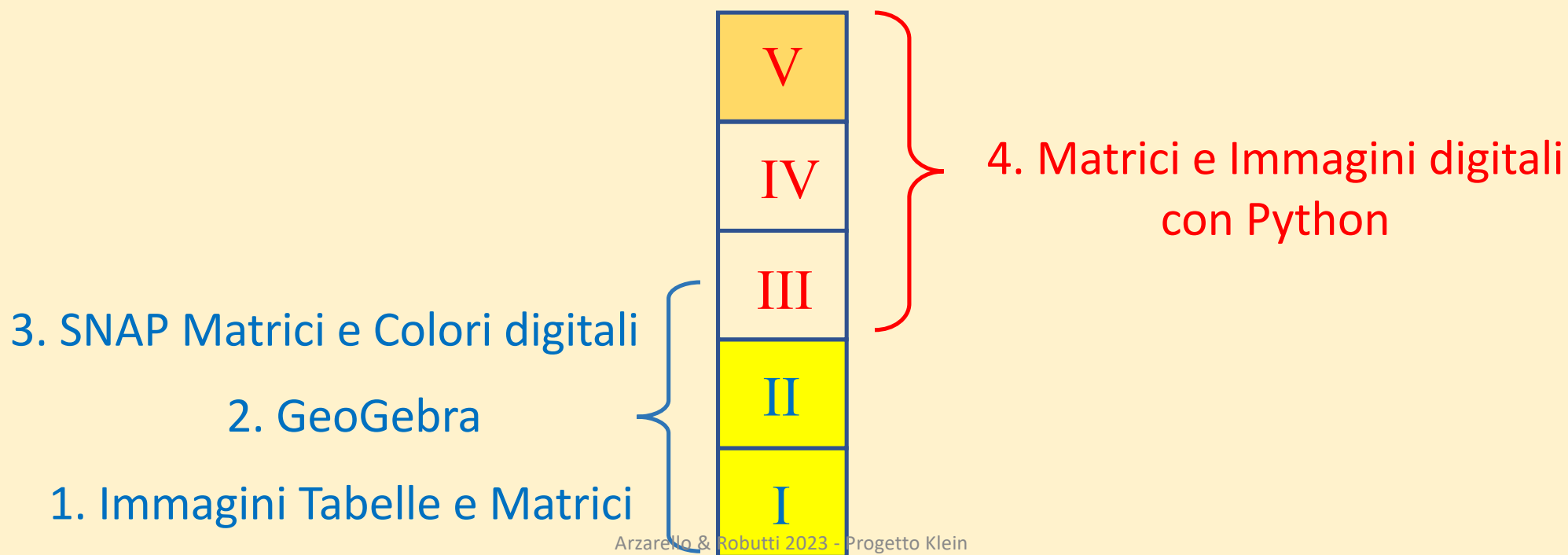
**Geogebra**  
Alberto Cena



 <p>F. Tovenà</p>	<p><b>Gruppo Tabelle &amp; Matrici</b>  Federica Mennuni (U)  Antonella Azzone (S)  Rosa Buono (S)</p>	 <p>G. Guidone</p>
--	--	---

# *Matrici e Immagini digitali*

Una trasposizione didattica nella scuola secondaria, che permetta l'accesso alle attività a vari livelli e a varie tipologie di scuole





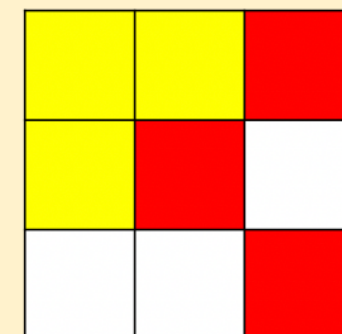
# 1. Immagini digitali come tabelle: attività manipolativa

- Obiettivo: far emergere l'idea che creare una immagine equivale a comporre una tabella, cioè definire una funzione in cui ad ogni cella si associa un colore
- Attività manipolativa di creazione di tabelle 3x3 su fogli su cui incollare post-it di tre diversi colori:
  - a partire da una immagine e producendone una descrizione
  - a partire da una descrizione e ricreando l'immagine
  - confronto tra immagini e tra descrizioni
    - Percorsi e metodi di notazione
    - Strisce e liste
    - Uso di indici per righe e colonne

(1,1)	(1,2)	(1,3)
(2,1)	(2,2)	(2,3)
(3,1)	(3,2)	(3,3)

(1,1) → G  
 (1,2) → G  
 (1,3) → R  
 (2,1) → G  
 (2,2) → R  
 (2,3) → B

...



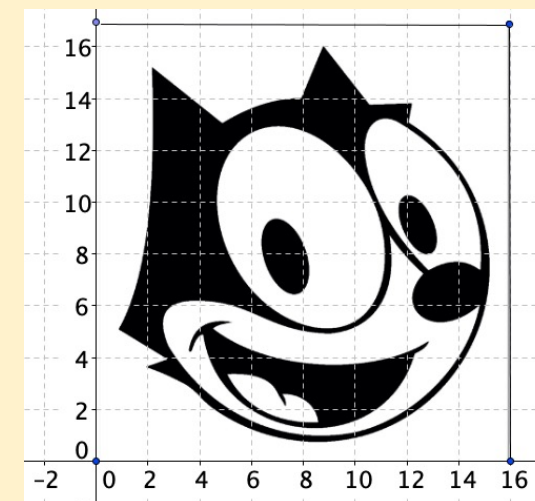


Liceo Matematico

## Immagini digitali come porzioni di piano



- Obiettivo: sperimentare l'uso di vettori e di coordinate per indicare movimenti e posizioni
- Attività: in un contesto narrativo adattabile all'età e alle esigenze, gli studenti sperimentano fisicamente e rappresentano su mappe:
  - percorsi nel piano a partire da una descrizione
  - percorsi da elaborare per raggiungere un obiettivo, procedendo con passi di lunghezza e direzione fissata



# L'immagine rivela proprietà delle trasformazioni piane

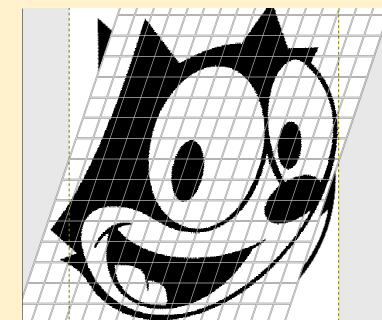
- Obiettivo: introdurre la nozione di trasformazione affine del piano, evidenziandone alcune proprietà geometriche e imparando a rappresentarle analiticamente
- Attività: i ragazzi sperimentano l'effetto prodotto operando trasformazioni su configurazioni finite di punti nel piano cartesiano



$f$   
Dilatazione lungo  
un asse

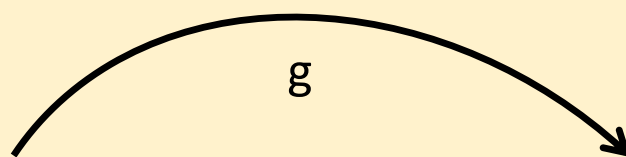
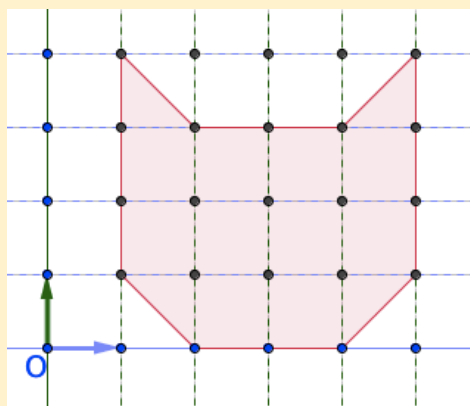


$g$   
Trasformazione affine



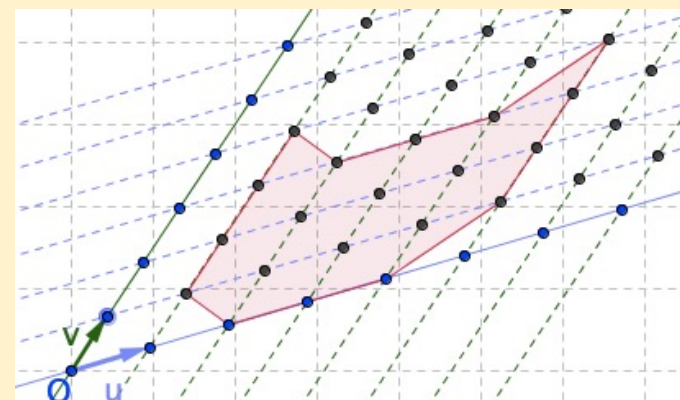
# Matrici per descrivere trasformazioni delle immagini

- Obiettivo: descrivere e visualizzare la trasformazione individuata da due vettori
- Attività: attraverso attività manipolative, carta e penna o software
  - gli studenti individuano il reticolo generato da due vettori interpretando e descrivendo combinazioni lineari
  - modificano immagini per visualizzare trasformazioni
  - confrontano rappresentazione analitica e modifiche ottenute



Trasformazione affine

Arzarelli & Robutti 2023 - Progetto Klein



## Possibili approfondimenti

Trasformazione dinamica di un'immagine:

- Creazione di un flipbook (<https://youtu.be/IUGVrMrUOws>)
- Creazione di una immagine .gif animata
- Utilizzo di applet realizzate con GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/cfdw6bvj>)









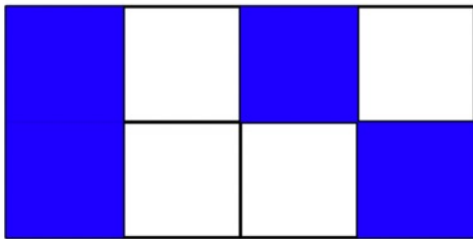
Liceo Matematico

## 2. Attività con GeoGebra colori e matrici

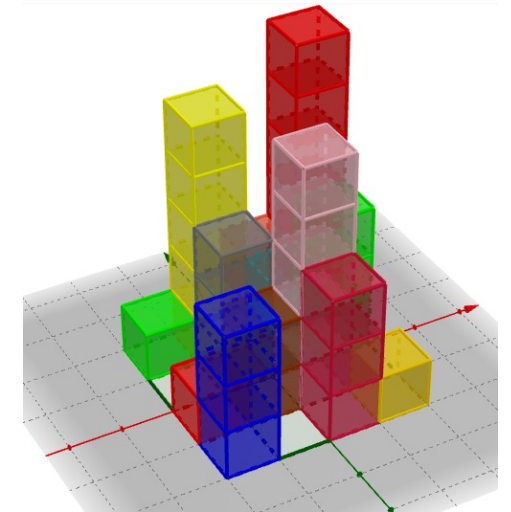
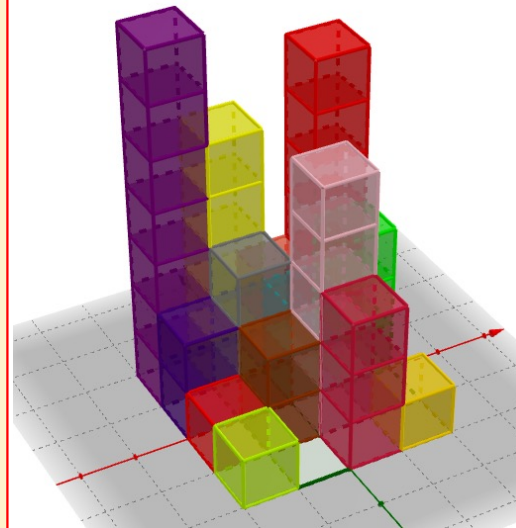


A ogni coppia di indici  
corrisponde il colore:  
0 indica il bianco, 1 il blu.

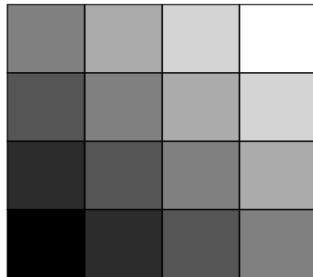
(1,1) -->   
(1,2) -->   
(1,3) -->   
(1,4) -->   
(2,1) -->   
(2,2) -->   
(2,3) -->   
(2,4) -->



Alle tabelle si associano poi due informazioni: il colore e l'altezza della pila di cubi posta sopra ogni quadrato. La realizzazione richiede l'uso di tre indici, traslazioni e coordinate in 3D. L'app può essere usata come black box in altre attività.



(1,1) -->  (3,1) -->   
(1,2) -->  (3,2) -->   
(1,3) -->  (3,3) -->   
(1,4) -->  (3,4) -->   
(2,1) -->  (4,1) -->   
(2,2) -->  (4,2) -->   
(2,3) -->  (4,3) -->   
(2,4) -->  (4,4) -->

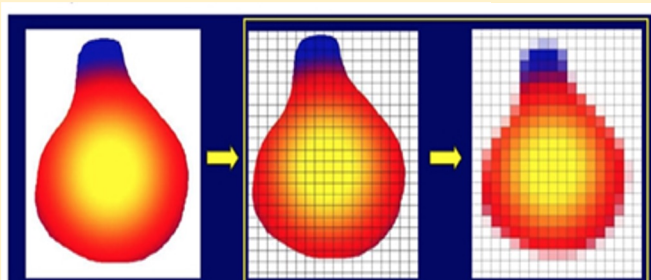


Facendo variare i valori della matrice in  $[0,1]$   
i colori della tabella sono in scala di grigio.



# 3. SNAP, matrici e colori digitali



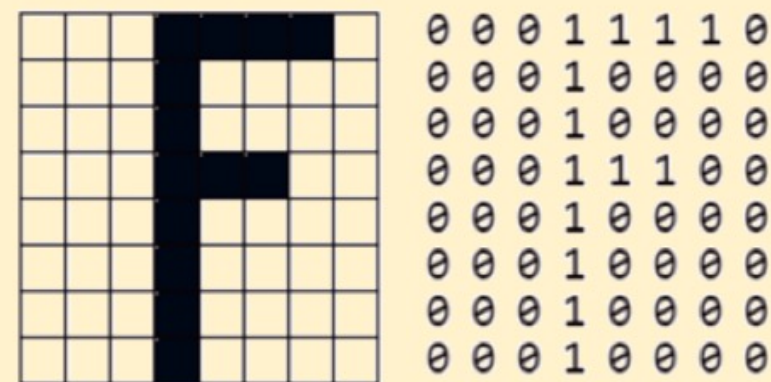


Un'immagine sgranata appare formata da tanti quadratini, i **pixel**. I pixel possono essere organizzati in una **griglia**. Si associa alla griglia il concetto di **matrice** spiegando che nella matrice ogni elemento è individuato da una coppia di indici  $(i, j)$ .

Le celle sono individuate dagli indici, che indicano il numero di righe e colonne.

Si presenta su Snap un'immagine formata da quadratini bianchi e neri costruita mediante l'opportuna compilazione di una matrice.

Si visualizza sullo schermo sia l'immagine costituita dai pixel neri sia la matrice che l'ha generata, in questo modo si nota subito l'associazione tra il valore "1" nella matrice e il quadratino nero nell'immagine.





# $\lambda$ Snap! e le matrici

## Percorso didattico

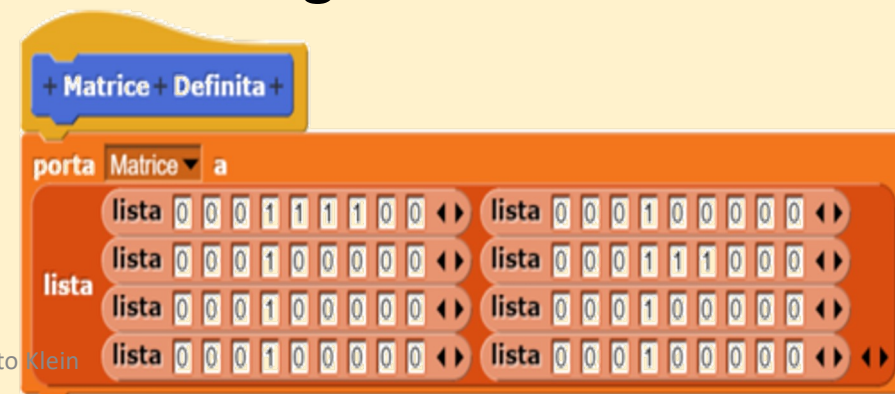


Dopo aver richiamato i comandi principali utilizzati per ottenere la matrice, si avvia l'attività degli alunni su Snap attraverso la richiesta di riprodurre la matrice quadrata 3x3 riprodotta a lato.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Si chiede agli alunni di realizzare un'immagine (matrice) con le proprie iniziali, richiedendo in input il numero di righe e di colonne.

(A fianco la matrice 8 x 8 ottenuta come lista di 8 liste da 8 valori che consente di ottenere l'immagine della "F")

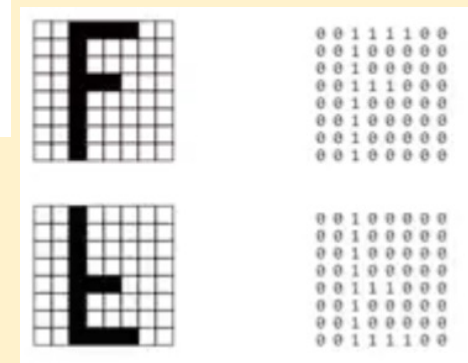
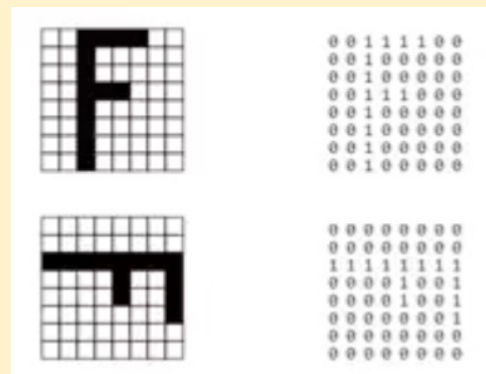




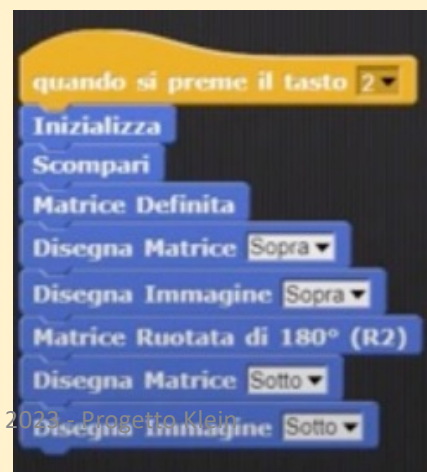
# e le matrici Percorso didattico



Programmando con SNAP si richiede di ottenere l'immagine simmetrica rispetto agli assi x, y oppure l'immagine ruotata, in modo da far comprendere come operare sugli indici della matrice di partenza



Ragionando sul sistema RGB, si può introdurre il sistema di numerazione esadecimale e operazioni fra matrici riga e colonna per ottenere le diverse tonalità.



# Matrici e colori digitali

Programmi vari (**Paint, Blocco Note, Calcolatrice,...**) permettono di visualizzare i codici dei colori digitali RGB e di visualizzare la sintesi additiva in modo intuitivo.

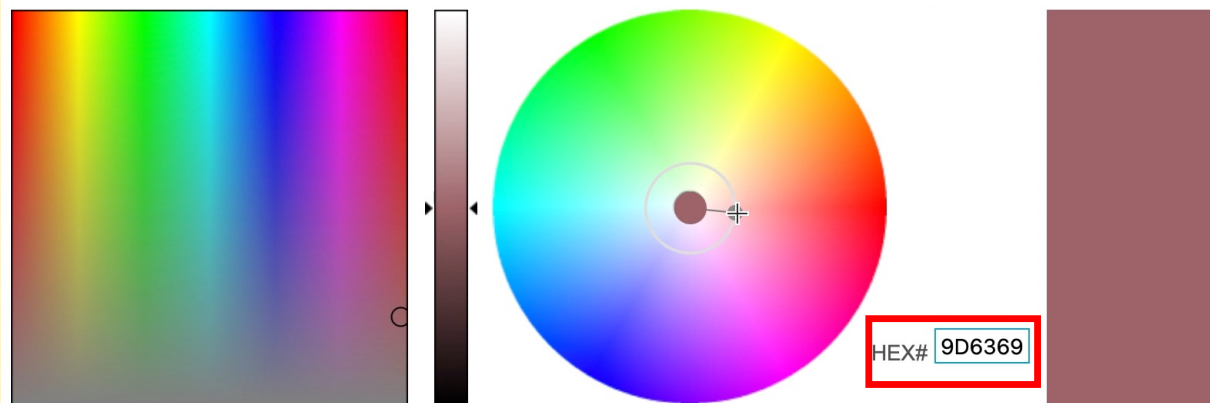
È possibile far vedere la **corrispondenza fra colore e codice numerico RGB** che rappresenta i valori dei componenti rosso, verde e blu di un colore come un numero naturale tra 0 e 255.

## Convert RGB values to the nearest standard colour

Enter RGB values or select from the colour picker

R	G	B
157	99	105

SUBMIT



SUBMIT



# 4. Matrici e immagini digitali con Python



## Attività in generale triennio scuola secondaria secondo grado



Nello spirito della 'vignette' a un livello più avanzato, si cerca di:

- mostrare la **struttura numerica delle immagini digitali** comunemente utilizzate e quindi il loro possibile trattamento matematico
- coinvolgere gli studenti mediante un'**attività diretta di programmazione** nell'analisi di singole immagini e in alcuni interventi di modifica di esse

Si è scelto il linguaggio **Python** in quanto ormai impiegato nelle scuole superiori, in genere sin dai primi anni.

Per semplificare e uniformare l'attività didattica si è scelto di utilizzare la **piattaforma Colab di Google**, attraverso la creazione e la possibile condivisione di diversi **Notebook tematici**.



Per evidenziare le possibilità didattiche di tale strumento è stato preparato per i docenti un **Tutorial sulle modalità d'uso dei Notebook di Colab.**

## NB0 - Introduzione al linguaggio Python

Semplici esempi per familiarizzare con i comandi base e prepararsi alle sfide successive.

### Le immagini digitali.

**Wikipedia:** Un'immagine digitale è la rappresentazione numerica di un'immagine bidimensionale. Può essere di due tipi:

- **vettoriale**, attraverso la descrizione di elementi primitivi, quali linee o poligoni, che compongono l'immagine (formati: *eps, pdf, ai, svg*)

PRO: creata con regole matematiche è scalabile senza problemi, pesa poco

CONTRO: pochi dettagli, non sempre supportata dai siti

- **raster** (o **bitmap**), attraverso l'assegnazione di una matrice di punti (detti **pixel**) la cui colorazione è definita mediante uno o più valori numerici (formati: *jpg, tiff, gif, bmp, png*)

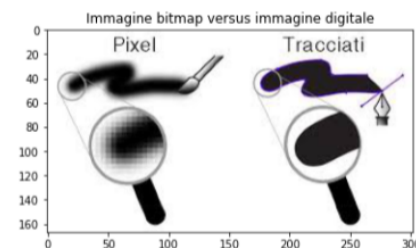
PRO: ricchezza di dettagli e facilità di modifiche

CONTRO: non scalabile senza perdita di risoluzione, può essere pesante

Noi ci occuperemo delle immagini bitmap

```
[ ]
import matplotlib.pyplot as plt
from PIL import Image
from urllib.request import urlopen

url='https://i.imgur.com/aIhctBb.jpg'
img=Image.open(urlopen(url))
plt.imshow(img)
plt.title('Immagine bitmap versus immagine digitale')
plt.show()
```





Liceo Matematico

# Matrici e geometria

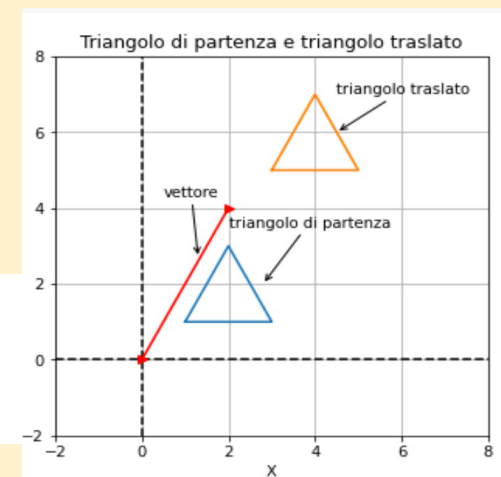


Progetto Klein Italia

## NB1 – Introduzione al calcolo vettoriale e matriciale

Operazioni tra vettori e matrici (somma, sottrazione, prodotto termine a termine, prodotto scalare, prodotto righe per colonne, trasposizione, matrici speciali).

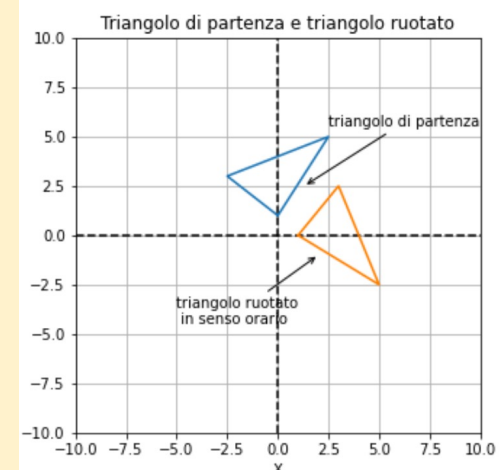
$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \\ -1 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$



## NB2 – Trasformazioni geometriche nel piano

Matrici come operatori per trasformazioni geometriche di un singolo punto o di semplici figure piane.

Isometrie (traslazioni, simmetrie, rotazioni), affinità, composizione di trasformazioni.







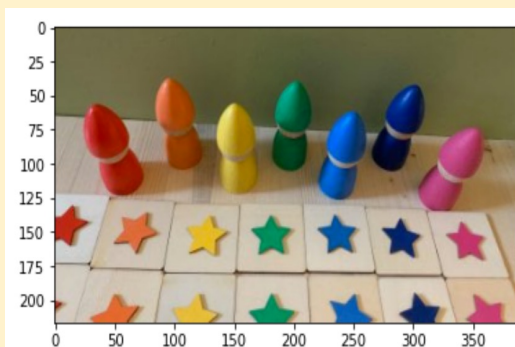
Liceo Matematico

# Matrici e immagini digitali (I) [NB3]



Progetto Klein Italia

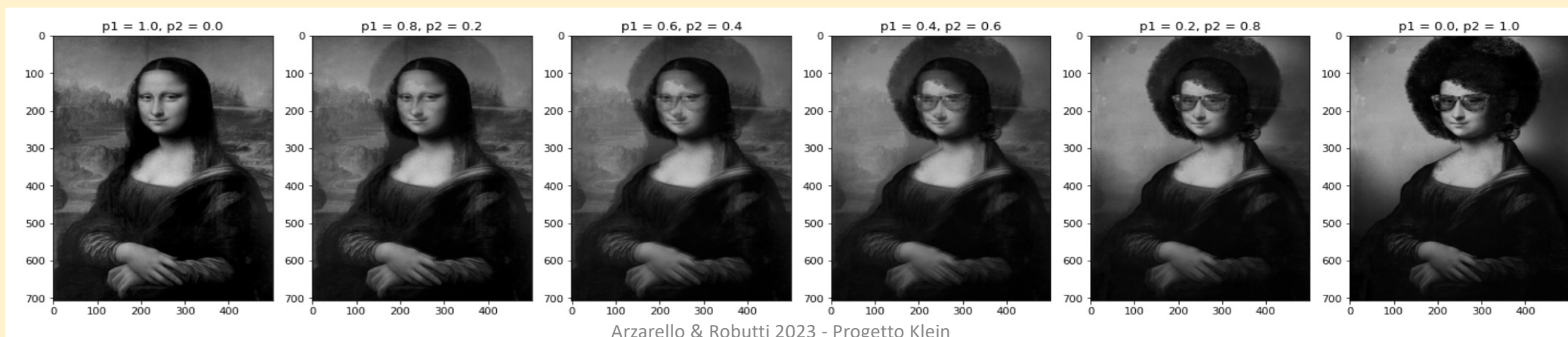
- Pixel, immagine vettoriale e immagine bitmap
- Immagini binarie (bianco e nero), in scala di grigi e a colori (RGB).
- Dalla matrice all'immagine e viceversa.
- Costruzione e analisi di semplici immagini binarie.
- La mappa dei colori nel sistema RGB e la scomposizione di un'immagine nelle 3 bande.



## Matrici e immagini digitali (II) [NB4]

Azioni ottenibili con semplici manipolazioni delle tabelle delle immagini.

- Copertura, taglio o scalatura di porzioni di un'immagine. Collage.
- Azioni sulle bande dei colori per variarne l'intensità. Effetti soglia. Da RGB a scala di grigi.
- Transizione da un'immagine a un'altra (somma di immagini).



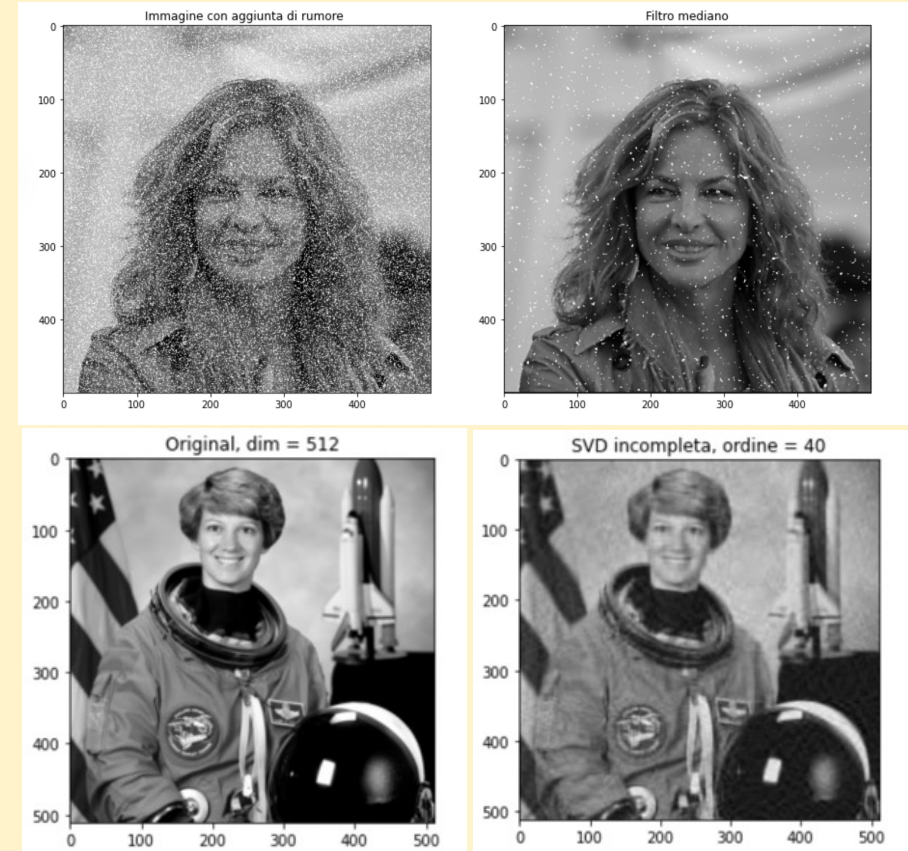
[Modulo facoltativo di approfondimento]

Azioni più complesse sulle immagini:

- Rimozione del rumore (*noise filtering*).

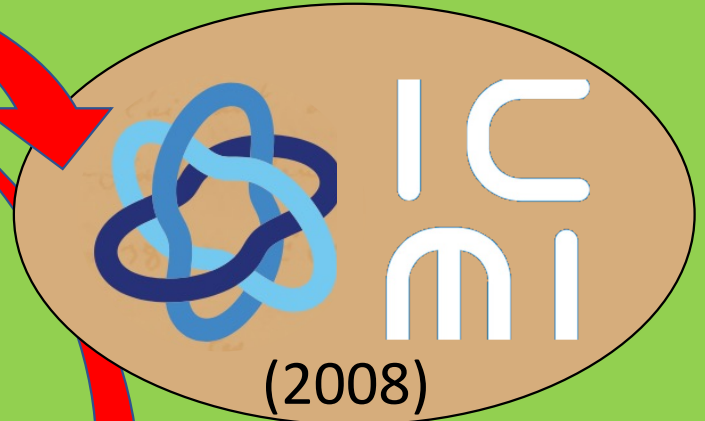
- Compressione delle immagini attraverso la scomposizione SVD (cenni).

... e altro.



$$A = USV^T = s_{1,1}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + s_{2,2}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \dots + s_{k,k}\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^T$$

# Conclusioni





Liceo Matematico



Klein (1908)

Soddisfare le esigenze degli insegnanti di matematica che desiderano aggiornarsi sugli sviluppi recenti della disciplina, per inserirli nell'insegnamento secondario.

# Conclusioni



(2008)

Interdisciplinarietà  
(Scienze speriment.  
Arte, Tecnologia)

Situazione educativa  
del 21° secolo, diversa  
da quella in cui  
lavorava Klein

Arzarello & Robutti 2023 - Progetto Klein



Progetto Klein Italia



UMI LM (2021)

Intreccio con i risultati  
della ricerca didattica  
Trasposizione didattica  
nel contesto culturale  
e istituzionale della  
scuola italiana



