

ALLEGATO 1 – ESEMPI DI MODULI LICEO MATEMATICO

Si illustrano brevemente le tematiche di alcuni laboratori svolti all'interno del Liceo Matematico e che sono stati ritenuti significativi e illustrativi del progetto stesso.

La selezione è limitata, non esaustiva e non riporta informazioni sugli autori. Va intesa come una esemplificazione, una condivisione di soluzioni percorribili e un invito a creare in autonomia altri moduli e a condividerli.

Le tematiche selezionate sono in linea con le Indicazioni Nazionali (IN), fornendo, in alcuni casi, l'occasione di approfondimenti. Possono essere sviluppate dando vita a differenti laboratori, e in alcuni casi, essere riprese in anni successivi, approfondendo anche tramite l'utilizzo degli strumenti matematici appresi o corredandole con altri argomenti. I laboratori sono occasione per 'fare' e applicare la matematica e le altre materie coinvolte, sviluppando l'autonomia, lo spirito critico e la creatività dei partecipanti; non si limitano, quindi, a panoramiche di superficie e sono occasione per consolidare e acquisire consapevolezza sui nuclei fondanti delle discipline. È utile coinvolgere le studentesse e gli studenti anche in una sintesi del lavoro svolto, eventualmente mediante la produzione di video o di brevi rappresentazioni teatrali, l'allestimento di mostre interattive nelle quali coinvolgere altri studenti e studentesse, illustrando gli oggetti prodotti e il loro significato.

Si invita, inoltre, a proporre letture di classe o dei singoli testi di autori che abbiano a che fare con la matematica. La letteratura offre un ampio ventaglio di scelta: da Dante a Calvino, da Szyborska a Sinisgalli, da Leopardi a Poe. Le attività coinvolgono direttamente gli studenti e le studentesse affinché amplino i loro orizzonti culturali. Tra le varie letture, non è da trascurare quella dei testi matematici originali, anche al fine di inserire gli argomenti in un contesto storico e osservarne le motivazioni e l'evoluzione, per mettere in evidenza l'importanza e l'efficacia di notazioni appropriate, la forza dell'intuizione e l'esercizio lento della ricerca di una modalità espositiva funzionale e condivisa.

Per facilitare la lettura del presente allegato, l'elenco delle tematiche è suddiviso in base alla voce delle Indicazioni Nazionali che appare come maggiormente correlata o a una voce che ne segnali il carattere multidisciplinare: Geometria, Algebra e Geometria, Aritmetica e Geometria, Aritmetica e Algebra, Dati e Previsioni, Relazioni e Funzioni, Elementi di Informatica, Logica, STEAM, Matematica e Scienze Umane e Matematica e Fisica. L'indicazione va intesa come un suggerimento, da vagliare e modificare in funzione del gruppo classe. In particolare, la natura interdisciplinare e multidisciplinare di alcuni moduli e la volontà di evidenziare le profonde interazioni tra settori della matematica richiedono una particolare elasticità.

	GEOMETRIA
G1	EDUCARE ALLA ARGOMENTAZIONE Questo percorso permette di introdurre il concetto di dimostrazione nell'ambito più generale dell'educazione all'argomentazione, ripercorrendo, in modo attuale e innovativo, anche attraverso l'uso e il supporto delle nuove tecnologie, il processo storico che nella cultura greca del sesto e quinto secolo a.C. ha portato all'affermazione del rigore dialettico, soprattutto nella fondamentale opera di Euclide. Il percorso ha l'obiettivo di sviluppare in modo interdisciplinare la competenza dell'argomentare e del "pensare criticamente", punto di riferimento nella società e nella didattica moderne. L'argomento si connette anche alla logica.
G2	GEOMETRIA E ORIGAMI La presentazione e la discussione della teoria assiomatica euclidea può essere maggiormente efficace se viene motivata e confrontata con quella di altri ambiti.

	La geometria degli origami combina arte e matematica, favorisce il pensiero spaziale, stimola la creatività e ha applicazioni in ingegneria e design innovativo, coinvolge in una attività che richiede l'affinamento dell'uso delle mani. Permette inoltre un'analisi critica dei postulati di Euclide. Si opera manualmente con la carta per riprodurre dimostrazioni e costruzioni analoghe a quelle studiate in geometria euclidea, e si comprende come i postulati di Huzita-Hatori (1992) siano più forti di quelli del sistema euclideo perché, per esempio, rendono possibile trisecare un angolo.
G3	LA MATEMATICA DELLE MAPPE Le coordinate geografiche, la cartografia, l'astronomia e la realizzazione delle meridiane sono temi complessi che aprono la strada a percorsi interdisciplinari tra matematica, arte, storia e letteratura. La consapevolezza della struttura del territorio in cui si vive, su scala piccola e grande, è un tema che accompagna l'uomo in tutte le fasi del suo sviluppo e rende evidente come la matematica sia uno strumento di comprensione del mondo. Nel primo biennio, la tematica permette di studiare la geometria sferica e la somma degli angoli interni di un triangolo sferico; nel secondo biennio, la proiezione stereografica e altre proiezioni forniscono esempi di applicazioni tra due superfici suggeriscono l'analisi delle proprietà invarianti, oltre a introdurre la nozione di curvatura e una visione intrinseca della geometria.
G4	GEOMETRIE NON EUCLIDEE Lo studio delle geometrie non euclidee permette di analizzare criticamente il concetto di assioma e getta ponti con la filosofia, ma anche con l'arte e la letteratura. Da un punto di vista storico, lo studio delle geometrie non euclidee ha progressivamente consentito l'affrancamento da regole assolute in molti ambiti. In modo naturale, la tematica è collegata allo sviluppo della fisica moderna. Rientrano in questa voce lo studio intrinseco della geometria sferica che, tra l'altro, pone all'attenzione lo studio di alcuni limiti notevoli, della geometria ellittica, della geometria iperbolica e dei suoi modelli, dei cambi di coordinate nello spazio-tempo.
G5	LE CONICHE DA DIVERSI PUNTI DI VISTA Le coniche forniscono un esempio di classificazione geometrica, generalmente affrontato nel secondo biennio. Le coniche possono essere trattate attraverso vari approcci in matematica: geometrico dello spazio (esplorando le sezioni di un cono e di un piano), geometrico nel piano (come luoghi di punti definiti da distanze) e analitico (utilizzando equazioni di secondo grado). Questi metodi rivelano legami profondi tra algebra, geometria e applicazioni pratiche, come per esempio la costruzione di macchine matematiche (sia fisiche che digitali). L'esplorazione delle tangenti alle coniche (e delle coniche come curve di involuppo) può essere svolta anche attraverso la piegatura di un foglio di carta e la successiva realizzazione di modelli di geometria dinamica che ripercorrono la costruzione.
G6	DETERMINAZIONE DELL'AREA DI FIGURE CURVILINEE Lo studio di figure piane non poligonali permette di discutere la nozione di estensione e di equiestensione senza necessariamente ricorrere a formule che determinino l'area. Nel primo biennio, è possibile, per esempio, discutere come determinare l'area delle lunule di Ippocrate, ripercorrere i disegni di Leonardo da Vinci che illustrano tecniche che permettono di determinare l'area di figure non rettilinee attraverso 'il movimento' di parti delle figure e evidenziando figure rettilinee ad esse <i>equiestese</i>. Nel secondo biennio, è possibile anche ripercorrere la dimostrazione archimedeica che permette di calcolare l'area di un segmento parabolico (quadratura della parabola), a partire dalle proprietà delle tangenti alla parabola; questo esempio, con un approccio geometrico, anticipa problematiche riprese nello studio dell'integrazione, metodi di approssimazione e l'idea di iterare infinite volte un algoritmo.
G7	I FRATTALI Lo studio dei frattali permette di introdurre il tema delle dimensioni non intere e consente al docente di sfidare le tradizionali nozioni geometriche degli studenti. La scoperta dei frattali ha mostrato come la matematica possa descrivere la bellezza e la complessità del mondo naturale. Il percorso si collega facilmente a temi di arte e di musica e sollecita

	in modo naturale la discussione sulla nozione di dimensione. Alcuni frattali possono essere analizzati evidenziando proprietà matematiche interessanti.
G8	TOPOLOGIA E GRAFI La comprensione e la sintesi delle proprietà spaziali e delle connessioni tra gli elementi è fondamentale nella matematica e nelle applicazioni, in biologia, nelle reti telematiche e nei problemi di ottimizzazione. Con i grafi si possono creare percorsi che partono da problemi classici (i sette ponti di Königsberg, il problema delle tre case e dei tre servizi, i percorsi sui dodecaedri) e arrivino alla modellizzazione di problemi molto attuali (il problema del commesso viaggiatore), permettendo collegamenti con temi di logica e di programmazione lineare.
G9	TASSELLAZIONI, FREGI E SIMMETRIE DEL PIANO Le tassellazioni del piano rivestono grande importanza in arte, in geometria e in algebra, permettono quindi di ideare percorsi didattici che attraversano ambiti culturali diversi e si prestano in modo naturale a lavori di tipo laboratoriale. In particolare, permettono di analizzare le proprietà delle trasformazioni isometriche del piano. Lo studio può essere affrontato nel primo o nel secondo biennio, a seconda dell'impostazione di lavoro.
G10	LA NOZIONE DI DIMENSIONE La visione moderna del mondo fisico si basa sull'utilizzo di oggetti matematici che forniscono modelli per mondi con più di 3 dimensioni. La nozione di 'spazio' e quella di dimensione (che può prendere differenti accezioni) hanno richiesto un lungo tempo di lavoro nella storia della matematica e sono strumenti importanti, ad esempio, ai fini della creazione di modelli. La nozione di dimensione nello spazio euclideo può essere discussa e estesa tramite l'algebra vettoriale, mentre la nozione topologica può essere indagata anche tramite l'analisi di esempi quali la curva di Peano o lo studio intrinseco della geometria sferica. Gli studenti possono recuperare in modo autonomo alcune caratteristiche delle generalizzazioni in 4D della nozione di triangolo equilatero e di cubo. La lettura di <i>Flatlandia</i> o di racconti inerenti il mondo 4D e le raffigurazioni artistiche dell'ipercubo possono supportare in modo importante la creazione di immagini interiori.

	ALGEBRA E GEOMETRIA
AG1	ARITMOGEOMETRIA Si analizzano le proprietà dei numeri figurati, seguendo lo stile della scuola pitagorica. Si ha l'occasione di discutere come scegliere una notazione efficace, si esplora la validità di espressioni dipendenti da un qualsiasi numero naturale, si osserva la differenza tra formule ricorsive e formule chiuse, ponendo le basi per l'utilizzo del principio di induzione. La tematica offre anche l'occasione per percorsi interdisciplinari in ambito storico, filosofico e artistico e può essere affrontata nel primo biennio.
AG2	INTRODUZIONE DEL SIMBOLISMO LETTERALE L'acquisizione di una visione astratta e di una manipolazione consapevole del simbolismo letterale è di grande importanza nello sviluppo culturale e è richiesta nel primo biennio. Le studentesse e gli studenti possono essere supportati nel passaggio dalle operazioni con i numeri al formalismo letterale attraverso l'utilizzo di differenti rappresentazioni, anche geometriche, ma anche di giochi e apparenti magie che possono essere governate solo attraverso un'opportuna rappresentazione generale.
AG3	LA SEZIONE AUREA e LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI Affrontare in modo tecnico e approfondito la nozione di sezione aurea e dei suoi approssimanti razionali e imparare a riconoscere la presenza di segmenti in rapporto aureo aumenta la consapevolezza di come la Matematica - centrale nelle discipline STEAM- possa essere usata per comprendere l'armonia nella natura, l'arte e l'architettura, stimolando il pensiero creativo e l'indagine profonda delle proporzioni tra le parti. Nell'elaborazione di questi aspetti, sono connaturati riferimenti storici, artistici e letterari, ma è possibile anche costruire geometricamente (e riprodurre con strumenti di

	geometria dinamica) il rapporto aureo, oltre a introdurre la descrizione dei numeri razionali positivi in forma di frazione continua finita a quozienti parziali naturali. L'argomento può essere trattato nel primo o nel secondo biennio.
AG4	ANALISI E CRITICA DEI TESTI MATEMATICI “STORICI” Lo studio dell'analisi dei testi matematici storici come, per esempio, il <i>Liber Abbaci</i> di Fibonacci, la <i>Summa di Pacioli</i> e l' <i>Ars Magna</i> di Cardano, è cruciale per comprendere l'evoluzione del pensiero matematico, delle tecniche di calcolo e dell'evoluzione del linguaggio della Scienza.

	ARITMETICA E ALGEBRA
AA1	ARITMETICA MODULARE L'aritmetica modulare si presta a fornire la base per rivedere in modo consapevole le strutture algebriche ordinarie. Può essere introdotta con semplici questioni di crittografia e sviluppata sino all'algoritmo RSA (1977). In generale, in questo tema, si affrontano piccole questioni di teoria dei numeri e loro applicazioni. La tematica permette, per esempio, di fornire applicazioni al metodo di calcolo euclideo del massimo comune divisore e di lavorare in un contesto nel quale le proprietà algebriche presentano novità inattese, quali la presenza di divisori dello zero. L'uso di fogli elettronici è indicato per alleggerire alcune fasi di calcolo.
AA2	CRITTOGRAFIA CLASSICA La crittografia attraversa la storia dei popoli, dagli spartani, ai romani arrivando fino a oggi. La tematica permette di svolgere attività in laboratorio e creare percorsi interdisciplinari con la storia e l'insegnamento di cittadinanza e costituzione, evidenziando il problema della sicurezza nella trasmissione dei dati e sollevando problemi etici. I sistemi crittografici con “chiave condivisa”, come, ad esempio, la macchina <i>Enigma</i> utilizzata a fine bellico nella seconda guerra mondiale, e i sistemi di crittoanalisi si sono basati su aspetti teorici e soluzioni tecnologiche. In particolare, vari sistemi crittografici si basano su risultati di matematica, fornendone una applicazione che può essere sperimentata da studentesse e studenti. La tematica permette di svolgere attività in laboratorio e creare percorsi interdisciplinari con la storia, chiarisce la nozione di funzione come dato in cui sono specificati dominio/legge/codominio, e quella di funzione invertibile (con inversa destra e sinistra), allena nella manipolazione delle formule mettendo in evidenza la variabile di interesse, fornisce applicazioni allo studio dell'algoritmo euclideo per la determinazione del massimo comune divisore tra due numeri interi e una motivazione all'introduzione dell'aritmetica modulare. È possibile, inoltre, implementare tramite strumenti informatici i sistemi crittografici studiati. La tematica può essere affrontata nel primo biennio, ma può anche essere occasione per riprendere nel secondo biennio argomenti di teoria dei numeri, consolidare la nozione di funzione iniettiva e suriettiva, fornire una ulteriore applicazione delle trasformazioni affini invertibili.
AA3	CRITTOGRAFIA ASIMMETRICA La crittografia asimmetrica è alla base delle attuali tecniche di comunicazione segreta, permettendo di rendere pubbliche le informazioni per la cifratura, senza mettere a rischio la segretezza del contenuto dei messaggi cifrati. Tale possibilità è essenziale quando è necessario, come per istituti bancari o di commercio, poter essere contattati anche da soggetti non noti in anticipo. Studiare la crittografia a scuola è fondamentale per comprendere la sicurezza delle informazioni, proteggere la privacy e sviluppare competenze critiche nel mondo digitale, essenziale per la vita moderna e professionale. Questo tema interseca pertanto istanze fondamentali di cittadinanza consapevole. Inoltre, l'analisi di sistemi crittografici asimmetrici fornisce l'occasione di riprendere, nel

	secondo biennio, argomenti di teoria dei numeri a consolidamento di quanto appreso nel precedente biennio, oltre a condurre a concetti quali la calcolabilità e la complessità.
AA4	STORIA E TEORIA DELLE EQUAZIONI DI TERZO GRADO La storia delle equazioni di terzo grado attraversa l'Italia del Rinascimento e ne riflette lo spirito. Il percorso permette di gettare un ponte tra matematica, storia e letteratura e apre la strada ai numeri complessi in modo naturale e storicamente corretto. Un contributo per una immersione nel periodo storico può essere fornito dalla lettura di brani dei testi originali degli autori coinvolti nella ricerca della formula risolutiva delle equazioni algebriche di terzo grado in una variabile. Il percorso dimostrativo concorre a una comprensione più profonda della nozione di soluzione, corredandola all'insieme numerico di riferimento e aiutando a distinguerla dalla possibilità di ottenere formule risolutive. Permette di investigare l'effetto di traslazioni e affinità sul grafico di una funzione polinomiale e di comprendere la relazione tra coefficienti del polinomio e soluzioni dell'equazione. È possibile correlare il lavoro a tecniche di piegatura della carta che permettono di trisecare un angolo. Tipicamente la tematica è svolta nel secondo biennio.

	DATI E PREVISIONI
DP1	GIOCHI E PROBABILITÀ Studiare giochi e probabilità non è solo un modo divertente per analizzare il caso, ma anche un'opportunità per sviluppare il pensiero logico, la capacità di analisi e la gestione del rischio. Il percorso permette inoltre di affrontare temi come il gioco d'azzardo e la ludopatia, ma anche di andare all'origine dello studio della probabilità, discutendo la soluzione del problema delle parti e ripercorrendo la storia degli autori che se ne sono occupati. La tematica fornisce un ambiente nel quale risulta naturale utilizzare aspetti della teoria degli insiemi e può essere introdotta nell'arco dei cinque anni di corso.
DP2	TEOREMA DI BAYES La conoscenza e la comprensione della probabilità condizionata permettono al cittadino di capire il mondo che lo circonda, di interpretare in modo corretto le informazioni che gli vengono fornite. In questo percorso si può lavorare anche con casi reali di applicazione (o mancata applicazione) del teorema di Bayes, citando ad esempio una serie di episodi di matematica forense. Gli studenti possono inoltre essere sensibilizzati nella ricerca di ragionamenti probabilistici nel mondo reale, in particolar modo in ambito medico e assicurativo. L'argomento viene spesso introdotto nel secondo biennio o nel quinto anno.
DP3	COMBINATORIA OLTRE I RAGGRUPPAMENTI CLASSICI La combinatoria non si riduce alle sole disposizioni e combinazioni. In questo percorso possono essere affrontati problemi e metodi di conteggio non classici (numeri di Catalan, di Stirling, di Fibonacci e conteggi ricorsivi) e fondamentali in diversi ambiti, dalla statistica all'informatica.
DP4	DISTRIBUZIONI CONTINUE DI PROBABILITÀ Nei percorsi tradizionali si accenna frequentemente alle distribuzioni discrete (per esempio la distribuzione binomiale), citando come esempio continuo la sola distribuzione normale. È però possibile anche introdurre ed approfondire distribuzioni continue, determinanti per comprendere e prevedere fenomeni nel mondo che ci circonda.
DP5	TEORIA DEI GIOCHI Il tema può essere declinato in vari modi: si possono approfondire gli aspetti ludici dell'argomento, presentare paradossi legati alla non cooperazione (per esempio il paradosso di Braess) oppure mirare alla comprensione delle dinamiche che si instaurano tra attori animati da interessi concorrenti.
DP6	DINAMICA DELLE POPOLAZIONI Comprendere i cambiamenti demografici, le interazioni ecologiche e il rapporto con le risorse sostenibili aiuta a prevedere tendenze future, pianificare politiche ambientali e affrontare sfide globali. Alla base delle moderne teorie <i>demografiche</i> stanno modelli

	semplici ma altamente predittivi come la curva logistica e le leggi preda-predatore, che verranno studiati in questo percorso STEM che porta un valido aiuto alla cittadinanza consapevole e può essere affrontato nel secondo biennio o nel quinto anno.
--	---

	RELAZIONI E FUNZIONI
RF1	ASPETTI MATEMATICI DELL'INFINITO Il tema dell'infinito ha interessato da sempre la letteratura e l'arte, per certi versi pure la fisica e la matematica e certamente la filosofia. Basti pensare agli antichi paradossi della scuola eleatica. Ma a suo riguardo per millenni ha prevalso il dettato di Aristotele, che escludeva nell'ambito scientifico l'infinito attuale, ammettendo semmai quello potenziale: di una retta geometrica che si estende indefinitamente, o della successione dei numeri naturali che non ha mai termine. Alla fine dell'Ottocento, grazie a Cantor, l'infinito attuale è entrato a pieno diritto, seppure con grandi polemiche, come argomento della matematica.
RF2	ANALISI NUMERICA I problemi "da libro di testo" e le equazioni "scolastiche" sono adattate alle tecniche "esatte" che gli studenti devono imparare a padroneggiare. Questo percorso vuole mostrare uno spaccato di "equazioni nel mondo reale", le cui soluzioni possono essere soltanto approssimate. Attraverso un lavoro di laboratorio gli studenti e le studentesse saranno chiamati a ideare e poi a implementare tecniche generali di approssimazione numerica.
RF3	ASPETTI STORICI DELL'ANALISI INFINITESIMALE Comprendere l'evoluzione del pensiero matematico e l'affinamento del rigore nelle definizioni e nelle dimostrazioni, arricchisce il bagaglio culturale degli studenti e aiuta a valorizzare le scoperte chiave che hanno plasmato la matematica moderna. Una fase di particolare interesse è legata allo sviluppo dell'analisi infinitesimale, che può essere studiato nel corso del secondo biennio o dell'ultimo anno.
RF4	I NUMERI COMPLESSI Il numero i sembra contraddire il buon senso: viene introdotto come radice quadrata di -1, ma (tra i reali!) i numeri negativi non hanno radici quadrate. Pare quindi come frutto di pura immaginazione, di bizzarria matematica, senza applicazioni pratiche complete. Eppure, nel corso della storia della scienza i numeri complessi, che sono generati proprio da i insieme ai reali, hanno permesso grandi sviluppi della matematica e si sono rivelati strumenti potenti nella fisica moderna, nell'ingegneria, nell'informatica. In particolare, è possibile interpretare le operazioni tra numeri complessi come trasformazioni affini del piano di Argand-Gauss, approfondendo gli aspetti grafici e interpretare come luoghi geometrici le soluzioni di alcune equazioni a variabile complessa. Sfruttando la possibilità di utilizzare differenti rappresentazioni, si dimostra che ogni numero complesso ha la sua radice quadrata, e anzi radici n-me per ogni intero positivo n; le radici n-me dell'unità si collegano in modo naturale alla trattazione dei poligoni regolari e dell'equazione ciclotomica; è possibile accennare al teorema fondamentale dell'algebra dimostrato da Gauss, secondo cui ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ammette almeno una radice complessa. L'introduzione dell'esponenziale complesso permette di discuterne alcune applicazioni in fisica, ad esempio nello studio dell'interferenza. La trattazione può essere svolta nel secondo biennio.
RF5	PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO Lo studio di problemi di massimo e minimo sia geometrici che fisici (problemi isoperimetrici, reti minime, minimo potenziale, bolle di sapone, percorsi della luce) può essere affrontato trattando l'argomento dal punto di vista sintetico e da quello analitico.

	La tematica permette una forte interazione della matematica con la storia della scienza e con la fisica. Alcuni problemi si presentano in diversi ambiti della vita di tutti i giorni e possono essere risolti senza utilizzare gli strumenti dell'analisi matematica, anche se non sempre la funzione da massimizzare (minimizzare) è facile da trattare. Un nodo fondamentale riguarda l'esistenza del massimo (minimo) prima ancora di individuare gli algoritmi di ricerca. A seconda dei contesti, è possibile trovare alcuni maggioranti (minoranti) ma non è detto che siano massimi (minimi) della grandezza considerata. Ad esempio, nell'insieme dei poligoni isoperimetrici la funzione area cresce al crescere del numero dei lati, ma non ammette massimo perché la figura di area massima è il cerchio che non è un poligono. Se la funzione che rappresenta la grandezza da massimizzare (minimizzare) è definita in $\mathbb{R}$, è possibile utilizzare il teorema di Weierstrass; in altri casi, per questo livello scolastico, si possono utilizzare tecniche diverse. Lo studio può essere svolto nel secondo biennio o nel quinto anno.
--	--

	ELEMENTI DI INFORMATICA
11	ALGORITMI E LORO CODIFICHE Il concetto di algoritmo emerge distintamente all'inizio del Novecento ma affonda le sue radici sin dall'antichità e permea tutta la storia della matematica. Negli <i>Elementi</i> di Euclide troviamo l'algoritmo famoso, e ancora utilissimo, per la ricerca del massimo comune divisore. La matematica greca contiene altri esempi famosi di algoritmi, come il metodo di Erone. Nel mondo di oggi, l'idea di algoritmo compare per ogni dove: i moderni calcolatori eseguono algoritmi per la soluzione di problemi non solo matematici, ma anche sociali, economici, e così via. Tante questioni che interessano le scienze applicate si formalizzano in termini numerici, tramite opportune strategie di codifica, ed a quel punto si trasmettono alle macchine.
12	L'INTELLIGENZA ARTIFICIALE Delegare alla macchina la facoltà umana del pensiero: questo è la sfida inquietante che si sviluppa nel Novecento. Turing propone la sua macchina, antesignana dei moderni programmi di software, con l'intento di simulare le operazioni della mente di un impiegato diligente. Lo stesso Turing, qualche tempo dopo, discute in un suo famoso articolo la questione di macchine intelligenti. Wiener introduce e sviluppa la cibernetica, cioè la scienza di condurre le macchine a pensare. Oggi l'intelligenza artificiale ha impatto dirompente nella società e anche nella didattica. Si avvale di strumenti matematici e informatici, ma interseca anche questioni etiche. È possibile ripercorrere tutti questi sviluppi, anche attraverso giochi, che mostrano come una macchina opportunamente allenata può apprendere e poi "pensare".
13	COMPUTABILITÀ E MACCHINA DI TURING All'inizio dell'informatica sta anche il tentativo matematico di chiarire che cosa sia computabile, e che cosa invece no. La domanda riguarda specificamente i numeri naturali, cui però oggi si riducono, con le opportune tecniche di codifica, ambiti svariati. La risposta all'interrogativo arriva nel 1936, grazie soprattutto a Turing e alla sua macchina, e ancor prima a Church. In questo modo si definisce rigorosamente il concetto di problema che ammette, e non ammette, algoritmo di soluzione. Si scoprono poi problemi, non solo matematici, che non possiedono procedure di risposta. In un laboratorio è possibile discutere alcuni concetti fondamentali di questa branca relativamente nuova della matematica ed esplorare i limiti della computazione.
14	CODICI DI TRASMISSIONE E TEORIA DELL'INFORMAZIONE

	Ottimizzare la trasmissione dei dati comprimendo l'informazione e ridurre gli errori introducendo ridondanze sono due esigenze antitetiche che costituiscono questo percorso di teoria dell'informazione. Il percorso può essere strutturato in modo da toccare temi come le Geometrie finite n dimensionali e analizzare il concetto di entropia.
15	LA COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE e il PROBLEMA P vs NP Tutta la ricerca scientifica si pone e cerca di risolvere problemi sempre nuovi. Così nel 2000 si pensò di stilare una serie di problemi matematici fondamentali ancora aperti. Tra di essi sta, ancora irrisolta, la questione P vs NP, un interrogativo che si collega all'informatica teorica e intende identificare quei problemi sui numeri naturali che abbiano un algoritmo rapido di soluzione. Parte della questione consiste proprio nell'individuare concetti convincenti di algoritmo e rapidità. L'ambito dei naturali ospita poi al suo interno, grazie a opportuni codifiche, contesti applicativi svariati. Il problema P vs NP investe poi il problema della sicurezza della rete e della crittografia a chiave pubblica, con i suoi risvolti non solo scientifici e pratici ma anche etici. Un laboratorio su questi temi introduce ragazze e ragazzi alla realtà di oggi.

	LOGICA
L1	EDUCARE ALL'ARGOMENTAZIONE All'arrivo alla scuola secondaria di secondo grado, ma anche dopo, molti studenti faticano ad utilizzare ragionamenti logicamente rigorosi. Ad esempio, la negazione di una congiunzione logica o di un quantificatore, per non parlare di quella di un'implicazione, costituiscono ostacoli cognitivi profondi e diffusi. In questo tipo di attività si lavora proponendo situazioni contestualizzate dal punto di vista narrativo, indovinelli, enigmi e giochi di ruolo (anche Debate), così da favorire il passaggio dal linguaggio naturale (e impreciso) a quello dell'incedere rigoroso del linguaggio matematico.
L2	LA LOGICA DEL PRIMO ORDINE La teoria dei sillogismi sviluppata da Aristotele, la ricerca di quelli validi e il rifiuto di quelli fallaci compaiono ancora in quiz di concorsi e prove di ammissione. Sono però largamente superati. La logica si è grandemente sviluppata, appoggiandosi alla matematica. La logica del primo ordine, emersa oltre un secolo fa, è quella più potente e maneggevole per le applicazioni matematiche ma anche nelle modellizzazioni matematiche di vari contesti concreti, anche dell'informatica. Include ed estende la sillogistica, che sostanzialmente corrisponde ai casi in cui si considerano soltanto relazioni 1-arie ("essere un uomo", "essere mortale", eccetera); consente infatti relazioni binarie, funzioni, eccetera; rivela limiti espressivi, che sembrano superati in logiche più potenti, come quella del secondo ordine; ma a differenza di queste consente di sviluppare due concetti ben definiti di verità e dimostrabilità, provandone l'equivalenza: nella logica del primo ordine, vale l'uguaglianza vero = dimostrabile, e in questo senso si dimostra la verità, tutta la verità, nient'altro che la verità. Nel nostro laboratorio proponiamo alcuni aspetti di tutta questa grande varietà di tematiche, che attraverso la matematica collegano filosofia, linguaggi, informatica, studio delle situazioni complesse.
L3	ANTINOMIE E CRISI DEI FONDAMENTI Alla fine dell'Ottocento, alcuni filosofi della scienza, in particolare Frege, accarezzarono la speranza di fondare saldamente su basi logiche tutta la matematica, a cominciare all'aritmetica. Si sviluppò poi, grazie a Cantor, la teoria degli insiemi, che consente lo studio matematico dell'infinito. Il concetto di insieme sembrò quello adeguato per sviluppare l'intera matematica. Ma il progetto resistette solo per pochi anni. A inizio

	Novecento, il <i>paradosso di Russell</i> ne minò le radici e ne provò l'irrealizzabilità. Altre antinomie affiorarono nella teoria degli insiemi, evidenziando la necessità di chiarirne i concetti con un'opportuna assiomatizzazione. Questi paradossi hanno spesso formulazioni semplici e affascinanti. Del resto, le ricerche di Cantor si riconducono spesso all'antico <i>paradosso del mentitore</i>, che si chiede se chi afferma "sto mentendo" mente o dice la verità. Tutti questi paradossi si possono presentare in classe, con le dovute cautele, perché stimolano la curiosità, incoraggiano il pensiero critico e promuovono l'innovazione, spingendo a controllare con attenzione concetti e definizioni apparentemente consolidate. I ragazzi saranno anche coinvolti nella creazione di animazioni e/o video, nella lettura di testi fondamentali e nella creazione di percorsi interdisciplinari sul tema della crisi delle certezze. Laboratori su queste tematiche possono essere svolto nel secondo biennio o nel quinto anno.
--	---

	STEAM
S1	LE STIME "ALLA FERMI" C'è un famoso aneddoto in cui si descrive come Enrico Fermi riuscì a stimare, con qualche divisione, il numero di accordatori di pianoforti a Chicago. In questo percorso, che incrocia i temi propri del percorso di Fisica del triennio, si allenano gli studenti e le studentesse ad apprezzare gli ordini di grandezza di alcune quantità che entrano a far parte della nostra vita, con particolare riferimento ai consumi energetici. Si tratta pertanto di un percorso anche di cittadinanza consapevole.
S2	MISURARE LONTANO Gli allievi e le allieve esplorano, in modalità laboratoriale e con strumenti poveri, la possibilità di misurare lunghezze inaccessibili, come l'altezza di un alto palo o la distanza tra due palazzi. La storia è ricca di queste misure, a cominciare da quella famosa di Eratostene. Ripercorrendo alcune tappe della matematica alessandrina, il percorso può intercettare tutte le discipline STEAM, ma anche la storia e la geografia locali.
S3	COME LAVORA LA NATURA In questo laboratorio si studia il comportamento delle bolle di sapone, proponendo l'interpretazione settecentesca di una Natura che segue sempre istanze di minimo. Si pongono problemi che possono essere risolti con semplici ragionamenti di geometria sintetica, piuttosto che con tecniche proprie del calcolo infinitesimale. Si possono creare simulazioni al computer e collegamenti con l'arte, in un percorso STEAM che si proietta in temi di ricerca ancora non del tutto noti.
S4	L'ALGEBRA VETTORIALE L'algebra vettoriale costituisce uno strumento teorico e tecnico di enorme importanza e costituisce un esempio nel quale la capacità di collegare alcune proprietà con pochi assunti generali permette di usare un unico modello per affrontare situazioni disparate. È un esempio, tra i tanti, di come una visione astratta risulti vantaggiosa rispetto alla trattazione di un singolo caso e di come alcune soluzioni, che appaiono semplici con il senno di poi, siano state di difficile acquisizione nel corso della storia. È possibile, a esempio, inserire in un tale ambito la trattazione dei vettori geometrici, la descrizione vettoriale del movimento e delle forze in fisica, l'utilizzo delle coordinate nel piano e nello spazio, le trasformazioni affini, lo studio dei numeri complessi. È possibile, inoltre, mostrare come è possibile interpretare e dimostrare con l'algebra vettoriale teoremi di geometria euclidea. È inoltre possibile parlare della grafica dei videogiochi e creare percorsi di tipo laboratoriale.

	MATEMATICA E SCIENZE UMANE
MSU1	MATEMATICA E FILOSOFIA “Non entri chi non è geometra”, scriveva Platone all'ingresso dell'Accademia. A sottolineare che la natura della realtà, fisica ma anche metafisica, non è slegata dalla sua descrizione matematica. In questo percorso il docente sceglierà alcuni autori antichi o moderni, e conseguentemente alcuni temi, nei quali si possa intuire questo profondo legame e contestualizzarlo nella storia del pensiero.
MSU2	MATEMATICA E MUSICA Gli intrecci tra Matematica e musica sono antichi e profondi. Questo percorso si adatta ad ogni ordine di classe, e spazia dai più semplici problemi di temperamento di scala, all'analisi delle grammatiche dodecafoniche del Novecento. In questo ambito, è possibile ad esempio costruire percorsi che comprendono lo studio delle onde, o che affrontano la lettura del <i>Sectio Canonis</i> Euclideo e lo studio della scala pitagorica.
MSU3	MATEMATICA E LETTERATURA Matematica e letteratura paiono ambiti lontanissimi della cultura, tra loro quasi antitetici. Eppure, al di là delle apparenze, il loro legame pare stretto e proficuo. Ci sono matematici scrittori, come Galileo, Pascal, Carroll, e addirittura matematici che in tempi moderni hanno vinto il Premio Nobel della letteratura, come Russell e Solgenitsin. Per converso, ci sono scrittori con grandissimi interessi matematici, come Dante, Calvino, per certi versi Leopardi. Il nostro percorso proponiamo alcuni esempi significativi, affidandoci alla lettura di autori classici, che spesso studentesse e studenti incontrano all'ora di lettere: da Dante a Calvino, da Leopardi a Sinisgalli e (nell'ambito straniero) da Poe alla Szymborska. Il confronto aiuta studentesse e studenti ad ampliare il proprio orizzonte culturale ed a percepire la sottile unità della vera cultura.
MSU4	LA MATEMATICA NELL'ARTE Il percorso permette agli studenti di sviluppare competenze fondamentali in diverse discipline: attraverso l'analisi di opere d'arte si possono approfondire argomenti squisitamente geometrici (a esempio la prospettiva) e algebrico-geometrici (proporzioni, tassellazioni). Vengono inoltre richieste e stimolate competenze trasversali come la capacità di osservazione, di analisi e di ragionamento logico, di interpretazione simbolica e di contestualizzazione storica.
MSU5	ELEMENTI DI STORIA DELLA MATEMATICA In questo percorso gli studenti imparano a interpretare un'idea matematica nel suo contesto storico e a comprenderne l'evoluzione nel tempo. Questo percorso promuove la capacità di ricerca e di analisi critica, oltre a favorire lo sviluppo del pensiero logico e creativo. Inoltre, la possibilità di constatare, attraverso uno o più esempi scelti opportunamente, che gli oggetti della matematica non sono stati fissi e immutabili, colloca la disciplina nella sua corretta prospettiva e contribuisce a rimuovere il filtro emotivo che talora gli studenti e le studentesse hanno nei suoi confronti.
MSU6	LA MATEMATICA DEL NOVECENTO La matematica del Novecento ha visto un'esplosione di nuove idee e teorie che hanno rivoluzionato il modo in cui comprendiamo il mondo. Da Einstein e la relatività a Gödel e i teoremi di incompletezza, questo periodo ha visto la nascita di campi come la teoria dei giochi e l'informatica. Studiare la matematica del Novecento significa immergersi in un'epoca di scoperta e di rivoluzione intellettuale, aprendo le porte a una comprensione più profonda della realtà e delle sue sfide.

	MATEMATICA E FISICA
MF1	MATEMATICA, FISICA E ANALISI DEI DATI

	In questo percorso gli studenti realizzeranno esperimenti di fisica e i dati acquisiti saranno analizzati per mezzo degli strumenti offerti dalla matematica e dalla statistica come rappresentazione grafiche, istogrammi, fit e interpolazioni. Gli esperimenti si potranno realizzare avvalendosi dell'uso dell'App Phyphox che acquisisce i dati dai sensori presenti negli smartphone, attraverso l'uso di sensori collegati al microcontrollore arduino o attraverso l'analisi di video per mezzo del software di analisi di movimento Tracker. La realizzazione di fit lineari porterà gli studenti a verificare/ricavare le legge che descrive i dati sperimentali simulando anche se in modo semplificato l'attività di ricerca scientifica in particolare fisica.
MF2	TEORIA CINETICA DEI GAS, ENTROPIA E TEORIA DELL'INFORMAZIONE La nascita e lo sviluppo della teoria cinetica dei gas offrono un esempio particolarmente efficace per introdurre gli studenti alla fisica-matematica e all'interpretazione microscopica dei fenomeni macroscopici. In particolare, il concetto di entropia di presta con la sua interpretazione probabilistica si presta a collegamenti con la più recente teoria dell'informazione così come formulata da Shannon. Si possono riprodurre situazioni in cui collegare concetti macroscopici e concetti microscopici, fornendo situazioni, ad esempio, in cui si sperimenta come la perdita di informazione corrisponde all'aumento del numero di microstati collegati alla configurazione studiata.
MF3	LA FISICA DEL SUONO Lo studio delle onde e, in particolare del suono, si presenta come un naturale terreno di contatto fra la matematica e la fisica. Anche avvalendosi dell'uso di sensori e dell'analisi dei dati, si potranno osservare gli ampi collegamenti fra la realtà e la sua rappresentazione per mezzo dell'uso delle funzioni periodiche e le loro applicazioni (es. battimenti). Utili simulazioni dei fenomeni potranno, inoltre, essere realizzati per mezzo di software come ad esempio geogebra. Il laboratorio offre ampio spazio per collegamenti interdisciplinari, ad esempio con la musica, e può essere svolto in base al livello di approfondimento con ragazzi e ragazze di età differenti.
MF4	I PROBLEMI VARIAZIONALI DEL XVII e XVIII SECOLO I ragazzi si confrontano con problemi concreti: da quello classico della brachistocrona a quello della rifrazione della luce. In tutte queste situazioni sperimentano che cosa voglia dire affrontare un problema di minimo cui si riesce a rispondere, in base alle competenze matematiche, per via geometria, analitica o numerica. Il laboratorio offre l'occasione per comprendere lo sviluppo di idee poderose che nel XVIII illuminano lo sviluppo della meccanica.
MF5	LA LUCE E LA VISIONE Il fenomeno "luce" si presta a molti esperimenti, a partire dai più elementari fino a quelli assai sofisticati di ottica quantistica. A seconda del livello scolastico degli studenti e delle studentesse si può articolare un percorso in cui si vede come la matematica riesca a leggere questi fenomeni, a descriverli e a prevederli. Si può inoltre comprendere come alcune situazioni legate all'utilizzo della luce (ad esempio in pittura) abbiano stimolato il cambio dei modelli matematici. Il laboratorio può prendere molte direzioni, muovendo da esperienze concrete e collegandosi a temi dell'Arte, della Filosofia e della tecnologia.
MF6	MISURARE IL TEMPO La misurazione del tempo nella Storia fornisce ottimi e innumerevoli spunti per svolgere un percorso laboratoriale. Dalle meridiane agli orologi solari, dalla necessità di portare un orologio meccanico in nave per misurare la longitudine fino agli orologi atomici. Il percorso permette di affrontare il tema del tempo in modo autenticamente interdisciplinare, includendo la storia, l'arte, la letteratura e la filosofia e fornisce l'occasione per uscite didattiche significative, alla scoperta di "misuratori del tempo" nascosti delle nostre città. Inoltre, il tema offre lo spunto per riflettere sull'"attimo", tanto da un punto di vista matematico quanto dal lato artistico (citiamo a proposito il progetto "meridiane rotte" di Guidonia)
MF7	I MODELLI E I PARADIGMI

	Un modello matematico è figlio dell'esigenza di descrivere e prevedere un fenomeno: la Fisica vive di modelli che si collocano in paradigmi conoscitivi che possono, come ci ha insegnato T. Kuhn, cambiare nel tempo. In questo laboratorio si scelgono alcuni fenomeni che a seconda del livello scolastico degli studenti e delle studentesse possono essere modellizzati con le conoscenze matematiche a disposizione. Si costruiscono dispositivi sperimentali atti a verificare la bontà dei modelli e si discute dell'accuratezza della verifica, occupandosi dei metodi di valutazione dell'errore. Si può anche procedere a qualche riflessione epistemologica per comprendere la posizione moderna circa il concetto di "vero" nella scienza.
--	--