

Una proposta di temi della “Matematica del ’900” per i Licei Matematici

Documento a cura della Commissione costituita dal Gruppo UMI del Licei Matematici, formata da:
Ferdinando Arzarello, Maria Serena Baione, Roberta Basili, Claudio Bernardi, Ciro Ciliberto, Cristina Erba, Anna Rita Ferraioli, Paolo Francini, Paolo Giangrandi, Maria Antonietta Lepellere, Annalisa Malusa, Chiara Milan, Iolanda Nagliati, Andrea Palma, Davide Palmigiani, Donatella Ricalzone, Luca Sbano, Carlo Maria Scoppola, Lucia Serena Spiezia, Carlo Toffalori, Luigi Tomasi (coordinatore, referente della Giunta Gruppo UMI LM), Francesca Tovenà, Rossana Vermiglio.

Data: 3 luglio 2026

Introduzione

La Matematica si rinnova: quella del 2026 è profondamente diversa non solo dal modello di Euclide, ma anche da quella di inizio millennio, perché nel frattempo la società è già mutata. Negli ultimi due secoli, da inizio Ottocento a oggi, la ricerca matematica ha dischiuso nuovi impensabili orizzonti, sia nelle teorie astratte che nelle applicazioni concrete. Si conferma così

- anzitutto che la Matematica è parte viva e integrante della cultura, e non solo un Olimpo isolato di pochi eletti,

- e poi che la stessa Matematica non è solo un sistema chiuso e incartapecorito di conoscenze ma, al contrario, è in continua espansione ed evoluzione, in un progresso dinamico e instancabile.

Le Indicazioni Nazionali attualmente in vigore per i Licei, non solo scientifici, tengono conto di queste continue trasformazioni. Inoltre raccomandano di collegare tra loro nel processo di apprendimento le varie discipline, sottolineando la natura unitaria del sapere. Nel caso specifico della Matematica, ribadiscono l'importanza dell'acquisizione degli elementi basilari “classici” di Aritmetica, Geometria, Algebra, Analisi ma anche di branche più recenti, come la Statistica e la Probabilità, e forniscono in merito vari spunti di approfondimento.

Tuttavia, nuovi interessi si sono aggiunti in questi ultimi anni, soprattutto a motivo dello sviluppo prorompente dell'Intelligenza Artificiale. Del resto, vari aspetti sostanziali del patrimonio della Matematica classica, la greca o quella di altre antiche civiltà, sono ancora trascurati o dimenticati.

La bozza dell'aprile 2026 di nuove Indicazioni Nazionali per i Licei elaborata dalla Commissione Perla tiene conto degli sviluppi della Matematica degli ultimi tempi: ribadisce l'importanza dei concetti di assioma, teorema, dimostrazione, pur attenuando il riferimento al principio di induzione, ma sottolinea anche il ruolo della Matematica nella modellizzazione dei fenomeni del mondo esterno; contiene poi interessanti novità, per esempio sull'Algebra Lineare, o sulla Statistica e sulla Probabilità, o ancora nella creazione di un nuovo nucleo trasversale *Linguaggio degli insiemi e delle funzioni, logica e linguaggio*; si apre poi a collegamenti con Informatica e Intelligenza Artificiale.

C'è però da dire che, nella pratica della didattica, gli orari rigidi di lezione e lo scarso tempo a disposizione costituiscono un ostacolo oggettivo verso i buoni propositi di rinnovamento e ripensamento. Allora esperienze come il Liceo Matematico, con le sue ore aggiuntive volte non a ospitare nuovi esercizi e complementi, ma a schiudere questi nuovi orizzonti, sono l'occasione adatta per approfondimenti.

In questa prospettiva il presente documento vuole offrire alcuni spunti di Matematica “moderna” (nel tempo e nello spirito), vivaci e, speriamo, avvincenti e trascinanti. Confidiamo che si possano trasmettere a studentesse e studenti senza mai sacrificare il “rigore”, inteso non come costrizione ma come qualità scientifica di serietà e oggettività, e come tale base di ogni conoscenza fondata e fruttuosa. Il nostro intento è di integrare e migliorare gli spunti positivi delle Indicazioni Nazionali vigenti e di quelle nuove e ovviare in forma costruttiva a eventuali limiti e punti critici, contribuendo comunque alla loro piena realizzazione.

Il titolo del progetto, col suo riferimento alla “Matematica del Novecento”, è volutamente riduttivo: infatti i nostri propositi si allargano agli ultimi due secoli e oltre, come sopra spiegato.

Come detto, ci rivolgiamo ai docenti, con la speranza di integrare e rinnovare i contenuti delle ore di attività “tradizionale” e, soprattutto, di ispirare le ore aggiuntive. Abbiamo così individuato 8 argomenti fondamentali da approfondire. Altri se ne potrebbero aggiungere, come il rapporto con l’Informatica. Dunque, la nostra selezione degli 8 temi non ha alcuna pretesa di essere esaustiva. Del resto, alcuni di essi sono già considerati nelle Indicazioni Nazionali, mentre altri spunti vengono dibattuti da altre commissioni nell’ambito del Gruppo UMI del Liceo Matematico. Questa suddivisione in 8 argomenti non vuole neppure essere una ripartizione rigida in steccati disgiunti: infatti, i temi in questione non sono alternativi e concorrenti, al contrario sono intimamente legati tra loro, come pure ad altri che abbiamo sacrificato. La distribuzione avviene quindi solo per comodità, per garantire una minima organizzazione alla ricchezza degli spunti da trattare.

Gli otto argomenti sono i seguenti:

1. Aritmetica, Teoria dei numeri
2. Gruppi e altre strutture algebriche
3. Algebra Lineare e Geometria
4. Grafi
5. Logica, infinito, induzione
6. Sistemi assiomatici in diversi contesti; geometria: postulati di Euclide, assiomi di Hilbert, introduzione alle geometrie non euclidee
7. Modelli matematici.
8. Statistica e Probabilità.

I dettagli di ciascuno, le note storiche, le motivazioni didattiche ed epistemologiche, esempi espliciti di attività e laboratori, il collegamento con le Indicazioni Nazionali vigenti e quelle nuove saranno descritti separatamente, caso per caso. Qui ci limitiamo a introdurre brevemente idee e motivazioni generali.

Il tema 1 (Aritmetica, Teoria dei numeri) ha radici antichissime, risalenti almeno a Pitagora, ma conserva misteri antichi e intriganti, per esempio sulla distribuzione dei primi, e ha proposto di recente risultati brillanti quale la soluzione dell’ultimo teorema di Fermat, come pure applicazioni concrete con collegamenti all’Informatica, soprattutto nel campo della sicurezza della rete.

L’Algebra astratta, che rappresenta il tema 2, muove dall’Ottocento e Galois e matura nel Novecento grazie soprattutto a Emmy Noether e al suo approccio alle “strutture”. Assicura a sua volta applicazioni all’Informatica.

L’idea di geometrie multidimensionali nasce a metà Ottocento con Riemann. L’Algebra Lineare e il concetto di spazio vettoriale (dunque il tema 3) emergono nell’Ottocento e si sviluppano nel

Novecento. Citiamo qui solo Klein e il suo *Programma di Erlangen*. Questi concetti hanno un ruolo centrale in Fisica, ma di recente anche in Informatica e perfino nell'Intelligenza Artificiale.

La nascita dei grafi (il tema 4) è in genere collocata nel 1700 e riferita a Eulero. Il relativo concetto è fondamentale nella Matematica moderna, in particolare in topologia e in combinatoria, e trova feconde applicazioni in Informatica e complessità computazionale.

La Logica ha radici antichissime, almeno da Aristotele. Ma la “Logica matematica” (il tema 5) prende forma a metà Ottocento. Si rafforzano i legami con la ricerca matematica, con felici applicazioni. Tra queste rientrano, tra l'altro, lo studio matematico dell'infinito di Cantor, come pure l'avvio della moderna Informatica e della Teoria della calcolabilità, soprattutto grazie a Turing. Collegamenti con l'Aritmetica si osservano nel principio di induzione - la base per l'introduzione dei numeri naturali. La Logica è fondamentale per la strutturazione e il chiarimento del linguaggio matematico (per esempio nella distinzione tra “se”, “solo se”, “se e solo se”). Ma è anche spunto di quiz e paradossi, intriganti e divertenti.

Il tema 6 tratta l'approccio assiomatico. Il modello classico di sistema ipotetico-deduttivo è quello euclideo, che però prende consistenza e consapevolezza solo a fine Ottocento e inizio Novecento. Più o meno negli stessi anni si arriva a un'assiomatizzazione dei numeri naturali e di quelli reali. Ma il processo assiomatico si applica anche alle strutture, come i gruppi e gli spazi vettoriali. Capita poi che assiomi tra loro contrastanti, ma di per sé singolarmente coerenti, portino a visioni alternative delle cose, come testimoniato dalle geometrie non euclidee. A partire dagli assiomi, la Matematica raggiunge poi i suoi teoremi, grazie alle dimostrazioni. Anche il concetto di dimostrazione è cruciale, per comunicare a studentesse e studenti capacità di argomentare con coerenza. D'altra parte ogni “bella” dimostrazione matematica viene vista da alcuni (in particolare da Gabriele Lolli) come modello di narrazione: una favola, col suo svolgimento, i suoi meandri, la sua conclusione.

Il tema 7 si concentra dichiaratamente sulle applicazioni concrete di teorie e metodi matematici alla realtà. Prima del Novecento la modellazione matematica era usata quasi esclusivamente in ambito fisico (si pensi alla meccanica di Newton, alle equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell o alla termodinamica). Nel XX secolo la Relatività e la Meccanica Quantistica hanno richiesto strumenti matematici mai coinvolti prima nella descrizione delle leggi naturali. Parallelamente, la nozione di modello matematico ha allargato il suo spettro di applicazione ad ambiti prima considerati distanti dalla Matematica astratta, come la Biologia, l'Economia, la Sociologia e, in tempi recenti, l'Intelligenza Artificiale. L'approccio matematico, garantito in particolare da Analisi Matematica, Analisi Numerica, Fisica Matematica, Ricerca Operativa, consente di coordinare e interpretare queste informazioni tramite modelli astratti appropriati e strumenti adeguati.

Il tema 8 (Statistica e Probabilità) ha strette connessioni con la realtà e con altre scienze: Fisica, Informatica, Medicina, Economia, Scienze Sociali. Il Calcolo delle Probabilità nasce nel Seicento, collegato più che altro ai giochi d'azzardo, ma poi acquista le valenze che si dicevano in ambiti come salute, finanza, programmazione sociale. La Statistica ha radici più profonde, derivanti dall'esigenza di uno stato di censire cittadini, finanze e ricchezze. Entrambe si applicano a situazioni di incertezza, apparentemente antitetico alla ricerca matematica della verità e della certezza, e vivono un periodo di grande sviluppo, con collegamenti con l'Intelligenza Artificiale.

Riferimenti importanti per la nostra proposta sono presenti nei seguenti progetti:

UMI:

- Matematica 2003 (umi.dm.unibo.it/wpcontent/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf),

- Matematica 2004 (umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2004.pdf)

Piano M@t.abel:

- www.indire.it/db/docsrv/A_bandi/apprendimenti_base_matematica.pdf
- www.matematica.it/tomasi/mat.abel/matabel-scuola-sec2.htm

Progetto Klein Italia:

- www.liceomatematico.it/progetto-klein-italia

Allegato B, del DM 107/giugno 2026 di autorizzazione della sperimentazione del Liceo Matematico

- www.orizzontescuola.it/wp-content/uploads/2026/06/Allegato-B_decreto-Liceo-Matematico-signed.pdf

Infine, due parole sulle connessioni tra i vari argomenti.

Il principio di induzione, che compare nel titolo di 5, riguarda chiaramente anche i temi 1 e 6. La tematica stessa di 6 lo collega in modo naturale a 5, ma anche agli altri temi in discussione.

Le strutture algebriche considerate nel tema 2, in particolare anelli e domini euclidei, sono spesso ispirate dalla Teoria dei numeri, dove dunque si impiegano. Il concetto di gruppo ha radici e applicazioni in Geometria, ed è alla base della definizione di spazio vettoriale.

Il tema 7 si è storicamente sviluppato in stretto collegamento con i temi 1, 2 e 3. Il tema 4 è poi molto legato agli aspetti più avanzati della modellizzazione delle reti. Il tema 6 è necessariamente connesso col tema 7 per quanto riguarda la rilevanza del metodo assiomatico e l'importanza delle geometrie non euclidee nella Fisica moderna, in particolare nella Relatività ristretta e generale.

Il tema 8 è legato ai precedenti 1, 2, 3, 4, che trattano strumenti matematici utili per il calcolo delle probabilità e statistica. È connesso anche con l'argomento 6, per esempio per l'approccio assiomatico di Kolmogorov, ma anche per i concetti di "verità" e "dimostrazione". Sempre sul rapporto tra certezza e incertezza in Matematica e nella vita reale è intrigante il confronto col tema 5. Infine, i temi 7 e 8 sono intimamente legati sia dall'uso della modellizzazione, sia dal carattere genuinamente applicativo delle teorie matematiche che vengono sviluppate.

Tema n. 1 - Aritmetica, Teoria dei numeri

Introduzione storica

L'aritmetica ha radici antichissime, risalenti almeno all'epoca di Pitagora, è stata nei secoli un fondamento della Matematica ed è stata celebrata anche da Gauss come la “*regina della Matematica*”; anche in tempi recenti vanta teoremi e misteri di grande bellezza e spessore, come il teorema sulla distribuzione dei numeri primi (dimostrato nel 1896), l'ipotesi di Riemann e la dimostrazione di Wiles (1994) dell'ultimo teorema di Fermat, insieme a sorprendenti applicazioni concrete, come quelle alla crittografia e alla sicurezza della rete.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

Nelle Indicazioni si suggerisce in modo esplicito di favorire la “*conoscenza elementare di alcuni sviluppi della Matematica moderna*”; si fa riferimento ai seguenti temi nelle linee generali (L) o negli obiettivi specifici del primo biennio (P) e del secondo (S):

(L) principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare;

(L) ruolo della Matematica nella tecnologia;

(P) algoritmo euclideo per il MCD come esempio di procedimento algoritmico;

(P) approfondire la conoscenza della struttura dei numeri interi;

(P) proprietà dei polinomi e divisione con resto (evidenziando l'analogia con gli interi);

(P) calcolo vettoriale e matriciale;

(S) infinito matematico (in connessione con i reali) - successioni (anche per ricorrenza).

Riferimenti alle nuove Indicazioni Nazionali (Bozza Commissione Perla, aprile 2026)

Le nuove Indicazioni attribuiscono un ruolo centrale all'Aritmetica e all'Algebra sin dal primo biennio, sottolineando l'uso consapevole delle proprietà delle operazioni e del linguaggio algebrico per modellizzare e argomentare: “*lo studente è in grado di operare con i numeri interi e razionali [...] e usa il linguaggio algebrico per esplorare situazioni, cercando esempi e controesempi, congetturando e argomentando*”.

Sono previsti obiettivi relativi agli insiemi numerici, alle potenze, ai numeri razionali, reali e complessi, ai sistemi di numerazione; grande importanza è data al conteggio degli elementi di insiemi finiti e, soprattutto, allo sviluppo di competenze di lettura, analisi e progettazione di algoritmi.

Pur non citando esplicitamente temi come il massimo comune divisore, il principio di induzione o le proprietà strutturali dei numeri primi, le nuove Indicazioni ne implicano l'uso per coerenza interna e per la costruzione rigorosa delle dimostrazioni che si intende perseguire: “*costruire dimostrazioni [...] giungendo a conclusioni coerenti e fondate*”.

A nostro avviso l'educazione algoritmica può iniziare dall'algoritmo della divisione con resto, dall'algoritmo euclideo per il MCD, o da semplici test di primalità, e la capacità dimostrativa può partire dalla prova dei criteri di divisibilità, o del teorema della fattorizzazione unica (che però richiede il principio di induzione), e proseguire con i metodi risolutivi di semplici equazioni diofantee (come la pitagorica o le lineari) o congruenze, introducendo l'aritmetica modulare.

Il conteggio di insiemi finiti comprende non solo il calcolo combinatorio, ma anche il numero dei divisori di un fissato intero, o dei naturali minori e coprimi con esso (funzione ϕ di Eulero). Le successioni non si limitano certo alle progressioni aritmetiche e geometriche: riguardano anche i quadrati (o i cubi) dei naturali, e si possono anche per esse trovare le formule chiuse per le somme parziali (e qui l'induzione torna di nuovo utile); ci sono poi quelle definite per ricorrenza, come la celebre successione di Fibonacci, che porta al numero aureo.

Nel quinto anno compaiono, fra gli approfondimenti opzionali, gli assiomi dell'aritmetica di Peano, gli insiemi infiniti numerabili (e non) e la crittografia, ambiti in cui il principio di induzione matematica e l'aritmetica modulare trovano un'applicazione naturale e inevitabile.

Le nuove Indicazioni, infine, attribuiscono grande e rinnovata importanza all'Informatica, sia come uso consapevole di strumenti digitali e di Intelligenza Artificiale, sia come sviluppo di una forte comprensione e di capacità di realizzazione di algoritmi. L'attenzione è rivolta non solo alla capacità di programmare semplici procedure, ma anche alla presa di coscienza di questioni fondamentali di automazione come la computabilità, la correttezza e l'efficienza degli algoritmi: temi che rimandano direttamente al lavoro di Alan Turing, padre dell'informatica teorica, e che hanno trovato pieno sviluppo nel XX secolo.

Temi proposti e motivazioni

Sono stati individuati quattro ambiti tematici particolarmente significativi per un possibile aggiornamento dei curricula di Matematica nei Licei. Tali proposte, pur diverse per natura e livello di approfondimento, condividono l'obiettivo di offrire agli studenti una visione più ampia, contemporanea e culturalmente radicata della disciplina, valorizzando connessioni interne alla Matematica e aperture verso altri settori

I quattro temi, di seguito indicati nei sottoparagrafi da 1. a 4., mirano a rafforzare la dimensione culturale della Matematica, evidenziandone la vitalità e la presenza nella società contemporanea, ma per poter essere introdotti richiedono di aggiungere nei programmi altri argomenti che, pur non rientrando nella Matematica del '900, presentano una forte propedeuticità oppure costituiscono un valido terreno preparatorio ai temi individuati. Questi argomenti propedeutici sono di seguito indicati nel sottoparagrafo 5.

1. Crittografia e sicurezza dell'informazione

L'introduzione di elementi di crittografia classica e moderna — in particolare la crittografia a chiave pubblica e i problemi aritmetici che la sostengono — consentirebbe agli studenti di cogliere l'attualità della Matematica nella vita quotidiana (comunicazioni digitali, transazioni, privacy). Il tema offre inoltre un ponte naturale con l'algebra dei numeri interi, la Teoria dei numeri elementare, la complessità computazionale e l'Informatica. Anche la crittografia quantistica può essere evocata, stabilendo un collegamento diretto con alcuni concetti di Meccanica Quantistica che si affrontano nei corsi di Fisica (valorizzando l'integrazione interdisciplinare tra le due materie).

2. Cenni storici sull'Ultimo Teorema di Fermat

Ovviamente non proponiamo un trattamento tecnico della dimostrazione di Wiles, ma un percorso storico-narrativo, anche attraverso la lettura di testi divulgativi, che mostri come un problema, elementare da formulare, abbia attraversato secoli di Matematica per essere risolto. Tale prospettiva permette di evidenziare un aspetto avvincente della Matematica, e permette un ponte con altri problemi analoghi (risolti o ancora aperti) non solo afferenti alla teoria dei numeri (congettura di Goldbach, ipotesi di Riemann e gli altri *Millennium Problems*, successione di Collatz, eccetera).

3. Domini euclidei e strutture algebriche.

L'introduzione, in forma accessibile, del concetto di valutazione euclidea e dominio euclideo (ad es. l'anello dei polinomi su un campo, gli interi di Gauss) come generalizzazione dell'anello degli interi, offre agli studenti un esempio di astrazione algebrica che resta ancorato a procedure note (divisione con resto, algoritmo di Euclide). Questo tema permette di mostrare come idee elementari possano essere estese a contesti più generali, collegando Aritmetica, Algebra, Geometria e teoria delle strutture e di esplorare degli illuminanti controesempi di insiemi numerici, come $\mathbb{Z}[\sqrt{15}]$ dove

non tutti gli irriducibili sono primi e dove non vale l'unicità della fattorizzazione (proprietà che, altrimenti, appare scontata).

4. Algoritmi, computabilità e complessità computazionale.

A partire da quello euclideo, o a qualche facile test di primalità, l'introduzione e la discussione sugli algoritmi, sul concetto di calcolabilità e sull'efficienza delle procedure consente di integrare la Matematica con l'Informatica teorica, mostrando come la formalizzazione del pensiero computazionale abbia trasformato la scienza contemporanea. In questo contesto, il Problema n. 10 di Hilbert (collegabile con i teoremi di incompletezza di Gödel, o col problema della fermata di Turing) rappresenta, nella sua soluzione negativa, un esempio emblematico dei limiti della conoscibilità nel quadro più ampio della crisi epistemologica del Novecento che può essere trattata a livello interdisciplinare.

5. Argomenti propedeutici.

I seguenti argomenti sono già menzionati nelle Indicazioni Nazionali, ma di fatto occupano un ruolo marginale e andrebbero trattati in modo più dettagliato.

- Corso più approfondito sui numeri naturali (assiomatizzazione di Peano) e interi
- Ruolo e proprietà dei numeri primi, Teorema Fondamentale dell'Aritmetica
- Teorema e algoritmo della divisione con resto
- Algoritmo euclideo per il calcolo di MCD, Teorema di Bézout
- Induzione matematica (legami col principio del minimo) e concetto di ricorsività
- Anello delle classi di resto, congruenze, equazioni diofantee
- Funzione ϕ di Eulero, Piccolo Teorema di Fermat e Teorema di Eulero
- Caratterizzazione delle terne pitagoriche
- Successione di Fibonacci (spunto per l'algebra delle matrici 2×2) e numero aureo.

Data la vastità dei nuovi contenuti presenti nella proposta, si suggerisce che la collocazione dei vari argomenti venga ripartita, in modo diacronico, nel corso dei cinque anni del curriculum scolastico. È anche possibile ridurre i contenuti operando una selezione degli argomenti, se verrà ritenuta opportuna.

Esempi di attività e laboratori

Per alcuni esempi di esperienze e attività laboratoriali si segnalano i moduli presenti nell'Allegato B del Decreto Ministeriale n. 104 del 10 giugno 2026, con particolare riferimento ai moduli AG1, AG2, AG3, AA1, AA2, AA3, I1, I3, I5.

Si suggerisce inoltre di consultare le attività didattiche presenti nei progetti UMI, *Matematica 2003*, *Matematica 2004*, M@t.abel e Progetto Klein Italia, già citati nell'Introduzione.

Infine, con riferimento alla seguente bibliografia, si segnalano documenti e testi inerenti i vari argomenti dei temi proposti:

- *Numeri Naturali, Peano, Interi, Numeri Primi*: [1] pp.145-155 e 164-169 - [2] - [3].
- *Principio di induzione - Successioni per ricorrenza - Numeri di Fibonacci*: [1] pp.1-13 - [2].
- *Divisione con resto, MCD, Congruenze, Equazioni diofantee*: [1] pp.14-20 e 111-144 - [2] - [3].
- *Terne Pitagoriche - Ultimo Teorema di Fermat*: [2] - [4] pp 97-102
- ϕ di Eulero - *Crittografia classica e a chiave pubblica*: [1] pp.156-161 e 315-440 - [2] - [4]
- *Crittografia quantistica*: [1] pp.441-466 - [2] - [4] - [5].
- *Algoritmi, Complessità, Problema H10*: [1] cap. 2 - [2].
- *Domini Euclidei*: [1] pp. 21-29 e 169-185.

Bibliografia

- [1] M.W. Baldoni, C. Ciliberto, G.M. Piacentini Cattaneo, *Aritmetica, Crittografia e Codici*, Springer
- [2] S. Leonesi, C. Toffalori, *Numeri e crittografia*, Springer Italia, Milano, 2006
- [3] B. Scimemi, *Algebretta*, Decibel-Zanichelli.
- [4] C. Ciliberto, *Argomenti di matematica elementare da un punto di vista superiore, Spunti per l'organizzazione di lavoro interdisciplinare e laboratoriale nelle classi di scuola superiore di II grado*, Nuove Convergenze, UMI-CIIM, Utet, 2023.
- [5] M.W. Baldoni, C. Ciliberto, G.M. Piacentini Cattaneo, La crittografia quantistica, *Lettera Matematica PRISTEM*, 59 (2006), 22-34.

Tema n. 2 - Gruppi e altre strutture algebriche

Introduzione storica

L'Algebra astratta non nasce come formalismo autoreferenziale, ma come risposta a problemi matematici concreti e profondi. Le svolte concettuali dell'Ottocento e del Novecento (teoria di Galois, pensiero strutturale di Emmy Noether) mostrano come l'astrazione emerga dal tentativo di comprendere simmetrie, strutture e relazioni ricorrenti. Introdurre questi temi nel curriculum del Liceo Scientifico significa offrire agli studenti un'immagine della Matematica come disciplina viva, storicamente radicata e concettualmente unificatrice.

In termini didattici, un percorso finalizzato all'introduzione delle strutture algebriche dovrebbe:

- essere strutturato a partire da una situazione problematica iniziale (un problema classico o un problema applicativo), che evidenzia in modo naturale i concetti dei quali può essere utile uno studio astratto (gruppi, anelli, permutazioni...);
- collegare la teoria alle applicazioni moderne (crittografia, sicurezza dei dati, teoria dei codici), dove le strutture algebriche svolgono un ruolo operativo;
- collocare la Matematica in una prospettiva interdisciplinare, valorizzando i collegamenti con Informatica, Fisica, Storia della scienza, Letteratura, Musica, Arte.

Un simile approccio integra dimensione storica, concettuale e applicativa e favorisce la percezione dell'Algebra come linguaggio utile a descrivere fenomeni diversi tramite strutture comuni.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

Le Indicazioni Nazionali del 2010 considerano l'Algebra insieme all'Aritmetica nel primo e nel secondo biennio. Si soffermano su calcolo simbolico e letterale, così come sulla soluzione di equazioni e sistemi e sul legame con la Geometria tramite le coordinate cartesiane. Contengono tuttavia alcuni richiami generali almeno impliciti a una lettura strutturale della Matematica, e quindi anche all'Algebra astratta. In particolare:

- *Linguaggi simbolici, formalismi e strutture.* Le Indicazioni Nazionali richiedono che lo studente sviluppi la capacità di utilizzare linguaggi simbolici e formali in modo rigoroso e di riconoscere schemi, analogie e strutture ricorrenti nei diversi ambiti della Matematica. Una riflessione sulle strutture algebriche come strumenti di organizzazione e unificazione concettuale rientra perfettamente in questa richiesta.
- *Dimensione storica e unitaria della Matematica.* Il ruolo della Storia della Matematica è esplicitamente richiamato come strumento per comprendere l'origine dei concetti e la natura della disciplina. In questo quadro si collocano in modo naturale riferimenti allo sviluppo storico dell'algebra moderna.
- *Collegamenti con Informatica, scienze applicate e cittadinanza digitale.* Le Indicazioni sottolineano l'importanza dell'interazione tra Matematica, Informatica e scienze applicate, nonché della consapevolezza dei meccanismi matematici alla base della sicurezza dei dati e delle tecnologie digitali. Le applicazioni delle strutture algebriche in ambiti quali crittografia e codifica dell'informazione si inseriscono pienamente in questa cornice.

Nel loro insieme, tali indicazioni – pur distribuite in sezioni diverse del testo normativo – consentono di fondare un curriculum verticale coerente, nel quale la riflessione sulle strutture algebriche non si configura come contenuto aggiuntivo, ma come naturale punto di arrivo di una progressiva maturazione del pensiero matematico e strutturale dello studente.

Riferimenti alle nuove Indicazioni Nazionali (bozza Commissione Perla, aprile 2026)

Nel primo biennio, l'Algebra è presentata in stretta sinergia con l'Aritmetica, focalizzandosi principalmente sulla manipolazione delle espressioni, sulle equazioni (di primo e secondo grado) e sui sistemi lineari. Gli elementi di maggiore innovazione didattica si rintracciano tuttavia nel nucleo di *Geometria* — dove l'introduzione del calcolo vettoriale elementare offre un primo ponte verso il formalismo algebrico, accanto allo studio di assiomi e trasformazioni geometriche (simmetrie, rotazioni, traslazioni) — e nel nuovo nucleo trasversale *Linguaggio degli insiemi e delle funzioni, logica e linguaggio*. Quest'ultimo riveste un ruolo cruciale, poiché introduce gli studenti alla dimensione astratta e strutturale dell'Algebra moderna e della Logica. Nel secondo biennio, l'Algebra viene accorpata alla *Geometria*, la quale mantiene però un peso preponderante. In questa fase lo studio dell'Algebra prosegue con l'approfondimento dei sistemi lineari, mentre l'interazione con le trasformazioni geometriche viene ripresa, seppur in modo parziale e con minore incisività formale. Al quinto anno, infine, il nucleo dell'Algebra scompare come voce autonoma, lasciando spazio agli altri ambiti disciplinari.

Temi proposti e motivazioni

Gli spunti delle Indicazioni Nazionali vigenti e quelle nuove suggeriscono all'interno del Liceo Matematico approfondimenti sotto vari aspetti: (a) i gruppi di trasformazioni geometriche; (b) strutture astratte ispirate dall'aritmetica; (c) un approccio assiomatico alle strutture algebriche astratte, anzitutto i gruppi, ma eventualmente anche domini euclidei e campi finiti (e nell'ambito geometrico i piani proiettivi).

È comunque fondamentale che questi argomenti vengano introdotti nelle opportune forme laboratoriali, passando così dalla pratica laboratoriale alla lettura strutturale dell'Algebra. I temi che seguono hanno appunto l'obiettivo di mostrare come le idee fondamentali dell'algebra astratta possano essere riconosciute e progressivamente comprese attraverso situazioni concrete, problemi significativi e attività laboratoriali ricche dal punto di vista concettuale.

In questa prospettiva, la definizione formale non viene anticipata come contenuto prescrittivo, ma può essere proposta — ove opportuno — come punto di arrivo culturale di un percorso di esplorazione, nel quale gli studenti incontrano trasformazioni, equivalenze e regolarità operative ricorrenti. Ciò consente di presentare nozioni come quella di gruppo non come astrazioni calate dall'alto, ma come sintesi concettuali di fenomeni già esplorati, in modo coerente con le Indicazioni vigenti e con quelle nuove.

È anche fondamentale scoprire la ricchezza di applicazioni concrete dell'Algebra moderna.

1) Permutazioni e riorganizzazione di insiemi finiti

Collocazione curricolare: primo biennio per problemi di conteggio, classificazione, configurazioni equivalenti; inizio secondo biennio per un'eventuale sintesi concettuale.

L'analisi dei modi in cui è possibile “riorganizzare” gli elementi di un insieme consente di osservare operativamente la composizione di trasformazioni, l'esistenza della trasformazione identica e della trasformazione inversa. Il tema ha legami con l'Aritmetica ed è uno strumento di base per il Calcolo delle Probabilità.

2) Trasformazioni geometriche

Collocazione curricolare: classe seconda per la fase esplorativa; secondo biennio per una sistematizzazione concettuale

Le trasformazioni geometriche del piano costituiscono altri esempi concreti di gruppi di trasformazioni definiti da proprietà di invarianza. Attraverso il lavoro sulle isometrie come prodotti di riflessioni, ad esempio, gli studenti possono giungere naturalmente all'elegante teorema di classificazione. Questo studio rafforza il collegamento tra geometria e funzioni e favorisce una comprensione progressiva dell'idea di struttura, coerentemente con lo sviluppo cognitivo degli studenti.

3) Aritmetica elementare e proprietà strutturali (dalle operazioni agli insiemi con struttura)

Collocazione curricolare: primo biennio (con richiami nel secondo).

Lo studio dell'aritmetica degli interi e dei numeri razionali consente di riflettere sulle proprietà delle operazioni e sulle motivazioni che conducono all'estensione degli insiemi numerici.

Un percorso analogo può essere sviluppato nel contesto dei polinomi, mettendo in evidenza analogie strutturali che favoriscono un approccio comparativo. Di nuovo, il tema ha legami con l'Aritmetica.

4) Congruenze ed equivalenze

Collocazione curricolare: classe seconda per l'introduzione operativa; secondo biennio / classe terza per sviluppi e applicazioni.

L'aritmetica modulare permette di esplorare la nozione di equivalenza, mostrando come operazioni definite sugli elementi originari possano essere estese in modo coerente alle classi. Queste esperienze introducono l'idea di struttura quoziente con applicazioni significative nella crittografia elementare e nella codifica dell'informazione. Ci sono ancora legami con l'aritmetica.

Esempi di attività e laboratori

1) Gruppi di permutazioni: "Quanti braccialetti posso creare?"

Anno consigliato: Classe seconda (biennio).

Descrizione: A partire dalla domanda "Quanti braccialetti di n perle con k colori diversi posso costruire?", gli studenti esplorano il ruolo delle permutazioni, osservano simmetrie (rotazioni/riflessioni) e comprendono perché il conteggio intuitivo tende a sovrastimare il numero effettivo di oggetti distinti.

2) Laboratorio "Matematica e Musica": le isometrie come trasformazioni sonore

Anno consigliato: Classe seconda/terza.

Descrizione: Lo studio delle isometrie (traslazioni, rotazioni, riflessioni) viene affiancato all'analisi di trasformazioni musicali: inversione, retrogradazione, trasposizione.

3) Geometria e teoria di Galois: costruibilità con riga e compasso

Anno consigliato: Classe terza/quarta.

Descrizione: Partendo dal problema classico della costruibilità geometrica con riga e compasso (da introdurre con gli esempi opportuni), si analizzano le estensioni algebriche di grado 2, mostrando come la costruibilità implichi la generazione di una torre di campi quadratici. Si arriva così a introdurre il gruppo di Galois come insieme delle simmetrie dell'estensione.

4) Gruppi diedrali e arte: rosoni, mosaici e simmetrie

Anno consigliato: Classi seconda o quarta (attività trasversale con Arte).

Descrizione: Analisi di rosoni e mosaici tipici dell'arte italiana ed europea. Gli studenti individuano simmetrie e costruiscono il gruppo ciclico e il gruppo diedrale D_n associato.

5) Aritmetica elementare e strutture: dagli interi alla fattorizzazione unica

Anno consigliato: Classe terza o quarta.

Descrizione: Dal paragone tra interi e polinomi su un campo si arriva alla nozione di anello euclideo. Si esplora il teorema di fattorizzazione unica, e si mostrano esempi nei quali tale teorema non vale.

6) Strutture finite e combinatoria: il gioco *Dobble*

Anno consigliato: Classe seconda/terza.

Descrizione: Si analizza la struttura combinatoria del gioco *Dobble*, collegandola a piani proiettivi finiti, insiemi di punti/rette e strutture di incidenza.

7) Dimostrazione combinatoria del piccolo teorema di Fermat ("metodo delle collane")

Anno consigliato: Classe seconda.

Descrizione: Si utilizza una costruzione combinatoria (collane colorate) per mostrare che $a^p \equiv a \pmod{p}$, collegando classi di resti, congruenze e simmetrie cicliche.

8) Trasformazioni geometriche, fregi, rosoni e proiettività (estensione delle proposte 4 e 6)

Anno consigliato: Classe terza/quarta.

Descrizione: Studio dei sette gruppi di fregi, dei gruppi diedrali nei rosoni e introduzione intuitiva delle proiettività. Possibile estensione con la costruzione di un mini-*Dobble* legato alla proiettività del piano.

9) Crittografia elementare

Anno consigliato: Classi seconda–terza (flessibile).

Descrizione: Dall'aritmetica modulare ai cifrari classici, fino ai concetti fondamentali della crittografia moderna: esponenti modulari, gruppi ciclici, principio della difficoltà computazionale.

10) Algoritmi di correzione-errore e codici QR

Anno consigliato: classi terze-quarte

Descrizione: Dai codici di correzione di singoli errori (Hamming codes) ai codici basati sui campi finiti per la correzione di molteplici errori (Reed Solomon e BCH), imparando a lavorare operativamente con alcuni campi finiti fino a produrre un codice QR a mano.

Bibliografia

- [1] F. Bellissima, *La scala musicale: una storia tra matematica e filosofia*, Carocci editore, Roma, 2022.
- [2] J. Bewersdorff, *Galois Theory for Beginners - A Historical Perspective*, Second Edition, Student Mathematical Library Vol. 95, American Mathematical Society, 2021.
- [3] N. Chiriano, *Matemusica*, quaderno del Pristem, n. 47 (Alice&Bob), Egea 2017.
- [4] B. D'Amore, *Arte e Matematica*, Edizioni Dedalo, 2015.
- [5] M. Dedò, *Trasformazioni geometriche*, Zanichelli, Decibel, 1996.
- [6] G. Filocamo, *La matematica è un'opera d'arte*, Gribaudo Ed. , 2017.
- [7] E. Rainer, *Gruppi cristallografici piani: teoria e applicazione alle opere di M.C. Escher*, 2024.
- [8] C. Salgado, *The Geometry of the Game DOBBLE*
www.uu.nl/sites/default/files/Cecilia%20Salgado%20HandoutNWD2022.pdf
- [9] B. Scimemi, *Algebretta*, Decibel-Zanichelli. Padova, 1989.
- [10] V. Villani, *Cominciamo dal punto*, Pitagora, Bologna, 2006.

Tema n. 3 – Algebra Lineare e Geometria

Introduzione storica

Per comprendere appieno la portata unificatrice dell'Algebra Lineare, è utile inquadrarne brevemente lo sviluppo storico, profondamente intrecciato con l'evoluzione dell'Algebra, della Geometria, dell'Analisi e della Fisica. Se le origini remote possono essere rintracciate nell'algebrizzazione della Geometria operata da Cartesio (1637) e nell'uso dei determinanti per la risoluzione dei sistemi lineari (Cramer, 1750; Lagrange, 1770), è nell'Ottocento che l'Algebra Lineare assume la propria fisionomia. Cruciali furono i contributi di Hermann Grassmann (1844), i lavori di Arthur Cayley (1821-1895), James Sylvester (1850-1880), William R. Hamilton (1805-1865). Un salto concettuale di grande portata si deve poi a Felix Klein (1849-1925), con il *Programma di Erlangen* (1872), che ridefinì una geometria come lo studio delle proprietà invarianti per un gruppo di trasformazioni, collegando strettamente Algebra e Geometria. Noto fu anche il contributo della scuola matematica italiana, in primis di Giuseppe Peano (1858-1932) che fornì la prima definizione di spazio vettoriale. Nel Novecento la nozione di spazio vettoriale ha assunto un ruolo centrale in Matematica (in particolare, la struttura di spazio vettoriale è posta a fondamento della geometria dal collettivo di matematici "Bourbaki", costituitosi nel 1935), in Fisica e in tutte le applicazioni. Nel secondo dopoguerra, con lo sviluppo dell'Informatica, l'Algebra Lineare si è affermata come un elemento fondamentale anche della Matematica applicata: dall'ottimizzazione e teoria dei grafi fino agli algoritmi di *ranking* (come, per esempio, il *PageRank* in rete) e dell'Intelligenza Artificiale, segnando un percorso ininterrotto dalla Matematica del '900 all'odierna rivoluzione digitale.

Il ruolo dell'Algebra Lineare nel curriculum di Matematica

L'Algebra Lineare – la parte dell'Algebra in cui si studiano vettori, matrici e trasformazioni lineari – costituisce uno dei contributi più rilevanti della Matematica dell'Otto-Novecento e rappresenta oggi un cardine indispensabile della cultura matematica e scientifica. In un Liceo che voglia rispondere alle esigenze formative del XXI secolo, il suo potenziamento non deve essere interpretato come un ampliamento nozionistico, ma come un elemento strutturante che favorisce coesione, comprensione profonda e trasferibilità dei saperi.

La forza di questo ambito risiede nella sua capacità di astrazione e modellizzazione. Il pensiero lineare permette di trattare problemi complessi in maniera unitaria, offrendo agli studenti un linguaggio trasversale che connette diverse discipline. Oggi l'Algebra Lineare è onnipresente nei percorsi universitari STEAM ed è al centro di settori applicativi cruciali: dall'analisi statistica multivariata alla grafica computerizzata, dalla Fisica computazionale al cuore dell'Intelligenza Artificiale, dove Machine Learning, Reti Neurali e analisi dei Big Data si fondano su operazioni vettoriali e matriciali. Integrare stabilmente tali concetti nel curriculum significa fornire agli studenti non solo competenze tecniche, ma soprattutto strumenti culturali per interpretare fenomeni, dati e modelli.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

La proposta di potenziamento di alcuni temi dell'Algebra Lineare è collegata alle Indicazioni Nazionali vigenti per i Licei, che già richiamano in più passaggi la modellizzazione, l'uso di linguaggi formali e la padronanza di rappresentazioni multiple di oggetti matematici. Attualmente, tuttavia, questi riferimenti appaiono non sempre esplicitamente ricondotti a un quadro concettuale unitario. Richiamiamo alcuni punti delle Indicazioni Nazionali che sono collegati all'Algebra Lineare.

Tra i gruppi di concetti e metodi che sono obiettivo dello studio sono citati:

3) *gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale...*

I Biennio. Aritmetica e Algebra. *Studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale. Approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella Fisica.*

I Biennio. Geometria. *Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.*

I Biennio. Relazioni e funzioni. *Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b, \dots$, ...le funzioni lineari a tratti,sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica. Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta...*

L'obiettivo è quindi di costruire un curriculum verticale che, dal I biennio al V anno, renda esplicite le connessioni tra nuclei già presenti, in modo che l'Algebra Lineare emerga come un contenuto ben integrato nel curriculum di Matematica.

Riferimenti alle nuove Indicazioni Nazionali (bozza Commissione Perla, aprile 2026)

Nelle nuove Indicazioni Nazionali, parte di *Geometria e Algebra*, Secondo Biennio, l'Algebra Lineare è presente in modo apprezzabile, rispetto alle Indicazioni vigenti. Si trova scritto:

“Nel secondo biennio, a partire dall'intuizione e dalle proprietà degli enti geometrici euclidei, lo studente sviluppa il linguaggio dei vettori e delle coordinate cartesiane, e le relazioni tra descrizioni geometriche e algebriche di figure e trasformazioni. Anche grazie al linguaggio delle funzioni lineari, tali strumenti vengono estesi allo spazio tridimensionale e applicati allo studio di rette, piani e coniche, rafforzando la capacità di passare tra diversi linguaggi nella risoluzione di problemi e nella modellizzazione. In particolare, lo studente è in grado di

- rappresentare geometricamente e analiticamente la combinazione lineare di due vettori con coefficienti assegnati, nonché la retta generata da un vettore non nullo e il piano generato da due vettori non allineati;*
- descrivere una retta o un piano come insieme delle soluzioni di un'equazione o di un sistema lineare;*
- interpretare le soluzioni di un sistema lineare come decomposizioni di un vettore rispetto a un insieme di vettori assegnati;*
- discutere la risolubilità di un sistema lineare e determinarne le soluzioni, ad esempio con il metodo di eliminazione di Gauss, riconoscendo vantaggi e limitazioni di diversi approcci; riconoscere che sistemi di questo tipo si trovano nello studio della regressione e delle reti neurali;*
- descrivere algebricamente qualche semplice trasformazione geometrica e comprenderne il comportamento lineare;*
- esprimere il prodotto scalare usando le coordinate, e verificare condizioni di ortogonalità fra vettori, rette e piani.”*

Nelle nuove Indicazioni, rispetto a quelle vigenti, non viene invece citato il prodotto vettoriale.

Temi proposti e motivazioni

Le Indicazioni offrono diversi collegamenti, richiamati sopra, in cui l'Algebra Lineare è implicita, richiamata o presupposta, che in questa proposta si suggerisce di potenziare.

Nel I biennio, nella trattazione di Geometria Analitica e vettori è consigliato introdurre anche le equazioni parametriche di una retta (mediante il dato di un suo punto e di un vettore parallelo alla retta). Inoltre il prodotto scalare tra due vettori dovrebbe essere introdotto anche tramite le coordinate; conseguentemente sembra opportuno esprimere anche in termini vettoriali le condizioni di parallelismo o perpendicolarità tra due rette del piano, già nel I biennio.

Nel II biennio, lo studio di alcune trasformazioni geometriche del piano (isometrie, similitudini, affinità, ...) e delle loro proprietà invarianti, delle diverse trasformazioni del grafico di una funzione e di curve (per es. le coniche) può essere potenziato tramite il linguaggio delle matrici.

La Geometria Analitica dello spazio, al V anno, si presta particolarmente bene all'uso dei vettori e del prodotto scalare, in continuità e analogia a R^2 , in particolare quando si studiano il parallelismo o la perpendicolarità tra piani. Le equazioni parametriche di una retta in R^3 si introducono anch'esse in modo naturale tramite il dato di un punto e di un vettore parallelo alla retta. In questo contesto il prodotto vettoriale di due vettori sarà introdotto anche utilizzando le componenti e non solo con la definizione geometrica usuale.

Questi argomenti si collegano strettamente con la Fisica in tutti gli anni di studio e con l'Informatica, in cui le Indicazioni sottolineano l'importanza dell'analisi dei dati, dell'uso di fogli di calcolo e di strumenti informatici. Ciò costituisce un naturale collegamento alle nozioni di vettore (o *array*) e di matrice come strumenti per organizzare, trasformare ed elaborare informazioni.

Temi proposti e approfondimenti

Alcuni temi, presenti nelle Indicazioni Nazionali, andranno quindi approfonditi. In particolare saranno trattati: i vettori come classe di equivalenza di segmenti orientati; la scomposizione di vettori nel piano e nello spazio (non solo in Fisica, ma anche in Matematica); le coordinate cartesiane di un vettore e le proprietà delle operazioni tra vettori e tra scalari e vettori (in R^2 ed R^3).

Alcune dimostrazioni di geometria euclidea, inoltre, si prestano bene ad essere svolte con l'uso del calcolo vettoriale (per esempio, in dimostrazioni che utilizzano il calcolo baricentrico, il punto medio, il baricentro di un triangolo, nel piano e nello spazio, il baricentro di n punti; l'area di un parallelogramma, il teorema di Varignon, il volume di un parallelepipedo, ecc.).

Esempi di attività e laboratori

Qui di seguito sono indicate delle possibili attività di laboratorio. Si tratta di esperienze e attività laboratoriali svolte in classi di Liceo Matematico e, a volte, anche di ordinamento, spesso in collaborazione con insegnanti di altre discipline, in particolare Fisica e Informatica.

- Proposta di laboratorio 1, "Equazioni lineari e matrici: la Matematica in rete"

(prof. D. Breda – Dip. di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche, Università di Udine, <https://dmif.uniud.it/it/territorio-societa/pls-e-scuole/pls-matematica#equazioni-lineari-e-matrici--la-matematica-in-rete>)

Descrizione: uso dell'algoritmo di Gauss (e non solo) per modellizzare problemi della realtà.

Collegamento: Indicazioni: "modelli matematici di problemi reali".

Curriculum: classe 3^a–4^a.

Durata: 8–10 ore (conferenza introduttiva e laboratorio).

Strumenti: MATLAB/Octave.

Abstract della conferenza introduttiva: "...scusi prof... a cosa servono le equazioni?"

Il laboratorio mostra come equazioni e sistemi lineari rappresentano lo strumento fondamentale per modellare problemi reali, dai quesiti più semplici alla teoria delle code, dall'acustica alla grafica

digitale, fino al *PageRank* di Google. Vengono illustrati l'algoritmo di Gauss e la crescita della complessità computazionale con la dimensione del problema.

Di seguito sono elencati altri possibili laboratori "classici" (in parte sperimentati) e "nuovi", proposti nel Polo di Udine del LM, in cui l'Algebra Lineare gioca un ruolo notevole.

- Proposta di Laboratorio 2, "Trasformazioni geometriche nel piano con matrici 2×2 "

Materie coinvolte: Matematica–Arte–Informatica

Descrizione: applicazione di rotazioni, dilatazioni e riflessioni a figure del piano.

Collegamento: "geometria cartesiana" e "simmetrie".

Curriculum: classe 3^a– 4^a.

Durata: 4–6 ore.

Possibile output: generazione di pattern artistici (es. trasformazioni a spirale tipo Escher).

Strumenti: GeoGebra.

- Proposta di Laboratorio 3, "Algebra Lineare e grafica computerizzata"

Materie coinvolte: Matematica, Informatica.

Descrizione: come le matrici 3×3 descrivono rotazioni 3D per videogiochi o per oggetti da inserire in modelli 3D fruibili con i visori.

Concetti: prodotto matrice-vettore, composizione di trasformazioni 3D.

Curriculum: 4^a–5^a.

Durata: 6–8 ore.

Strumenti: GeoGebra 3D /Blender/Unity/Stampante 3D

Si consiglia inoltre di riferirsi ai moduli elencati nell'Allegato B del Decreto Ministeriale n. 104 del 10 giugno 2026, in particolare alle attività: L'algebra vettoriale; La nozione di dimensione; I numeri complessi; Tassellazioni, fregi e simmetrie del piano.

Bibliografia e sitografia

[1] M. Dedò, *Trasformazioni geometriche*, Decibel-Zanichelli, 1996.

[2] G.E. Martin, *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*, Springer, 1982.

[3] G. Mazzanti, V. Roselli, L. Tomasi, I vettori nell'insegnamento della Matematica nella Scuola secondaria di II grado, in *Annali online della formazione docente*, UniFe, 2012 (<https://annali.unife.it/adfd/article/view/563/497>)

[4] G. Mazzanti, V. Roselli, L. Tomasi, L'insegnamento della geometria analitica dello spazio nella Scuola secondaria di II grado: osservazioni e considerazioni didattiche, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 41B, 2018, n. 3, pp. 335-372.

[5] MPI-UMI, *L'insegnamento della geometria. Corso di formazione docenti*, Quaderno n.19/2, 1995-96, https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/19_2geom.pdf

[6] UMI, Mattoncini. *La Matematica per le altre discipline*, 2006

(<https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/MATTONCINIcrop-finale.pdf>)

[7] V. Villani, Le trasformazioni geometriche nella scuola secondaria superiore, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 18-AB, 1995, n. 6, pp. 670-688.

[8] V. Villani, *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*, Pitagora Editrice, Bologna 2006.

[9] S. Zoccante, Vettori, matrici, trasformazioni: un percorso di "algebra lineare" tra storia e didattica, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 41B, 2018, n. 3, pp. 586-596.

Tema n. 4 – Grafi

Introduzione storica

Negli ultimi tre secoli, la nozione di grafo ha mostrato una notevole utilità in molteplici ambiti della Matematica e delle sue applicazioni. I contesti dove, in modo naturale, i grafi giocano un ruolo utile e fruttuoso sono molto vari, ad esempio la combinatoria, la geometria, la topologia, l'informatica e la programmazione, la modellizzazione e l'analisi delle reti sociali.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

Nonostante la semplicità del concetto di grafo e la sua centralità nella Matematica attuale, la presenza dei grafi nei curricula scolastici italiani risulta al momento debole, non strutturale, spesso affidata a singole iniziative. Nelle vigenti Indicazioni Nazionali per i Licei, non vi è infatti alcuna menzione esplicita dei grafi.

Riferimenti alle nuove Indicazioni Nazionali (bozza Commissione Perla, aprile 2026)

Grafi e reti compaiono tra i possibili temi di approfondimento e collegamento interdisciplinare citati alla fine della parte dedicata alla Matematica per il Liceo Scientifico, ma lasciati alla scelta autonoma di docenti e studenti.

Temi proposti e motivazioni

Per i motivi appena illustrati, i grafi difficilmente compaiono nella programmazione scolastica e possono solo essere trattati per autonoma iniziativa dell'insegnante, spesso ricollegandosi a situazioni ed esempi offerti dalle tematiche affrontate (per esempio, il reticolo dei divisori di un intero, spigoli e vertici di un poliedro ed elementi basilari di topologia algebrica che sarebbe utile trattare, come la formula di Eulero, problemi da gare matematiche o percorsi specifici quali il problema dei ponti, grafi percorribili, grafi hamiltoniani etc).

D'altra parte la centralità della nozione di grafo, la sua utilità e adattabilità a vari contesti, la sua rilevanza storica, la sua attualità in relazione, in particolare, all'Informatica, all'analisi dei dati e delle reti sociali, insieme alla notevole accessibilità di tale nozione, ne suggeriscono un'adeguata presenza e trattazione nel Liceo Matematico, sia al fine di acquisirne il linguaggio e le idee base, sia in relazione a possibili percorsi tematici in vari settori della Matematica, anche in chiave interdisciplinare e nelle sue numerose manifestazioni nella realtà contemporanea.

Accanto alla nozione di grafo e alle sue applicazioni, risulta naturale, come già accennato in precedenza, introdurre nozioni basilari di Topologia Algebrica combinatoria, ad esempio le basi della omologia e della omotopia che alla teoria dei grafi si legano benissimo ed hanno molte applicazioni pratiche, oltre ad essere concetti molto naturali. La Topologia Algebrica ha avuto nel XX secolo uno sviluppo strabiliante, non ancora concluso, che ha influenzato molte parti della Matematica.

Esempi di attività e laboratori

L'elenco successivo intende mettere in luce l'ampia portata di utilizzo dei grafi e la flessibilità di ambiti a cui si applicano; non intende in nessun modo essere un invito a svolgere in classe tutti gli argomenti. Di ogni argomento indichiamo possibili riferimenti bibliografici, elencati nella sezione finale di questo documento.

1) Alberi

Applicazioni dei grafi allo studio e alla rappresentazione della filogenesi possono essere trovati in [11].

In [8, cap. 7] vengono discussi il codice di Prufer (che fornisce un algoritmo tra alberi e sequenze numeriche) e il teorema di Cayley che conta gli alberi con numero assegnato di vertici.

2) Cammini sui grafi

Esempi di attività relative a cammini euleriani e hamiltoniani si trovano in [8, cap. 9], [13, cap. 8], [3, pag. 147], [4, cap. 7].

3) Colorazione dei grafi

La colorazione dei grafi trova applicazioni in vari esempi. In [3, cap. 5] viene utilizzato per dimostrare il teorema di Sylvester-Gallai, che studia le configurazioni di punti non allineati nel piano euclideo.

Il Problema della galleria d'arte chiede quale sia il minimo numero di guardie che servono per sorvegliare una galleria d'arte poligonale, in funzione del numero di vertici [2], [7]. La dimostrazione permette di discutere la nozione di convessità e il conteggio delle diagonali di un poligono, oltre a sollecitare un procedimento induttivo.

In [8, cap. 9] è utilizzata per studiare la colorazione di una carta geografica. In [13, cap. 6] è discussa la dimostrazione del teorema dei 5 colori.

4) Completezza, clique e altre applicazioni

L'analisi del flusso di automobili in un incrocio, la composizione di un calendario di una sessione di esami sono discussi in [4, cap. 6].

A partire dagli studi di Arthur Cayley, i grafi sono utilizzati per descrivere e caratterizzare componenti chimiche, quali ad esempio gli idrocarburi alifatici saturi. Su questo argomento si trovano cenni a pag. 150 di [3] e un contributo esteso su [1] relativo alla colorazione dei fullereni.

In [8, cap. 5] si discute il problema di contare le strette di mano in un gruppo che si incontra.

5) Grafi, poliedri, genere e formula di Eulero

I grafi forniscono uno strumento di studio relativamente alla nozione di poliedro, anche prendendo in considerazione solidi con buchi. Si segnalano, a tale riguardo i laboratori di [5] e [6]. Ulteriori spunti di interesse in [8, cap. 8] e [13, cap. 4, 5, 7].

6) Grafi planari o non planari

Una discussione sulla caratterizzazione dei grafi planari può essere trovata in [13, cap. 4, 5, 7].

7) Elementi di topologia algebrica

Come ricordato nell'introduzione, i grafi forniscono un'occasione per avvicinare gli studenti a esperienze e idee collegate a proprietà topologiche e a strumenti.

Bibliografia e Sitografia

- [1] A. Centomo, Coloriamo i fullereni, Origami & Grafi, *B4MATH*, Bocconi, https://matematica.unibocconi.eu/sites/default/files/media/attach/pristem_coloriamo%2520i%2520fullereni.pdf
- [2] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. *J. Combinatorial Theory* Series 18, 39-41, 1975.
- [3] C. Ciliberto, *Argomenti di matematica elementare da un punto di vista superiore*, collana UMI-CIIM, Utet, 2023.
- [4] O. Cogis, C. Robert, *Au-delà des ponts de Königsberg, Théorie des graphes, Problèmes, théorèmes, algorithmes*, Vuibert, 2003.
- [5] L. Dragone, A. Palma, libro GeoGebra su Poliedri e Grafi, <https://www.geogebra.org/classroom/pztx2mzg>
- [6] L. Ferracuti, G. Guidone, *La ciambella che si credeva un toro*, http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2025/10/Guidone_La-ciambella-che-si-credeva.pdf
- [7] S. Fisk, A short proof of Chvátal's watchman theorem. *J. Comb. Theory* 24(3), 374, 1978.
- [8] L. Mazza, A. Veredice, *Matematica discreta, Una passeggiata tra numeri e grafi*, Scienza express, collana U MATH 18, 2024.
- [9] PLS Matematica Bologna, note di Sara Querzé: <http://www.dm.unibo.it/~arcozzi>
- [10] Ponti e Grafi <https://liceomatematicomilano.unimi.it/ponti-e-grafi/>

- [11] D. Palmigiani, Filogenesi e matematica: costruire alberi evolutivi, *Archimede* 4, 2025.
- [12] D.S. Richeson, *Euler's Gem, the polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton University Press, 2008.
- [13] R. J. Trudeau, *Dots and lines*, The Kent State University Press, 1976.

Tema n. 5 – Logica, infinito, induzione

Introduzione storica

La Logica nacque al tempo di Aristotele, che la sviluppò organicamente tramite i sillogismi, più o meno all'epoca di Euclide. Proprio gli *Elementi* euclidei ne sono ritenuti un modello basilare. Ulteriori progressi si ebbero nei millenni successivi. Tuttavia, è solo a metà Ottocento che idee e metodi di Matematica intervengono a sostegno della Logica, grazie a George Boole, Augustus De Morgan e altri. Di lì a poco grandi matematici e pensatori, come Gottlob Frege (1848-1925), concepiscono viceversa la speranza che la Matematica possa trovare nella Logica adeguati fondamenti e struttura. Il loro progetto cadrà nel giro di qualche decennio. Ma la Logica del Novecento propone ugualmente un ampio repertorio di idee che contribuiscono allo sviluppo della Matematica.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

Nelle attuali Indicazioni Nazionali per i Licei non si parla esplicitamente di Logica, ma molti concetti presenti nelle Indicazioni si collocano in un contesto di Logica:

- metodo assiomatico, con i concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione come procedimenti essenziali del pensiero matematico;
- principio di induzione matematica e suo significato filosofico;
- concetti di algoritmo e di funzione calcolabile;
- problematica dell'infinito matematico e delle sue connessioni con il pensiero filosofico.

È da notare che alcuni elementi di Logica sono esplicitati nelle Linee guida degli Istituti Tecnici e Professionali:

- Connettivi e calcolo degli enunciati. Variabili e quantificatori;
- Ipotesi e tesi. Il principio di induzione.

Per quanto riguarda l'infinito, è citato negli obiettivi specifici di apprendimento del secondo biennio, ove si suggerisce di introdurre la problematica nella formalizzazione dei numeri reali sottolineando anche le sue connessioni con il pensiero filosofico.

Infine, nelle Linee generali e Competenze della Matematica per i Licei (come pure nelle Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali) si indica (punto 8) tra i gruppi di concetti e metodi che lo studente saprà dominare attivamente “*una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare*”.

Riferimenti alle nuove Indicazioni Nazionali (bozza Commissione Perla, aprile 2026)

Si rilevano alcune differenze interessanti rispetto alle Indicazioni Nazionali del 2010.

Nel primo biennio è introdotto il nucleo trasversale, *Linguaggio degli insiemi e delle funzioni, logica e linguaggio*, che “*evidenzia gli obiettivi di consapevolezza della struttura logica e linguistica del pensiero matematico*” e sottolinea che il loro raggiungimento “*è possibile solo in modo graduale e in stretta connessione con il lavoro svolto negli altri nuclei*”. Inoltre si aggiunge che “*attraverso la Matematica lo studente sviluppa la creatività e impara a riconoscere e rispettare la coerenza logica dei discorsi e delle dimostrazioni*”.

Questo nucleo trasversale compare esplicitamente in varie conoscenze e abilità del primo biennio:

- In Aritmetica e Algebra si nomina la dimostrazione dell'infinità dei numeri primi.
- In Geometria si afferma che “*lo studente comprende il significato dei termini assioma, definizione, teorema, dimostrazione ed è in grado di usarli correttamente*” e anche “*riconosce la struttura assiomatica della geometria euclidea e comprende, anche attraverso la discussione*

del V postulato, il ruolo degli assiomi come scelte fondative da cui si sviluppa un sistema di teoremi”.

- Per le funzioni si afferma che “attraverso la pluralità di problemi che gli vengono presentati, lo studente sviluppa progressivamente il linguaggio degli insiemi e il concetto di funzione, riconoscendo la sua utilità per descrivere gli oggetti matematici e le relazioni tra essi”.
- Nel Nucleo Informatica la nozione di algoritmo è esplicitamente presente.

Invece, riferimenti espliciti come quelli sopra elencati non compaiono nel secondo biennio, mentre nel quinto anno, ma solo negli Approfondimenti per alcuni licei, compaiono gli insiemi infiniti, numerabili e non, e tra i possibili temi di collegamento interdisciplinare si indica “qualche teoria assiomatica – come le Geometrie non euclidee o i numeri naturali di Peano”.

Si notano due argomenti importanti che non risultano citati:

- Il principio di induzione, così rilevante nelle precedenti Indicazioni. Eppure nel primo biennio, nel nucleo trasversale *Linguaggio degli insiemi...*, si elencano argomenti di combinatoria finita e la nozione stessa di algoritmo, in cui il principio di induzione potrebbe intervenire proficuamente.
- Per la Logica Matematica, la proposta, nella costruzione e analisi del linguaggio logico-matematico, sembra dimenticare il riferimento ai quantificatori.

Temi proposti e motivazioni

Qualche elemento basilare di Logica sull’uso di connettivi e quantificatori in contesti stimolanti (ad es. con le storie di Furfanti & Cavalieri o simili, che uniscono il gioco alla riflessione tecnica).

Si sottolineerà come la Logica strutturi il linguaggio matematico e sia anche importante per comprendere la lingua di tutti i giorni, in quanto fonda la riflessione su un suo uso appropriato per interpretare e comunicare.

In particolare, approfondire il significato di costrutti rilevanti come ‘condizione necessaria e condizione sufficiente’, ‘se’, ‘solo se’, ecc.

Nelle attività di *problem-solving* proprie della Matematica, il docente curerà ed esplicherà con gli studenti gli aspetti logici che sostengono (o meno) i relativi processi risolutivi, esplicitando, ove occorra, la struttura logica delle argomentazioni degli allievi.

Alcuni temi della Logica dell’Otto- e Novecento:

- 1) l’infinito di Cantor, in particolare gli esempi di insiemi numerabili e non che si incontrano in Matematica (numeri - naturali, razionali, reali, complessi- e funzioni -aritmetiche, o di variabile reale);
- 2) il metodo induttivo per congetturare e argomentare opportunamente, dapprima riflettendo intuitivamente su problemi numerici concreti e successivamente passando alla dimostrazione della validità teorica di quanto si va scoprendo: si potrà così cogliere progressivamente l’importanza del principio di induzione come assioma che fonda l’aritmetica;
- 3) applicare il principio di induzione per definire successioni e funzioni aritmetiche (per es. successioni definite per ricorrenza) in contesti problematici vari ed eventualmente studiarne l’implementazione informatica;
- 4) la teoria intuitiva della calcolabilità, con cenni storici ad Alan Turing, Alonzo Church e altri; i suoi legami con lo sviluppo dei linguaggi informatici; i risultati negativi sia nel contesto algoritmico sia in quello dimostrativo, anche con riferimento a problematiche fondazionali e filosofiche; il suo ruolo in relazione allo sviluppo informatico-tecnologico in corso;

5) argomentare, congetturare, dimostrare (in vari modi) in attività effettive di *problem-solving*: si potrà così cogliere progressivamente il significato del concetto di dimostrazione in Matematica;
6) paradossi e fondamenti della Matematica.

Questi temi sono da collocare opportunamente nel piano di studi del quinquennio sia per il loro valore ‘tecnico’, sia per quello ‘culturale’; essi sono tra l’altro importanti per chi prosegue gli studi non solo in ambito scientifico ma anche in ambito umanistico.

Si suggerisce di affrontarli con attività laboratoriali intrecciate a riflessioni sulle attività più propriamente curricolari, evitando ‘recinti’ inutili e dannosi che li isolano dal complesso delle attività didattiche. In questo, il docente dovrà opportunamente dosare gli esempi di una didattica rivolta alla specificità della classe con quelli più tipicamente istituzionali e curricolari.

Varie attività potranno eventualmente essere svolte in collaborazione con insegnanti di altre discipline, per esempio di Filosofia o Italiano. Infatti, la Logica, come sottolineato nelle Indicazioni, presenta anche una connotazione culturale profonda che, da Aristotele, agli Stoici, ad Anselmo di Aosta, a Gottlob Frege, a Kurt Gödel e oltre, stimola sia una riflessione filosofica sulla Matematica sia il pensiero filosofico in generale. È importante che un Liceo, in particolare il Liceo Matematico, renda consapevoli di questo aspetto i suoi allievi.

Esempi di attività e laboratori

Si trovano esempi di questo tipo in esperienze ed attività laboratoriali svolte in classi di Liceo Matematico e, a volte, anche di ordinamento, spesso in collaborazione con insegnanti di altre discipline: Storia, Filosofia, Fisica, Italiano, Latino, Scienze, Arte, ecc. Per questo, si consiglia di riferirsi, tra l’altro, a vari moduli presenti nell’Allegato B del Decreto Ministeriale n. 104 del 10 giugno 2026, per esempio alle attività:

- Educare all’argomentazione;
- Logica (enunciati);
- Logica (logiche del primo ordine);
- Aspetti matematici dell’infinito;
- Antinomie e crisi dei fondamenti;
- La Matematica degli indovinelli;
- Algoritmi e loro codifiche;
- Computabilità e macchina di Turing.

Si suggerisce inoltre di consultare le attività didattiche presenti nei seguenti progetti, già citati nell’introduzione: UMI Matematica 2003, UMI Matematica 2004 (in particolare le sezioni su Argomentare, Congetturare, Dimostrare), Piano M@t.abel, Progetto Klein Italia.

Bibliografia

- [1] V. M. Abrusci, L. Tortora de Falco (2014/2018). *Logica*, Milano: Springer.
- [2] C. Bernardi, A. Ceroni, E. Izzo, L. Mazza, S. Perini, M. Petralla, A.R. Petrillo, E. Petterlini, G. Presen, M. Presti, F. Ruzzi, A. Veredice, R. Zuccante (2022). *Dialoghi sulla logica: Quesiti di matematica e di linguistica*. Trieste: Scienza Express.
- [3] C. Fontana, C. Toffalori, A. Veredice (2023). L’induzione matematica tra storia e didattica, *Nuova Secondaria* 5(1). 61- 82.
- [4] S. Leonesi, C. Toffalori (2007). *Matematica, miracoli, paradossi. Storie di cardinali da Cantor a Goedel*. Milano: Bruno Mondadori.
- [5] L. Tomasi (2012). Il principio di induzione matematica: considerazioni didattiche. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 35(5), 563-575.

Tema n. 6 – Sistemi assiomatici in diversi contesti; geometria: postulati di Euclide, assiomi di Hilbert, introduzione alle geometrie non euclidee

Introduzione storica

La sistemazione in forma ipotetico-deduttiva delle conoscenze geometriche pregresse è realizzata da Euclide intorno al 300 a.C., al culmine di un lungo processo di organizzazione di risultati espressi in forma di teoremi, con le loro dimostrazioni. Il modello euclideo ispirò nei secoli vari tentativi di fondare assiomaticamente anche altri settori, quali l'Aritmetica, l'Analisi e la Probabilità. Il processo si intreccia con la questione della notazione matematica, in particolare per l'Algebra, che, dalla fase *retorica* in cui i problemi e le soluzioni erano espressi a parole, senza uso di simboli matematici, attraversa la fase *sincopata* (III - XVI sec.) in cui compaiono abbreviazioni per le incognite e le operazioni, arrivando all'algebra *simbolica* (dal XVI sec.) in cui il calcolo letterale è usato per costruire le ipotesi e applicare le regole di deduzione. La riflessione attorno alle geometrie non euclidee e gli sviluppi della Logica nel '900 riconducono le aspirazioni fondazionali allo studio delle caratteristiche logiche dei sistemi assiomatici.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

Le Indicazioni Nazionali per i Licei parlano di sistemi assiomatici in più punti:

- fra i “gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio” si cita “una chiara visione delle caratteristiche dell’approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all’approccio assiomatico della geometria euclidea classica”;
- nel primo biennio, alla voce Geometria, si dice “Verrà chiarita l’importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione”;
- nel quinto anno si ribadisce che “lo studente approfondirà la comprensione del metodo assiomatico”, precisando che “Gli esempi verranno tratti dal contesto dell’aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell’insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo”.

Nella pratica didattica, tuttavia, questo tema spesso si riduce a una rapida introduzione all’inizio dello studio della Geometria; ben raramente è affrontato con modi e tempi adeguati.

Come aree della Matematica da impostare per via assiomatica, le Indicazioni suggeriscono i contesti dell’aritmetica, della geometria euclidea, della probabilità. Da un lato, riteniamo problematica la presentazione di un sistema assiomatico per la probabilità, che rischia o di ridurre l’argomento a pochi enunciati quasi banali senza conseguenze significative, ovvero di coinvolgere concetti troppo complessi. D’altro lato, come precisato nel seguito, proponiamo invece di precisare gli assiomi che fondano e sostengono il calcolo algebrico.

Riferimenti alle nuove Indicazioni Nazionali (bozza Commissione Perla, aprile 2026)

Per il tema “sistemi assiomatici” non ci sono differenze rilevanti fra le Indicazioni Nazionali 2010 e la nuova proposta. Infatti, nelle nuove Indicazioni Nazionali, per il nucleo Geometria nel primo biennio si dice che lo studente

- “riconosce ed enuncia le principali proprietà degli enti geometrici, organizzandole in una rete di connessioni e catene deduttive, in modo da comprendere il significato dei termini assioma, definizione, teorema, dimostrazione, ed è in grado di usarli correttamente;
- riconosce la struttura assiomatica della geometria euclidea e comprende, anche attraverso la discussione del V postulato, il ruolo degli assiomi come scelte fondative da cui si sviluppa un sistema di teoremi;
- dimostra nell’ambito di tale sistema alcuni risultati classici [...]

E poi alla fine, fra gli Approfondimenti suggeriti per il quinto anno nel Liceo Scientifico e nel Liceo Classico (ma non in tutti i licei), si aggiunge:

“tra i possibili temi di approfondimento e collegamento interdisciplinare si indicano: qualche teoria assiomatica – come le Geometrie non euclidee o i numeri naturali di Peano”. A quest’ultimo proposito, si rileva che sarebbe preferibile usare un’espressione diversa, come “i numeri naturali nella formulazione assiomatica di Peano”, oppure “gli assiomi dell’aritmetica di Peano”.

In generale, le nuove Indicazioni non danno particolare risalto a sistemi assiomatici, limitando il discorso alla Geometria nel primo biennio.

Temi proposti e motivazioni

L’argomento ha un’evidente importanza culturale. Di più, i concetti di assioma e teorema consentono di inquadrare in modo corretto e convincente concetti, tecniche, procedimenti usualmente affrontati nella scuola secondaria di secondo grado. Sottolineiamo che è più facile ricordare tecniche e procedimenti opportunamente motivati, che non regole memorizzate e applicate volta per volta senza collegamenti. In sostanza, questi temi risultano utili per chi proseguirà studi di tipo scientifico, ma si ritiene che, in generale, possano migliorare l’apprendimento di tutti e contribuire a formare una corretta visione della Matematica.

I temi principali sono i seguenti.

- 1) Assiomi di Peano per l’Aritmetica. È un discorso non semplice, che coinvolge anche il principio di induzione, ma è interessante un confronto fra le impostazioni assiomatiche della geometria e dell’aritmetica.
- 2) Assiomi per il calcolo algebrico. Si tratta di un percorso graduale, da affrontare via via nel corso dei cinque anni, che inizia ponendo attenzione alle classiche proprietà delle operazioni (uguaglianze da leggere nei due sensi) e alle loro applicazioni. Motivare i passaggi del calcolo algebrico contribuisce a creare consapevolezza, a dare significato alle manipolazioni, ad inquadrare i concetti e a trovare collegamenti. Nel corso degli anni, il percorso si approfondisce parlando esplicitamente di assiomi e mostrando che, a partire dagli assiomi, si ottengono come teoremi fatti noti (criteri di divisibilità, proprietà delle disuguaglianze, legge di annullamento del prodotto, teorema di Ruffini, ecc.). Se le condizioni lo permettono, si potrà arrivare all’introduzione di alcune strutture algebriche.

Riflettere sulle basi del calcolo algebrico costituisce un impegno culturale per il curriculum della scuola secondaria, che invece riduce talora l’Algebra a pure tecniche di calcolo. Un’attenzione generale ai fondamenti aiuta anche ad evitare che i concetti di assioma e di teorema siano relegati alla Geometria. Nella didattica tradizionale, dimostrazioni ricompaiono solo nell’ultimo anno con l’Analisi Matematica, ma in questo contesto è raro che oggi si parli di assiomi. In proposito, forse si potrebbe riflettere sui modi in cui proporre l’assioma di continuità, che è alla base dei teoremi di Analisi (e che si ritrova anche in Geometria).

- 3) Geometrie non euclidee. La nascita delle geometrie non euclidee presenta molti aspetti didatticamente interessanti, sia a livello logico, sia da un punto di vista storico, sia ancora per la costruzione di modelli (geometria sferica, disco di Poincaré).

Nel brano riportato nel paragrafo precedente, le Indicazioni parlano di *“Approccio assiomatico nella sua forma moderna”*. Riteniamo che si intenda contrapporre un approccio assiomatico classico, in cui gli assiomi sono le proprietà evidenti di enti che tutti conosciamo, ad un approccio più astratto, in cui gli assiomi sono le proprietà iniziali degli enti primitivi. In questo secondo approccio, gli assiomi non sono verità evidenti, ma un punto di partenza su cui impostare i successivi ragionamenti.

Tutti e tre i temi citati sono stati affrontati e approfonditi in numerose esperienze ed attività laboratoriali svolte in classi di Liceo Matematico e, in alcuni casi, anche di ordinamento, soprattutto nel primo biennio e nell'anno finale (si veda il seguito per un elenco indicativo). Da segnalare che:

- molto spesso sono stati fatti riferimenti storici (per esempio alla figura di Saccheri); in qualche caso è stata proposta la lettura di testi, anche in lingua originale (Euclide, talvolta Hilbert); non sono mancati riferimenti ad assiomi di tipo diverso, talvolta sotto forma di gioco (si veda il seguito);
- in molte occasioni si è fatto ricorso a software geometrici, come GeoGebra;
- le attività sono state condotte in collaborazioni con insegnanti di varie discipline: Storia, Filosofia, Fisica, Italiano, Latino, Arte, Tedesco, Scienze, ecc.

Tutte queste caratteristiche (aspetti storici e aspetti ludici, interdisciplinarietà, uso di software) confermano che il tema merita particolare attenzione didattica, anche in una funzione di orientamento.

Esempi di attività e laboratori

- 1) Assiomi di Peano per l'Aritmetica. Introduzione storica e sistemazione attuale.
- 2) Un sistema assiomatico per il calcolo algebrico, come sopra descritto. Ribadiamo qui che la didattica tradizionale dedica molto tempo al calcolo algebrico, ma privilegiando calcoli lunghi e applicazione meccanica di regole.
- 3) Tentativi di dimostrazione del V postulato di Euclide, formulazioni equivalenti. Equivalenza di sistemi di assiomi apparentemente diversi. Sistemazione di Hilbert della geometria. Introduzione delle geometrie non euclidee "sia per via sintattica (cioè modificando opportuni assiomi della geometria euclidea) sia per via semantica (cioè attraverso lo studio di modelli)" (dal Progetto UMI "Matematica 2004"). Nuove proprietà delle figure geometriche (per esempio, geodetiche sulla superficie sferica, somma degli angoli dei triangoli sferici). Da notare che in questo modo si apprezzano meglio i risultati della geometria euclidea, che non sono scontati nei nuovi ambienti.
- 4) Il gioco degli assiomi anche in contesti non usuali: citiamo il Club delle Tartarughe (*La rivoluzione non euclidea* di Trudeau) e il gioco del Mu (*Gödel, Escher, Bach* di Hofstadter).
- 5) Educare alla dimostrazione. Ragionamento deduttivo rigoroso. Idea generale di assiomatizzare un settore della Matematica; dimostrazioni in sistemi assiomatici diversi.
- 6) Analogie e differenze fra strutture. Situazioni che presentano somiglianze, e confronto fra strutture con caratteristiche diverse (per esempio, geometrie finite).
- 7) Crisi dei fondamenti, da sviluppare in collaborazione con i docenti di Storia e Filosofia.

Bibliografia

- [1] F. Arzarello, C. Dané, L. Lovera, M. Mosca, N. Nolli, A. Ronco, *Dalla geometria di Euclide alla geometria dell'Universo: Geometria su sfera, cilindro, cono, pseudosfera*, collana Convergenze, Springer, 2012.
- [2] R. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino 2004.
- [3] V. Villani, *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*, Pitagora Editrice, Bologna 2006.
- [4] V. Villani, C. Bernardi, S. Zocante, R. Porcaro, *Non solo calcoli - domande e risposte sui perché della Matematica*, collana Convergenze, Springer, 2012.

Tema n. 7 – Modelli matematici

Introduzione storica

Il Novecento è stato un secolo di incredibili paradossi per la Matematica: se da un lato si è spinta verso livelli di astrazione mai visti prima (pensiamo al gruppo Bourbaki o alla topologia algebrica), dall'altro ha vissuto una svolta pragmatica e applicativa senza precedenti, che ha consacrato l'era dei modelli matematici. Prima del Novecento la modellazione matematica era usata quasi esclusivamente in ambito fisico (si pensi alla meccanica di Newton, alle equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell o alla termodinamica) e solo nel XX secolo i modelli sono diventati strumenti indispensabili per esplorare ambiti prima considerati distanti dalla Matematica astratta come la Biologia, l'Economia, la Sociologia e, in tempi recenti, l'Intelligenza Artificiale.

A scopo esemplificativo citiamo, in Fisica, la Teoria della relatività e la Meccanica Quantistica nel primo ventennio del secolo, in Biologia i modelli differenziali per la dinamica delle popolazioni (ad esempio, il modello predatore-preda di Lotka e Volterra (1926) e il modello SIR per le epidemie (1927)), in Economia la Teoria dei Giochi e la Finanza (a partire dal 1940). Inoltre, il Novecento è stato caratterizzato, a partire dai modelli di calcolo introdotti da Turing (1936) e dall'architettura di von Neumann (1945), dallo sviluppo di calcolatori con architetture sempre più evolute e potenza di calcolo sempre crescente. Tale contesto ha favorito la ricerca di algoritmi efficienti e lo sviluppo della modellizzazione numerica per la risoluzione approssimata di problemi matematici complessi, fino alle più recenti applicazioni nell'Intelligenza Artificiale e nelle reti neurali.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

Approfondire gli aspetti della modellizzazione Matematica nella scuola secondaria di secondo grado rappresenta un'opportunità didattica di estremo interesse e in piena sintonia con lo spirito delle Indicazioni Nazionali, che invitano esplicitamente a *“superare l'insegnamento della disciplina come mero addestramento meccanico al calcolo”* e indicano tra gli obiettivi di *“studio il concetto di modello matematico”* e la *“costruzione e l'analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni”*.

Presentare la Matematica attraverso la lente dei modelli permette agli studenti di cogliere il legame vitale tra l'astrazione formale e la realtà che li circonda, educandoli alla *“matematizzazione”* di fenomeni fisici, biologici, economici e sociali. Questo approccio non solo consolida le competenze di *problem solving* e la capacità di tradurre un problema reale in un linguaggio rigoroso per poi interpretarne i risultati, ma fornisce agli studenti e alle studentesse gli strumenti critici necessari per decifrare la complessità del mondo contemporaneo, trasformando la Matematica da nozione astratta a risorsa fondamentale per l'esercizio di una cittadinanza attiva e pienamente consapevole.

Riferimenti alle nuove Indicazioni Nazionali (bozza Commissione Perla, aprile 2026)

Nella proposta per le nuove Indicazioni Nazionali per i Licei i modelli matematici hanno un ruolo centrale e trasversale. La Matematica viene definita *“linguaggio unificante di tutte le scienze e tecniche, strumento per rappresentare relazioni, costruire modelli, calcolare, dimostrare”* e si richiede che gli studenti imparino a *“osservare ed esplorare i fenomeni, individuare regolarità, formulare ipotesi, costruire modelli, mettere alla prova la loro validità tramite esperimenti mirati”*. La modellizzazione viene proposta come strumento didattico e l'apprendimento della Matematica *“si sviluppa anche grazie a uno stretto collegamento con la modellizzazione”*. Tra le competenze finali del Liceo Scientifico compare esplicitamente la capacità di *“formulare ipotesi esplicative utilizzando modelli, analogie e leggi”* e l'insegnamento della Fisica viene proposto in termini di costruzione e verifica dei modelli. I modelli matematici diventano anche strumenti per interpretare

dati, valutare correlazioni, comprendere i limiti delle inferenze e sviluppare pensiero critico verso algoritmi e Intelligenza Artificiale, introducendo quindi uno stretto collegamento tra modellizzazione, Statistica e Intelligenza Artificiale.

Quindi, nel nuovo documento emerge una visione della Matematica molto più orientata alla modellizzazione, all'argomentazione e all'interpretazione rispetto alle precedenti Indicazioni.

I percorsi scolastici del Liceo Matematico, in linea con le nuove indicazioni, si pongono concretamente l'obiettivo di trovare un giusto equilibrio tra la valorizzazione della Matematica come strumento per comprendere la realtà, senza ridurla a un insieme di tecniche applicative, e il carattere di sistema teorico, linguaggio rigoroso e metodo di pensiero. In tale prospettiva, il tema dei modelli matematici può costituire un terreno privilegiato per collegare astrazione, formalizzazione, sperimentazione e applicazioni. Se si guarda specificamente alla possibilità di sviluppare una trattazione rigorosa e teoricamente solida dei modelli matematici, nelle nuove indicazioni si vedono alcune novità molto apprezzabili, in particolare l'introduzione precoce degli strumenti dell'Analisi Matematica come strumenti astratti fondamentali per la modellizzazione, e alcune assenze significative quali, ad esempio, l'assiomatica, l'induzione matematica e le strutture algebriche.

Modellizzazione e Liceo Matematico

In linea con gli obiettivi del Progetto Liceo Matematico, l'adattabilità e il forte carattere interdisciplinare della modellizzazione si inseriscono in un approccio didattico della Matematica, orientato all'integrazione tra teoria e applicazioni, e permettono di costruire attività e laboratori didattici applicabili a diversi contesti disciplinari: lo stesso strumento matematico (ad esempio una funzione esponenziale o un modello dinamico) può essere utilizzato per descrivere fenomeni molto diversi, rendendo possibile un dialogo reale tra Matematica e le altre discipline.

In questo senso, la scelta del modello assume anche un valore didattico: consente al docente di progettare percorsi mirati, coerenti con i contenuti scientifici affrontati in parallelo nelle altre discipline e adattati alle esigenze formative degli studenti, promuovendo lo sviluppo di competenze trasversali. Inoltre, l'introduzione di semplici algoritmi e/o l'utilizzo software matematico offrono la possibilità di sviluppare attività laboratoriali di tipo computazionale, favorendo un apprendimento più attivo e orientato alla risoluzione di problemi.

Temi proposti e motivazioni

- La Matematica come linguaggio della scienza. La scienza moderna descrive i fenomeni naturali mediante relazioni matematiche tra grandezze. Idea chiave: la Matematica non è solo calcolo astratto, ma uno strumento fondamentale per descrivere e comprendere la realtà.
- I modelli come rappresentazione semplificata della realtà. Un modello nasce da un processo di astrazione: si individuano le grandezze rilevanti e si trascurano gli aspetti secondari. Può essere espresso tramite equazioni, funzioni, grafici, tabelle o sistemi. Idea chiave: un modello non coincide con la realtà, ma ne è una rappresentazione utile.
- Modellizzare significa individuare grandezze e relazioni. Costruire un modello richiede di identificare le variabili significative e stabilire relazioni matematiche tra esse. Idea chiave: modellizzare significa tradurre un problema reale nel linguaggio matematico.
- I modelli servono per spiegare e prevedere. Un modello permette di analizzare scenari e comprendere il comportamento di un sistema. Idea chiave: i modelli consentono di fare previsioni e prendere decisioni informate.
- I dati devono essere interpretati con un modello. I dati sperimentali, da soli, non costituiscono un modello: è necessario individuare una legge che li descriva. Idea chiave: il modello nasce dal dialogo tra Matematica e dati.
- Modelli numerici. Il calcolatore e i modelli numerici sono strumenti fondamentali per visualizzare

funzioni e per simulare modelli che descrivono fenomeni reali anche complessi. Algoritmi efficienti consentono di ottenere risultati numerici accurati, in relazione agli strumenti di calcolo disponibili. Idea chiave: i metodi numerici permettono di esplorare e simulare i modelli mediante lo strumento di calcolo.

- Analizzare un modello permette di capire il fenomeno. Lo studio matematico del modello consente di ottenere informazioni sul sistema (andamento, equilibrio, crescita, estremi). Idea chiave: dedurre risultati matematici dal modello e ritornare al fenomeno reale.

- I modelli hanno limiti. Ogni modello è un'approssimazione, valida entro certe condizioni e soggetta a incertezze. Idea chiave: la modellizzazione è un processo continuo di costruzione, verifica e revisione.

Esempi di attività e laboratori

Un modello matematico può essere presentato in classe con una sequenza di momenti didattici: osservazione del fenomeno, individuazione delle grandezze rilevanti, costruzione del modello matematico, stima dei parametri mediante i dati, analisi del modello, simulazioni e previsioni, confronto con la realtà e revisione. A scopo esemplificativo proponiamo alcune esperienze svolte nel Liceo Matematico in cui l'approccio didattico proposto affianca all'applicazione del metodo ipotetico-deduttivo una esperienza in cui gli studenti sperimentano il pensiero matematico in modo indipendente e critico. Sono caratteristiche comuni delle esperienze proposte

- La premessa che le idee nascono da problemi che hanno una ben definita cornice storica.
- Lo studio sperimentale di un problema, dove la connotazione sperimentale indica non solo l'investigazione di laboratorio, ma anche la sperimentazione di idee matematiche.
- Il metodo ludico, cioè la possibilità di esplorare le idee della Matematica giocando con esse anche attraverso la costruzione di giochi che ne esplicitino le caratteristiche.

1) Una proposta di percorso didattico completo sulla modellizzazione matematica, da svolgersi nell'arco dei cinque anni, delineato dall'Università di Udine e svolto al Liceo Malignani di Udine, è disponibile al link [11] (si veda anche [9], [10]). Accenniamo brevemente ad altre attività specifiche, rimandando la descrizione completa alla bibliografia e ai link per il materiale didattico.

2) Modelli matematici per le epidemie ([12])

L'obiettivo del laboratorio è comprendere come i modelli matematici descrivano la diffusione delle epidemie, con particolare attenzione al ruolo delle soglie nel determinare lo sviluppo di un'epidemia. Gli studenti saranno guidati nell'interpretazione e nell'utilizzo di modelli di crescita, come quello esponenziale e quello logistico, cogliendone caratteristiche e limiti, fino ad arrivare a modelli più strutturati, come il modello SIR, che permettono una descrizione più realistica dell'evoluzione epidemica. Un elemento centrale del laboratorio è il suo valore nell'ambito dell'Educazione civica.

3) Modelli matematici per la Fisica

3.1) *Iterazioni e serie* [Secondo/Terzo anno, tempo stimato 10h]: cosa hanno in comune il calcolo della lunghezza di una scala, le pedine del domino e la corsa di Achille e la tartaruga? Questi modelli di situazioni reali possono essere studiati attraverso i processi ricorsivi e l'uso del principio di induzione per capire come calcolare somme finite e studiare successioni. Riferimenti bibliografici: [3], [5].

3.2) *Il calcolo differenziale ed integrale à la Newton* [Terzo/Quarto anno, tempo stimato 6h]: come si fa a determinare una retta che sia tangente ad una curva? Questo è il problema che Newton si pose e risolse quando studiò il calcolo della velocità istantanea. Come ci riuscì? Il percorso intende

introdurre gli studenti alle idee alla base del calcolo infinitesimale ed all'uso degli infinitesimi. Letture consigliate: [1], [2].

3.3) *Dalle onde ai numeri complessi* [Quarto anno, tempo stimato 8h]: quale linguaggio matematico si adatta meglio allo studio dei fenomeni ondulatori? Questi fenomeni non riguardano solamente le onde nei fluidi ma anche, come spiega la meccanica quantistica, la materia stessa. Proprio dai fatti sperimentali è possibile ricondursi ad oggetti matematici molto particolari: i numeri complessi. Referenza principale: [4].

4) Vito Volterra, l'uomo che tradusse la natura in equazioni ([7], [8], [13])

Vito Volterra (1860-1940) è stato uno dei più grandi scienziati del suo tempo, universalmente riconosciuto come un pioniere assoluto della modellistica matematica. L'attività laboratoriale su Vito Volterra, proposta all'IIS B. Pascal di Roma, è un percorso di ricerca, sperimentazione e divulgazione ed è descritta dettagliatamente nel sito dedicato. Gli alunni nel corso degli ultimi tre anni diventano dei veri ricercatori e percorrono le seguenti fasi: ricerca delle fonti, in particolare quelle inedite (terzo anno, tempo stimato 10h), analisi delle fonti (quarto anno, tempo stimato 12h), approfondimenti e divulgazione (quinto anno, tempo stimato 15h).

5) Ottimizzazione ([6])

Il tema dell'ottimizzazione è uno degli argomenti relativi alla modellizzazione matematica di maggior rilievo nelle Indicazioni Nazionali e tipicamente presente nella prova finale di Matematica. Si propone qui un'attività laboratoriale di 3 ore sperimentata più volte in occasione della Scuola Estiva PLS presso Sapienza Università di Roma, che ha lo scopo di far acquisire agli studenti familiarità con l'ottimizzazione e le sue numerose applicazioni. Va notato esplicitamente che la risoluzione dei problemi proposti non fa uso delle derivate. Anticipare i problemi di ottimizzazione utilizzando solo strumenti algebrici e geometrici elementari permette agli studenti di sperimentare i limiti dei metodi tradizionali, trasformando la successiva introduzione del calcolo infinitesimale da arida nozione teorica a strumento risolutivo accolto con entusiasmo per la sua straordinaria potenza semplificatrice.

Bibliografia e sitografia

- [1] D. Acheson, *Viaggio nel calcolo infinitesimale*. Zanichelli, 2022.
- [2] R. Brugia, G. Bruzzaniti, *Derivate ed integrali subito*, Zanichelli, 2018.
- [3] R.P. Burn, *Numbers and Functions*, Cambridge U.P., 2001
- [4] R.P. Feynman, *Lectures on Physics*, cap 1, vol III, https://www.feynmanlectures.caltech.edu/III_01.html
- [5] A. Foschi, L. Mazza, *Proposta per introdurre gli studenti al mondo delle sommatorie e delle serie attraverso un percorso globale e integrato con la fisica e altre discipline scientifiche*, PROGETTO ALICE - 2 vol. XXI n 62, 2020.
- [6] A. Malusa, *Simply the best!* Scuola Estiva di Matematica PLS, settembre 2019.
<https://drive.google.com/file/d/1S3utrcqVo-HHeeNBPDnG142XJ-bUaXxu>
- [7] A. Malusa, *Vito Volterra, matematica del XX secolo (e non solo) per le scuole superiori*, Nuova Lettera Matematica 8 (2025), pp. 112–126.
- [8] A. Malusa, D. Ricalzone, N. Stivali, *La vita e la matematica di Vito Volterra, che capolavoro!*. Atti del Seminario Nazionale dei Licei Matematici 2025.
- [9] A. Quarteroni, F. Saleri, A. Veneziani, *La modellistica va a scuola*. Atti XXIV Congresso UMI-CIIM, Acireale, 2004.
- [10] R. Vermiglio, *Realtà, modelli matematici ed epidemie*.
<https://drive.google.com/file/d/1dPma-fiJTU9iTpbdq04f77glWnnMfe8Q>
- [11] *I modelli matematici nelle discipline STEM. Un possibile percorso per il Liceo Matematico*.
<https://drive.google.com/file/d/1fT5PSXgvK3Y0r0BZjMlxIY0LrHeILJbc>
- [12] *Laboratorio sui modelli matematici per le epidemie*.
https://drive.google.com/file/d/1hE1niM448KyTcSD-nHKjb_ig3jJtcoKh/view?usp=sharing
- [13] *Vito Volterra, Mister Italian Science*. <https://sites.google.com/view/vito-volterra-lm-sapienza>

Tema n. 8: Statistica e Probabilità

[con il contributo degli esperti Luigi Amedeo Bianchi, Nello Buonocore, Stefania Gubbiotti, Domingo Paola]

Introduzione storica

Il Calcolo delle Probabilità è un ramo relativamente giovane della matematica. Se ne fissa l'avvio nel 1600, con Blaise Pascal e Pierre de Fermat. Le motivazioni iniziali erano legate soprattutto al gioco d'azzardo. Ma nel corso dei secoli il Calcolo delle Probabilità ebbe sviluppi teorici rilevanti, come, nel Settecento, la legge dei grandi numeri introdotta da Jakob Bernoulli o il Teorema di Thomas Bayes, sistemazioni rigorose, fino all'approccio assiomatico di Andrej Kolmogorov del 1933, ed estese applicazioni ad altre scienze: Fisica, Economia, Medicina, Scienze Sociali.

La Statistica ha radici più antiche, come strumento necessario per fini civili o censuari. Le applicazioni a fenomeni sociali ed economici si sviluppano nel Seicento. Tra l'Ottocento e il Novecento la Statistica si collega al Calcolo delle Probabilità e acquista le dimensioni di una teoria matematica, soprattutto grazie a Ronald Fisher (1890-1962). I contributi italiani includono quelli di Angelo Messedaglia (1820-1901) e Corrado Gini (1884-1965).

Sia la Statistica sia la Probabilità operano in situazioni di incertezza, apparentemente antitetiche rispetto all'ideale di certezza e verità in genere attribuito alla Matematica. Esemplificano due aspetti fondamentali sottolineati dalle attuali Indicazioni Nazionali: la matematizzazione della realtà e l'aspirazione alla interdisciplinarietà. Inoltre, l'ampiezza e la ricchezza delle loro applicazioni anche sociali le rendono basi fondamentali nell'educazione alla cittadinanza.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

Le Indicazioni Nazionali in vigore menzionano la Statistica e la Probabilità tra gli sviluppi fondamentali della matematica moderna. Pur non nominandole esplicitamente nei propri titoli, dedicano loro la voce “*dati e previsioni*” nell'intero percorso quinquennale del Liceo Scientifico. Nel primo biennio le Indicazioni prospettano la definizione di valori medi e misure di stabilità; l'analisi di dati e serie statistiche; la nozione di probabilità; il concetto di modello matematico. Nel secondo biennio prevedono distribuzioni doppie condizionate e marginali, deviazione standard, dipendenza, correlazione, regressione, campionamento, probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes, gli elementi di base di calcolo combinatorio e un ulteriore approfondimento del concetto di modello matematico. Nell'anno finale considerano alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità, come quelle binomiale, normale e di Poisson. Le Indicazioni raccomandano poi l'uso di strumenti informatici per l'analisi dei dati e per la modellizzazione.

Riferimenti alle nuove Indicazioni Nazionali (bozza Commissione Perla, aprile 2026)

La nuova proposta di Indicazioni dedica alla Statistica e alla Probabilità attenzione ancora maggiore, ribadendone il contributo al progresso sociale, culturale, civile ed economico e riservando nel primo e nel secondo biennio, tra gli obiettivi specifici di apprendimento e conoscenze, una voce specifica “*Analisi di dati, Statistica, Probabilità*”.

Nel primo biennio si suggerisce di muovere da semplici esperimenti ideali, come estrazioni da urne o lanci di monete e dadi, per astrarre dalla realtà il modello matematico, introducendo concetti come misure di tendenza centrale, media, mediana, percentile, varianza e deviazione standard, eventi e loro probabilità.

Nel secondo biennio, si rinnova la raccomandazione di muovere da dati e situazioni reali per ottenere, con l'uso eventuale di metodi e strumenti informatici, una loro elaborazione astratta. Si propongono grafici di dispersione anche per due variabili numeriche. Si citano direttamente modelli di regressione e classificazione, come pure i concetti di causalità e correlazione.

Nel quinto anno, alla voce “*Modelli statistici*” si rinnova la raccomandazione di ispirarsi a fenomeni della vita quotidiana; si introducono poi varie distribuzioni relative agli esiti di questi esperimenti aleatori elementari, citando specificamente distribuzione uniforme discreta e binomiale, distribuzione continua, distribuzione normale. La formula di Bayes è esplicitamente legata a test diagnostici, classificazioni e aggiornamento di probabilità.

L’obiettivo è sempre quello di individuare modelli statistici adeguati per i fenomeni aleatori, anche come ponte verso i sistemi generativi e l’Intelligenza Artificiale.

Temi proposti e motivazioni

Gli insegnanti di matematica tendono talora a relegare gli argomenti di Statistica e perfino di Probabilità a un ruolo marginale. Le ore suppletive del Liceo Matematico consentono un’introduzione più calma e accurata di temi presenti nelle Indicazioni, oltre che svilupparne opportune estensioni. L’obiettivo generale è quello di educare a interpretare i dati reali, costruirne i modelli matematici adeguati, abituarsi a decisioni consapevoli. Su questo si fonda anche una corretta alfabetizzazione statistica: in proposito ricordiamo le linee guida per l’insegnamento della Statistica GAISE elaborate dall’American Statistical Association (citare in bibliografia). È poi opportuno che i concetti teorici siano assistiti da un impiego cosciente e maturo di software, linguaggi di programmazione, strumenti interattivi, simulazioni e risorse online.

In questa ottica complessiva, proponiamo alcuni temi che ci paiono meritevoli di approfondimento. Cominciamo da quelli che si possono già affrontare nel primo biennio.

- Primi passi

Esempi di simulazione possono mostrare come il calcolo delle probabilità sia uno strumento operativo legato alla realtà e non solo calcolo combinatorio. Esperimenti con monete, dadi, urne, passeggiate aleatorie o campionamenti ripetuti si possono svolgere prima manualmente e poi con fogli di calcolo o brevi programmi. Questa pratica si può svolgere fin dal primo biennio e consente di collegare frequenze empiriche, eventi, modelli e approssimazione. Anche l’introduzione al pensiero statistico può muovere dall’analisi di problemi reali, per abituare a formulare domande investigabili significative, rilevanti, contestualizzate alla ricerca di possibili risposte.

- Campionamento e bias

La raccolta dei dati, il loro campionamento e l’analisi di qualità sono cruciali per comprendere sondaggi, statistiche ufficiali, studi medici, ambientali e sportivi, valutazioni scolastiche eccetera. Si possono discutere campioni casuali, campioni di convenienza, bias di selezione, il problema delle mancate risposte, *survivorship bias* e distorsioni nei questionari, errori di misura. È un argomento di forte valore civico, che si può legare anche ai percorsi interdisciplinari di educazione alla cittadinanza.

- Caratteri statistici

Si classificano i caratteri statistici e gli strumenti necessari per ottenere una rilevazione dei dati: scale nominali, scale ordinali, conteggio, strumenti di misura. Si descrivono anche le distribuzioni di frequenza e le rappresentazioni grafiche opportune per ciascuno dei tipi di caratteri statistici.

I temi che seguono sono invece consigliabili a partire dal secondo biennio.

- Rappresentazioni dei dati

Ci si abitua alla lettura, costruzione e interpretazione critica di tabelle e grafici con strumenti digitali, discutendo su manipolazione e distorsione dei grafici.

- Legge dei grandi numeri e teorema centrale del limite

La legge dei grandi numeri spiega perché le frequenze si stabilizzano; il teorema centrale del limite perché la distribuzione normale ricorre in tanti contesti. Si può evitare un loro trattamento tecnico,

ma si possono proporre simulazioni, istogrammi di medie campionarie e discussione qualitativa dell'errore di stima. Si possono usare sia strumenti analogici (macchina di Galton), sia informatici.

- Probabilità condizionata e indipendenza

Si propongono paradossi, problemi, giochi probabilistici legati all'argomento. Si considerano rappresentazioni visive (alberi, tabelle, diagrammi). Si applica il ragionamento probabilistico a proporzioni e tassi in contesti reali.

- Inferenza bayesiana

La formula di Bayes è spesso trattata come esercizio di algebra. L'inferenza bayesiana permette di interpretarla come aggiornamento dell'informazione. Si possono qui usare filtri antispam, classificazioni, decisioni in condizioni di incertezza, esempi giudiziari e diagnostici. Il teorema di Bayes è importante anche nella prospettiva di un approccio critico all'uso di strumenti di Intelligenza Artificiale generativa, visto il ruolo che gioca il calcolo di probabilità condizionate nella generazione di testi da parte di un LLM (Large Language Model, lo strumento di apprendimento automatico).

- Probabilità tra teoria e intuizione

Si confrontano probabilità teorica e sperimentale. Si adopera la simulazione attraverso strumenti software (R, Python, applicazioni web) per visualizzare empiricamente risultati teorici (ad esempio, la legge dei grandi numeri).

- Regressione e modellizzazione statistica

La regressione è un ponte naturale tra funzioni, geometria analitica, dati e previsione. Si può iniziare con la regressione lineare semplice, accostata da un punto di vista descrittivo, col calcolo dei coefficienti dei minimi quadrati. Si può poi arrivare, in modo qualitativo, a modelli non lineari e logistici.

- Causalità

Correlazione non è sinonimo di causalità. Per chiarirne la differenza, si possono introdurre anzitutto i concetti di relazione tra variabili e di correlazione, per poi sviluppare l'analisi di forza e direzione di una relazione e le correlazioni spurie. Si possono poi introdurre esperimenti randomizzati, gruppi di controllo, confondimento, variabili nascoste, paradosso di Simpson e semplici diagrammi causali. È uno dei temi più importanti per l'educazione scientifica e civica.

- Metodi di campionamento

Bootstrap e test di permutazione permettono di introdurre inferenza e incertezza senza bisogno di troppo formalismo. Sono adatti a dati reali e a strumenti informatici semplici. L'idea didattica è: per capire la variabilità di una procedura statistica, la si ripete più volte su dati ricampionati.

- Sintesi delle distribuzioni, misure di posizione e variabilità

Si ricapitolano i vari indici e si discute la loro attendibilità.

- Variabili aleatorie

Si propongono modelli probabilistici per rappresentare situazioni reali; si ricorre a simulazioni attraverso strumenti software (R, Python, applicazioni web) per visualizzare distribuzioni e parametri.

- Legame tra Probabilità e Inferenza Statistica

Si introduce il concetto di verosimiglianza mediante esempi guidati. Si discute la stima di massima verosimiglianza dei parametri di un modello (per esempio Bernoulliano).

- Catene di Markov

Le catene di Markov sono uno dei modi più semplici per studiare fenomeni casuali che evolvono nel tempo: passeggiate aleatorie, giochi, genetica elementare, previsioni meteorologiche semplificate, ranking di pagine web, modelli epidemici elementari. Richiedono solo probabilità

condizionata, matrici semplici (non indispensabili) e iterazione. Possono essere studiate con rappresentazioni grafiche come i pallogrammi.

- Apprendimento statistico

Offre un accesso matematicamente controllato a temi oggi associati all'Intelligenza Artificiale: classificazione, regressione, errore di previsione, *overfitting*, *training set* e *test set*, validazione incrociata, matrici di confusione. È importante presentarlo non come “magia computazionale”, ma come modellizzazione basata su dati, funzioni e probabilità.

- Serie temporali

Molti dati reali si ordinano nel tempo. Tanto vale per temperature, prezzi, epidemie, consumi energetici, popolazione, traffico, segnali fisici. Le serie temporali permettono di discutere *trend*, stagionalità, rumore, autocorrelazione, previsioni e limiti della previsione. Il tema è adatto anche a collegamenti con fisica, scienze naturali, economia e educazione civica, con attenzione particolare alle serie temporali di temperatura e CO₂ e inquinanti.

- Analisi delle componenti principali

L'analisi delle componenti principali, o PCA, è un tema adatto alla parte finale del percorso, perché collega Algebra Lineare, Geometria, Statistica e dati multivariati. Può essere presentata geometricamente come ricerca di direzioni che spiegano molta variabilità, senza entrare nei dettagli spettrali più tecnici. È utile per visualizzare dati ad alta dimensione, ridurre le dimensioni e discutere l'informazione conservata e l'informazione persa. Le Indicazioni Nazionali in vigore menzionano già vettori, (in)dipendenza lineare, prodotti scalare e vettoriale, oltre a correlazione e regressione. La proposta 2026 prevede che i metodi per due variabili si estendano al caso di molte variabili e collega sistemi lineari, regressione e reti neurali.

- Medie analitiche

Si tratta delle medie trattate da Oscar Chisini nel 1929. Tra di esse rientrano la media aritmetica, la media armonica, la media quadratica e la media antiarmonica.

- Centri

Si discutono moda, mediana, media aritmetica, valore centrale come misure di tendenza centrale. Si introduce così la necessità di determinare il punto di minimo assoluto di una funzione (di una variabile) che rappresenta la distanza del suo argomento dalla rilevazione dati (di tipo quantitativo).

Altri argomenti di attualità, che si collegano al contesto di Statistica e Probabilità sono:

- Teoria dell'informazione

Entropia, codifica, compressione e trasmissione dell'informazione sono temi matematicamente ricchi ma accessibili. Si possono proporre codici prefissi, codifica di Huffman, messaggi binari, ridondanza, rumore, errore e compressione. Il tema collega probabilità, logaritmi, informatica, linguistica, fisica e comunicazione. Il riferimento a codici e crittografia tra gli approfondimenti possibili nella proposta 2026 rende il tema particolarmente naturale.

- Machine learning e Intelligenza Artificiale

Si forniscono esempi pratici di addestramento di modelli di machine learning e deep learning, esperimenti di utilizzo del Natural Language Processing.

I laboratori possono anche concentrarsi (in modo trasversale) sui grandi problemi storici legati alla Statistica e alla Probabilità, come: l'antico gioco della zara, considerato anche da Dante nella *Divina Commedia* (primo biennio e terzo anno); il problema della ripartizione della posta, di Luca Pacioli (primo biennio); il problema dell'urna di Lewis Carroll (secondo biennio, sulla formula di Bayes e sul pericolo di confusione tra evento congiunto ed evento condizionato); il problema del valore più probabile (secondo biennio e quinto anno, sulla distribuzione geometrica e sulla differenza tra l'intuizione dettata dal vissuto e il valore matematico di probabilità di un evento).

Ugualmente interessanti possono essere l'indagine e la discussione di famosi paradossi: il paradosso di San Pietroburgo (secondo biennio e quinto anno, sulla media infinita; il paradosso del prigioniero (secondo biennio e quinto anno, sulle probabilità condizionata e sulla formula di Bayes); il dilemma di Monty Hall (secondo biennio e quinto anno, vedi sotto, ancora sulla probabilità condizionata e sulla formula di Bayes); il paradosso di Bertrand (quinto anno, sulla distribuzione uniforme continua); paradosso della roulette (quinto anno, sullo spazio campione continuo); il paradosso di Simpson (secondo biennio, sulle tabelle a doppia entrata).

Esempi di possibili attività e laboratori

Un laboratorio del Liceo Matematico può realisticamente prevedere attività aggiuntive di Statistica e Probabilità per 5-6 ore nel primo biennio, 8 nel secondo e 10 nel quinto anno. Queste esperienze ed attività laboratoriali si svolgono spesso in collaborazione con insegnanti di altre discipline, quali Fisica, Informatica, Scienze, Arte. Esempi si possono trovare, tra l'altro, nell'Allegato B del Decreto Ministeriale n. 104 del 10 giugno 2026. Ci riferiamo soprattutto a quelli raccolti per la tematica *Dati e previsioni*

- Giochi e probabilità;
- Teorema di Bayes;
- Combinatoria oltre i raggruppamenti classici;
- Distribuzioni continue di probabilità;
- Teoria dei giochi;
- Dinamica delle popolazioni.

Ma ne aggiungiamo altri, elencati nella stessa proposta sotto altre voci:

- L'Intelligenza Artificiale;
- Codici di trasmissione e teoria dell'informazione;
- Matematica, Fisica e analisi dei dati;
- La teoria cinetica dei gas, entropia e teoria dell'informazione.

Si suggerisce inoltre di consultare le attività didattiche di UMI e Piano [M@t.abel](#) citate nell'introduzione generale.

Proponiamo comunque 5 esempi specifici di argomenti da approfondire in questi laboratori, distribuiti nel quinquennio, uno per anno. In essi si prevedono una riflessione individuale, poi la formazione di piccoli gruppi per formulare ipotesi e risposte, infine una discussione generale guidata dal docente. Per arricchire il confronto ci si può avvalere di strumenti come LLM, o consultare ChatGPT, Gemini o Claude, o utilizzare app disponibili in rete, come GapMinder World.

1) Anno I, Statistica: Analisi di dati sportivi.

Sulla base dei dati relativi ai record mondiali di vari sport, si fanno ipotesi legate non solo alla disciplina sportiva interessata, ma anche alla storia italiana e mondiale. L'attività si svolge in collaborazione con docenti di lettere e di educazione fisica. Si possono immaginare varianti, per esempio legate all'economia.

2) Anno II, Calcolo delle Probabilità: Il problema della ripartizione della posta.

Si riprende il classico problema posto da Luca Pacioli nel 1494 su come ripartire la posta di una partita a dadi che dà la vittoria a chi prevale per 6 volte, ma si interrompe sul punteggio di 5 a 3. La riflessione si presta a generalizzazioni che impiegano con forte anticipo la distribuzione binomiale. Ma nell'ambito del Liceo Matematico la scelta non è poi così improponibile.

3) Anno III, Statistica: Statistica descrittiva per affrontare il tema delle disuguaglianze economiche.

Si raccolgono, leggono, interpretano ed elaborano dati su un argomento di evidente valenza anche civica.

4) Anno IV, calcolo delle probabilità: Il problema di Monty Hall.

Si propone il famoso problema nei modi sopra descritti. L'attività è un'occasione per introdurre la probabilità condizionata e il teorema di Bayes, in genere confinati al quinto anno. L'ora settimanale in più disponibile nei Licei Matematici consente di anticipare l'argomento.

5) Anno V, Statistica Inferenziale: i cambiamenti climatici.

Si riprendono e applicano in un contesto concreto, di grande rilevanza e attualità, molte delle conoscenze di Statistica (ma in qualche modo anche di Probabilità) introdotte nel percorso scolastico), affidandosi eventualmente anche a LLM.

Temi alternativi per il quinto anno possono essere i seguenti.

6) La casualità: si prendono in considerazione i risultati della casualità algoritmica (Chaitin e Kolmogorov) e si esplora che cosa si intende con "regolarità del caso". Si accosta così nuovamente in modo comprensibile la legge dei grandi numeri.

7) I meccanismi cui gli esseri umani si affidano quando si trovano di fronte a problemi di decisione sono spesso incoerenti con l'approccio razionale del pensiero probabilistico. Si approfondisce l'argomento. Il libro di Kahneman, *Pensieri lenti e veloci*, è qui molto utile.

Bibliografi

Libri divulgativi

- [1] A. Cairo (2020). *Come i grafici mentono. Capire meglio le informazioni visive*. Milano: Raffaello Cortina Editore.
- [2] K. Devlin (2008). *La lettera di Pascal*. Milano: Rizzoli.
- [3] D. Hand (2015). *Il caso non esiste. Perché le cose più incredibili accadono tutti i giorni*. Milano: Rizzoli
- [4] D. Kahneman (2012), *Pensieri lenti e veloci*, Milano: Mondadori.
- [5] M. Malvaldi (2020). *La direzione del pensiero: Matematica e filosofia per distinguere cause e conseguenze*. Milano: Raffaello Cortina Editore.
- [6] M. Malvaldi (2025). *Se fossi stato al vostro posto*. Milano: Raffaello Cortina Editore.
- [7] D. Spiegelhalter (2020). *L'arte della statistica. Cosa ci insegnano i dati*. Torino: Einaudi.

Altro riferimento di interesse

- [8] C. Franklin, G. Kader, D. Mewborn, J. Moreno, R. Peck, M. Perry, and R. Scheaffer (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE)*. American Statistical Association.

Sugli strumenti informatici per la didattica della statistica

- [9] D. Passaro, P. Brutti, F. De Santis, S. Gubbiotti (2020). Il linguaggio R e il nuovo ruolo della Statistica nell'insegnamento della Matematica. La leva di Archimede. *Archimede* 3
- [10] D. Passaro (2016). Matematica e programmazione: usare Python al Liceo. La leva di Archimede 1.

Riferimenti per i laboratori 1-3 sopra descritti

- [11] D. Paola, (2017). Un'esperienza di elaborazione dati in un primo anno di scuola secondaria di secondo grado. In L. Alberini (a cura di), *Esperienze didattiche 1. La matematica di Mathup*, Alic3 & Bo8 48. Milano: Egea.
- [12] D. Paola (2019). Un'esperienza di avvio al pensiero probabilistico nella prospettiva di educare alla razionalità. In F. Morselli, G. Rosolini, C. Toffalori (a cura di), *Educare alla razionalità - Tra Logica e Didattica della Matematica*. Bologna: Edizioni dell'Unione Matematica Italiana, pp. 483-507.
- [13] D. Paola (2022). Matematica dalla realtà e per la realtà. Analisi di dati scientifici ed economici nella scuola secondaria per descrivere, capire e fare scelte. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 45 B (1), pp. 26-52.